Методы решений заданий С5

(задачи с параметром)

Метод областей в решении задач

Обобщённый метод областей

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с одной переменной

Неравенства с двумя переменными

Метод интервалов:

- 1. Область определения
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.

Метод областей:

- 1. Область определения
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5.Ответ по рисунку.

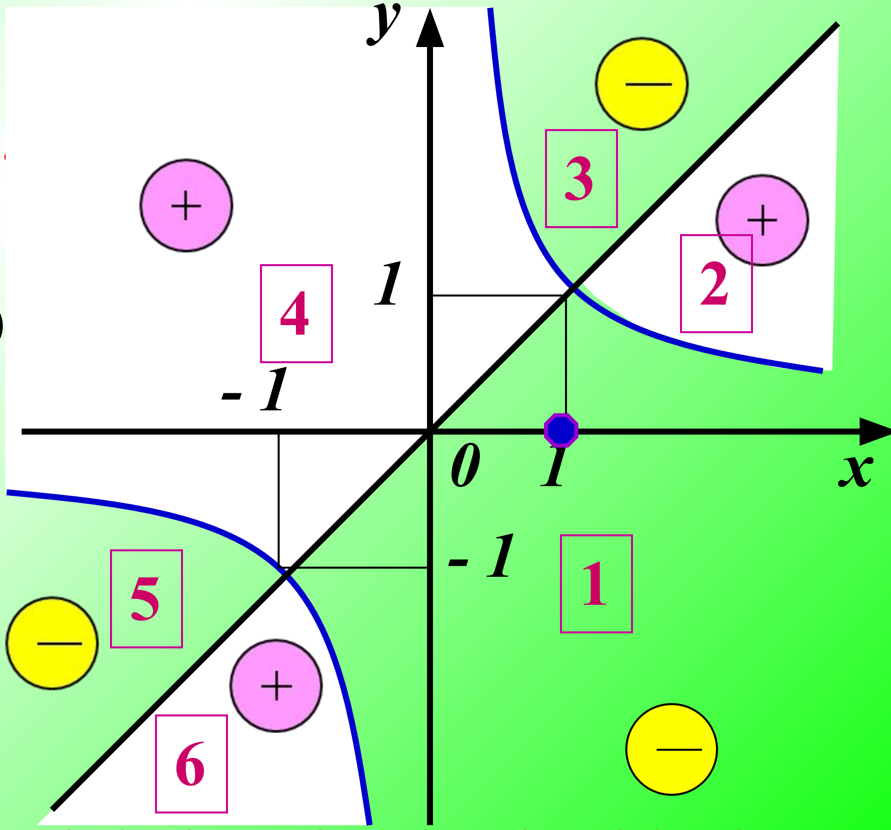
На координатной плоскости изобразите множество точек , координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - y)(x y - 1) \geq 0$

Пример для понимания «метода областей»

Решение. На координатной плоскости нарисуем линии, определяемые равенствами

$x - y = 0$ $(y = x)$ и

$x \cdot y - 1 = 0$ $(y = 1/x)$, которые разбивают плоскость на 6 областей.



При $x = 1$, $y = 0$ левая часть неравенства равна -1(отрицательна)

Следовательно, в 1 области, содержащей точку (1; 0), левая часть неравенства имеет знак минус, а в остальных областях её знаки чередуются.

Ответ: заштрихованные области на рисунке удовлетворяют условию $(x - y)(x y - 1) \geq 0$

Пример для понимания «метода областей»

На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\le 0$

Область определения неравенства: $x^2+y^2-1\ne 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\ne 1$

