

*Методы решений
заданий С5
(задачи с параметром)*

*Метод областей в
решении задач*

Обобщённый метод областей

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)



Неравенства с
одной
переменной

Метод интервалов:

- 1. Область определения
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.



Неравенства с
двумя
переменными

Метод областей:

- 1. Область определения
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - y)(xy - 1) \geq 0$

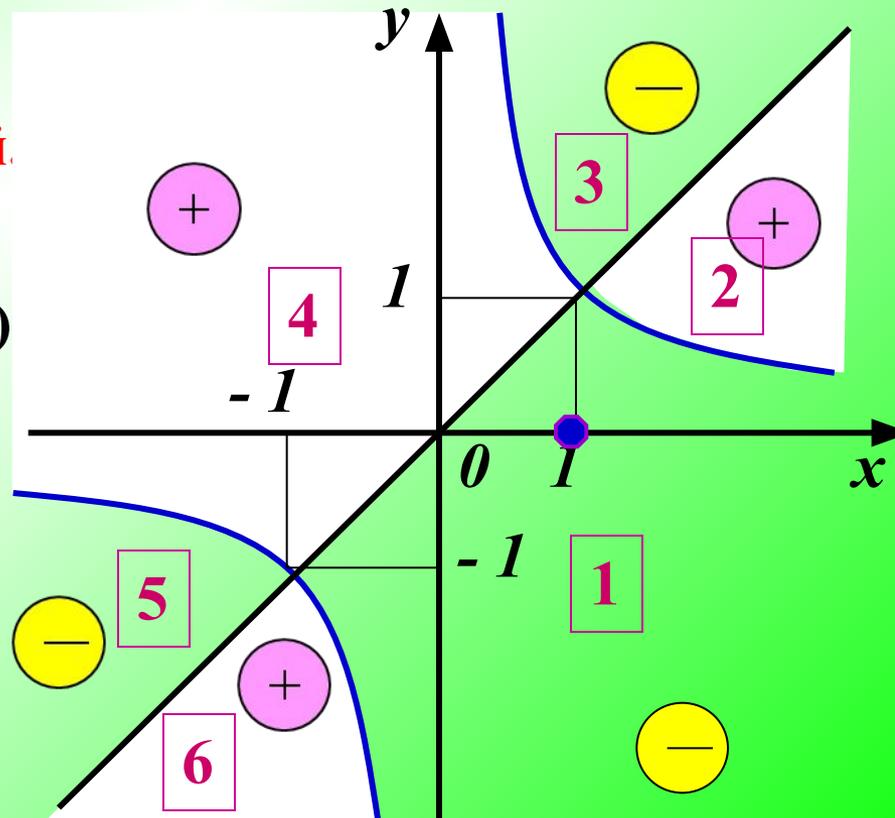
Пример для понимания «метода областей»

Решение. На координатной плоскости нарисуем линии, определяемые равенствами $x - y = 0$ ($y = x$) и $x \cdot y - 1 = 0$ ($y = 1/x$), которые разбивают плоскость **на 6 областей**.

При $x = 1, y = 0$ левая часть неравенства равна -1 (**отрицательна**)

Следовательно, в **1** области, содержащей точку **(1; 0)**, левая часть неравенства имеет знак минус, а в остальных областях её знаки чередуются.

Ответ: заштрихованные области на рисунке удовлетворяют условию $(x - y)(xy - 1) \geq 0$



Пример для понимания «метода областей»

На координатной плоскости изобразите множество точек,

удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$

Область определения неравенства: $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$

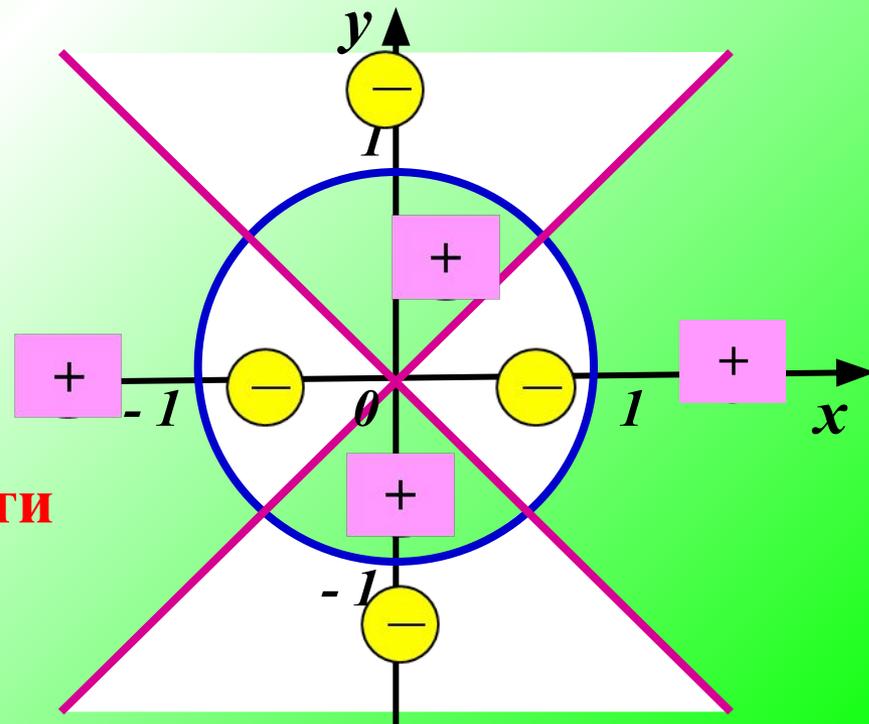
Граничные линии: $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x|$ и $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Проводим граничные линии, с учётом области определения

Они разбивают плоскость
на 8 областей

Определяем знаки на
областях подстановкой в
отдельных точках

Ответ: **заштрихованные области**
на рисунке.



Метод областей при решении задач с параметрами



Параметр – «равноправная» переменная \Rightarrow отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $a = f(x)$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр a и одна переменная x

Они образуют некоторые аналитические выражения $F(x;a), G(x;a)$

Графики уравнений $F(x;a)=0, G(x;a)=0$ строятся несложно

•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема
решения:

Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$

Применим обобщенный метод областей.

1) Построим граничные линии $p = x^2$ и $p = 2 - x$