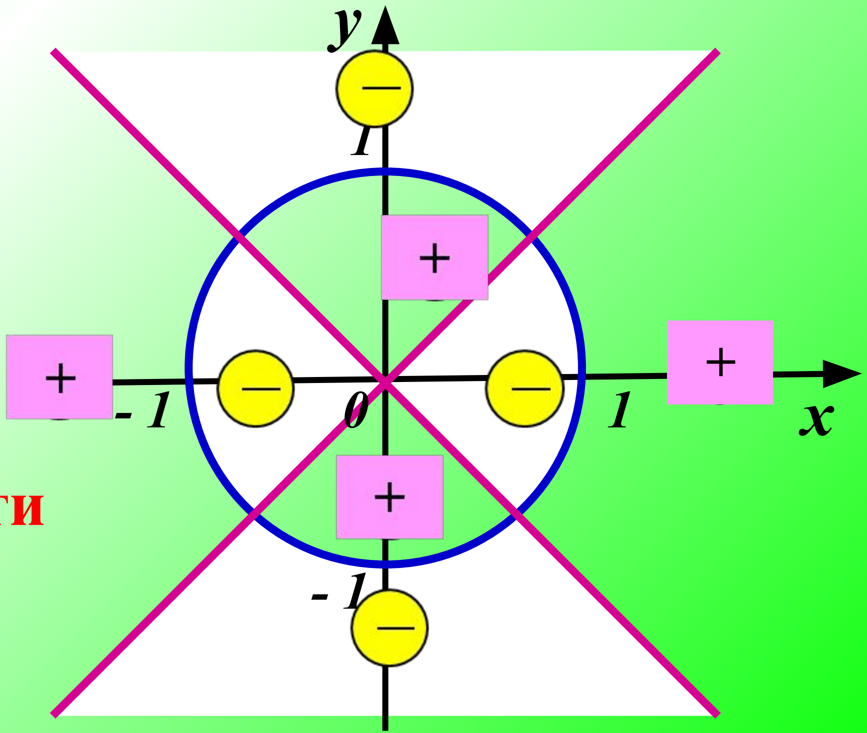
Граничные линии: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow |y|=|x| \quad и \quad x^2+y^2-1=0$

Проводим граничные линии, с учётом области определения

Они разбивают плоскость на 8 областей

Определяем знаки на областях подстановкой в отдельных точках

Ответт: заштрихованные области на рисунке.



Метод областей при решении задач с параметрами

Графический прием

Ключ решения:

Свойства функций

Параметр – «равноправная» переменная ⇒ отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию а = f (x)

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр *а* и одна переменная *х*

Они образуют некоторые аналитические выражения *F* (*x;a*), *G* (*x;a*)

Графики уравнений *F(x;a)*=0,*G(x;a)*=0 строятся несложно

Схема решения:

- **1. Строим графический образ**
- **2. Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси**
- **3. «Считываем» нужную информацию**

Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$

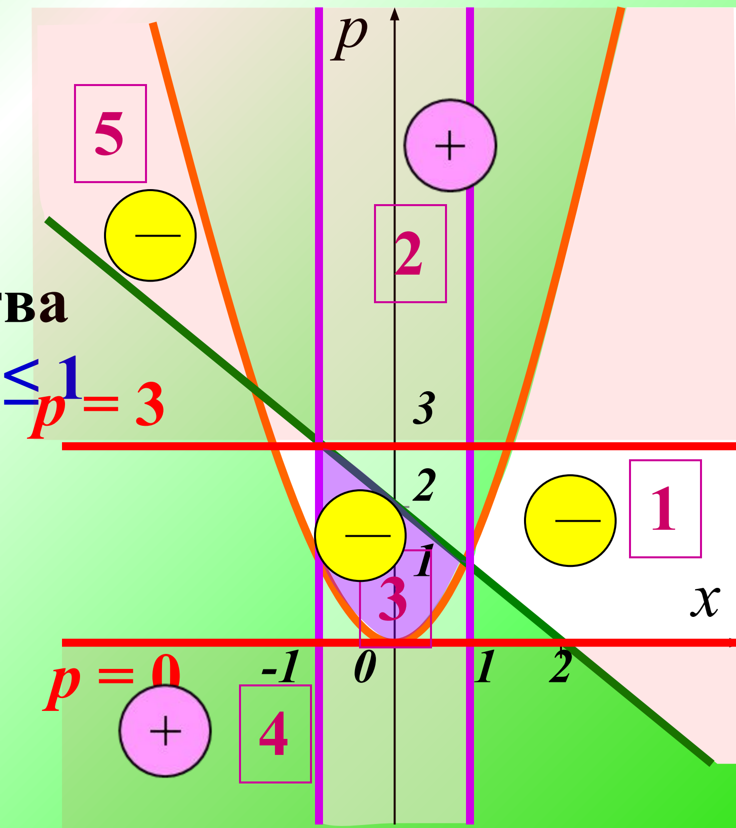
Применим обобщенный метод областей.

1) Построим граничные линии $p = x^2$ **и** $p = 2 - x$

2) Определим знаки в полученных пяти областях, и укажем решение данного неравенства.

3) Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $x^2 \le 1$

$|x| \le 1, \quad -1 < x < 1$



По рисунку легко считываем ответ

При $p \le 0$, $p \ge 3$ в решениях исходного неравенства нет решений неравенства $x^2 \le 1$.

Ответ: $p \le 0$, $p \ge 3$

Сколько решений имеет система в зависимости от параметра *a*?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

решений нет при $a<1$

4 решения при $a=1$

8 решений при $1<a<\sqrt{2}$

4 решения при $a=\sqrt{2}$

решений нет при $a>\sqrt{2}$

Графиком

являетс

окружн

координ

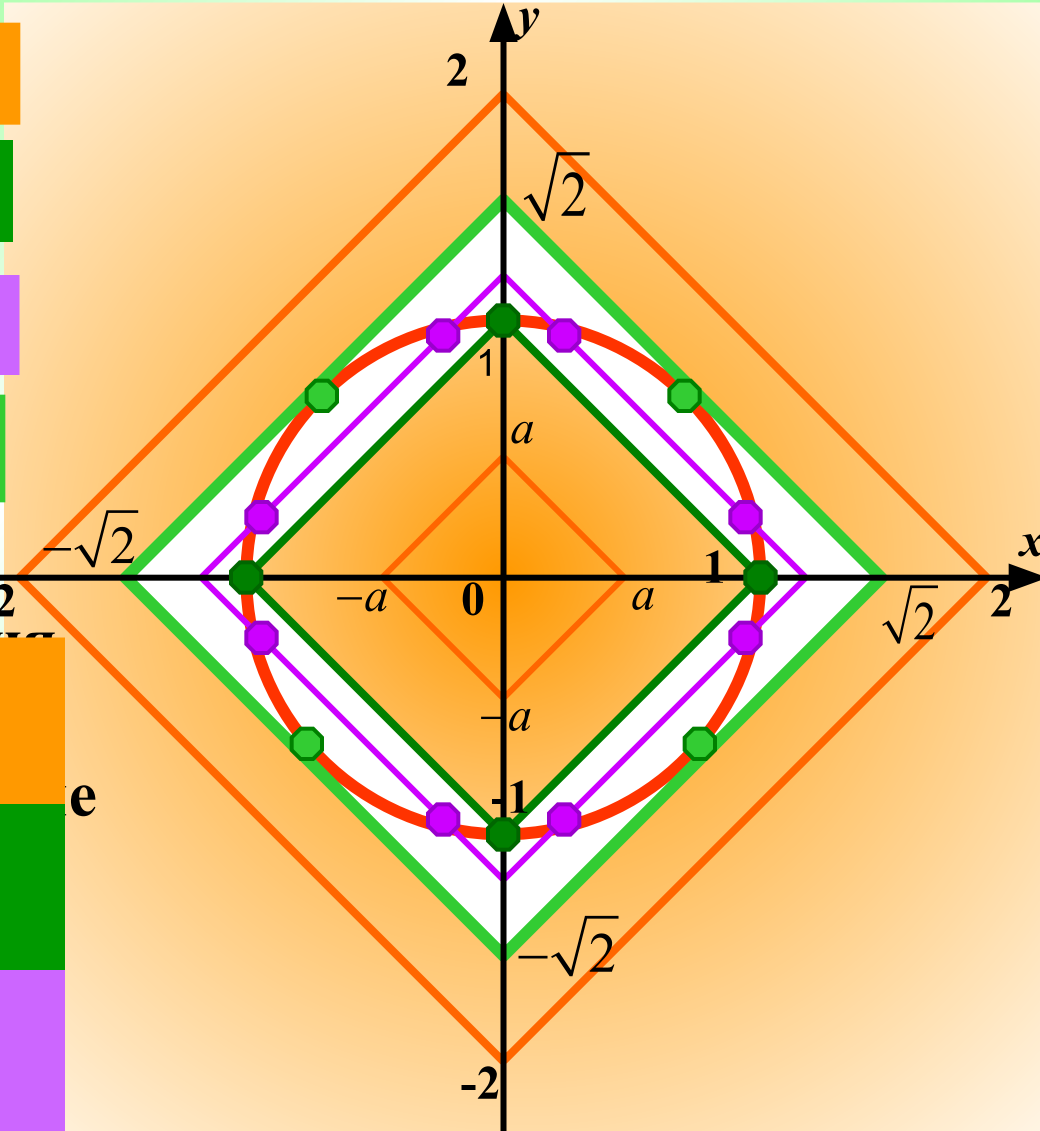
е

Ответ:

решений нет, если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$

4 решения, если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$

8 решений, если $1<a<\sqrt{2}$



При каких положительных значениях параметра *a*, система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases}|4-|x-2||-|y|=0\\ x^2+y^2=a^2+4(x-1)\end{cases}$$

Запишем $\begin{cases}|4-|x-2||=|y|\end{cases}$

решений нет при $a<2\sqrt{2}$.

Построим графики обоих уравнений.

ия:

4 решения при $a=2\sqrt{2}$

$y=|4-|x-2||$ **и симметрично**

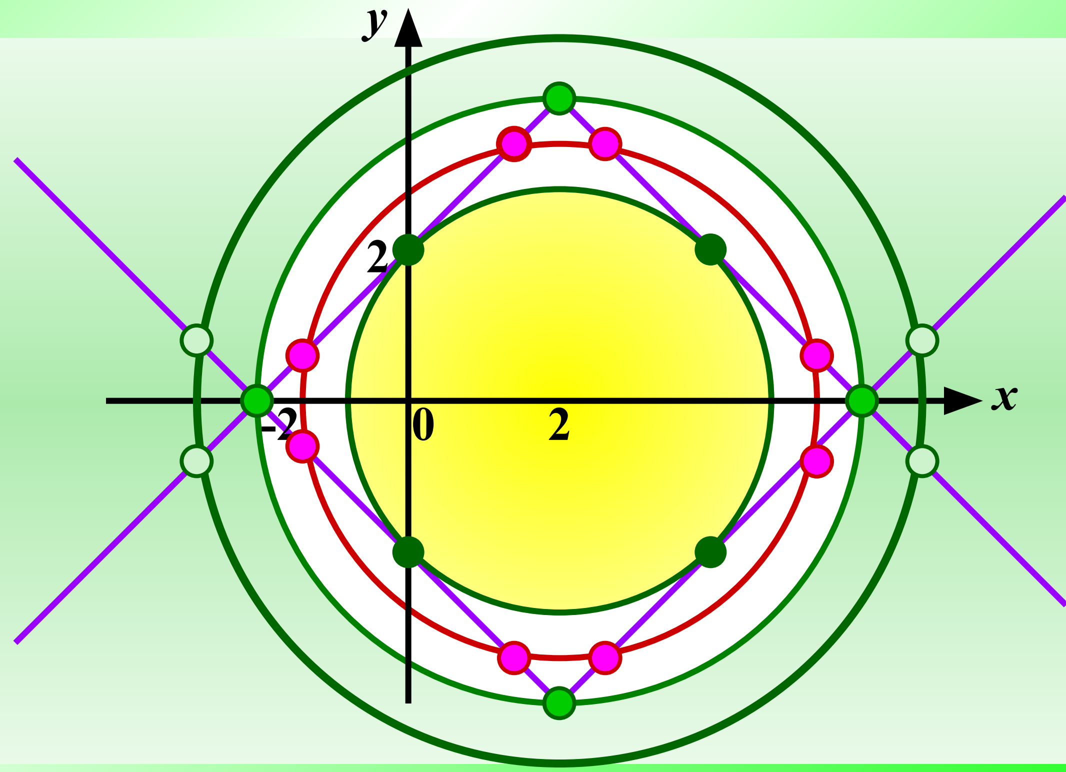
си

8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Второе уравнение задает семейство

и

4 решения при $a\geq 4$



Итак:

при $a<2\sqrt{2}$ **решений нет; при** $a=2\sqrt{2}$ **и** $a\geq 4$ **система имеет 4 решения;**

система имеет 8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Ответ: $a=2\sqrt{2}$ 4 $a\geq$

При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Решение. Рассмотрим сумму данных выражений

$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1$; заметим, $0 \le \cos^2 x \le 1$

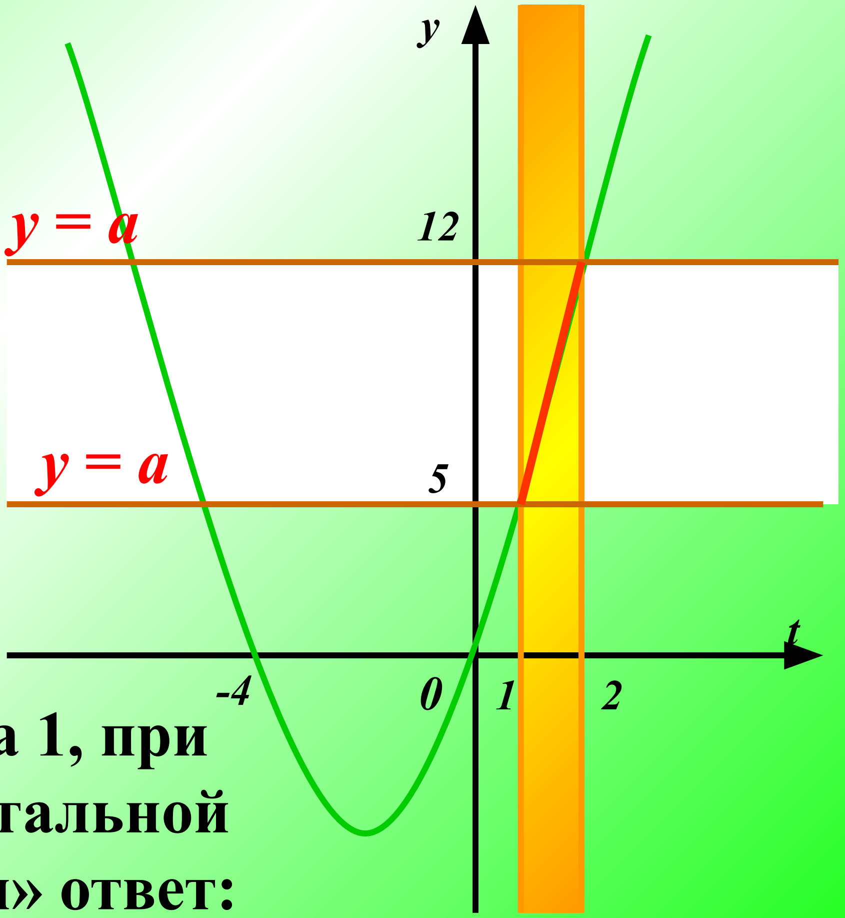
Пусть $\cos^2 x + 1 = t$; $t \in [1; 2]$;

тогда уравнение примет вид

$\log_a(t\cdot(t + 4)) = 1$; откуда

$t^2 + 4t = a$

Построим в прямоугольной системе координат график функции $y(t) = t^2 + 4t$, учитывая, что $t \in [1;2]$ и прямые $y = a$



Сумма данного выражения равна 1, при пересечении параболы с горизонтальной прямой . По рисунку «считываем» ответ:

$5 \le a \le 12$

Ответ: при всех $a \in [5;12]$

Найдите все значения параметра *a*, при которых количество корней уравнения $(5 - a)\,x^3 - 4x^2 + x = 0$ равно количеству общих точек линий $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 5 - |x - 1|$

1 решение при $|a| = 2\sqrt{2}$

нет решение при $|a| < 2\sqrt{2}$

задает неподвижный угол с

2 решения при $2\sqrt{2} < |a| < 3\sqrt{2}$

3 решения при $|a| = 3\sqrt{2}$

4 решения при $3\sqrt{2} < |a| < \sqrt{26}$

3 решения при $|a| = \sqrt{26}$

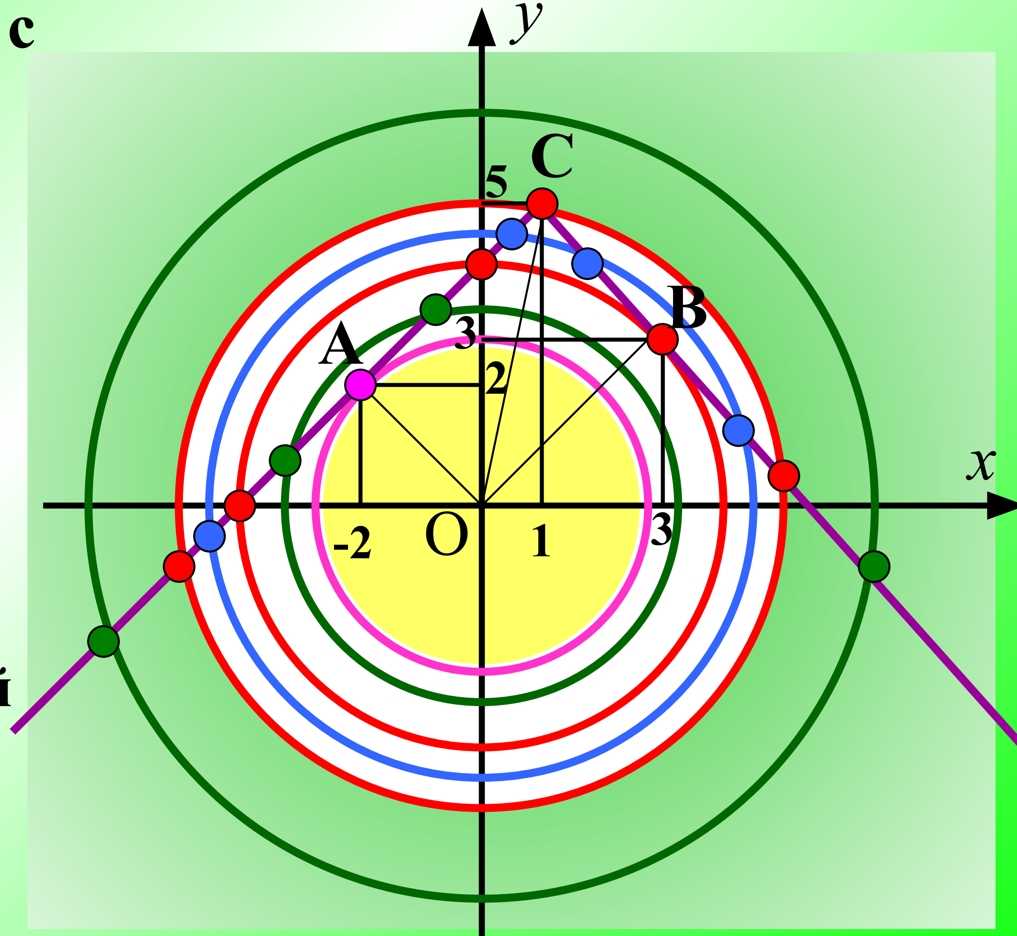
2 реш. при $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$

Построим эскизы этих линий и определим из рисунка количество их общих точек.

$$a_1 = OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$a_2 = OB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$a_3 = OC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$



Запишем первое уравнение в виде $x\,((5-a)x^2-4x+1)=0$

Заметим, что $x = 0$ – корень не зависимо от параметра a.

Уравнение $(5-a)x^2-4x+1=0$ может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра a и $D = 4(a-1)$.

	одно решение	*два решения*	*три решения*
первое уравнение	$a<1$	$a = 5$; $a = 1$	$a>1$
совокупность линий	$a=2\sqrt{2}$ $a=-2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}<a<-2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2}<a<3\sqrt{2},$ $a<-\sqrt{26},\ \ a>\sqrt{26}$	$a=-3\sqrt{2},\ a=-\sqrt{26}$ $a=3\sqrt{2},$ $a=\sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2},\ a=\sqrt{26}$

Ответ: $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2},\ a=\sqrt{26}$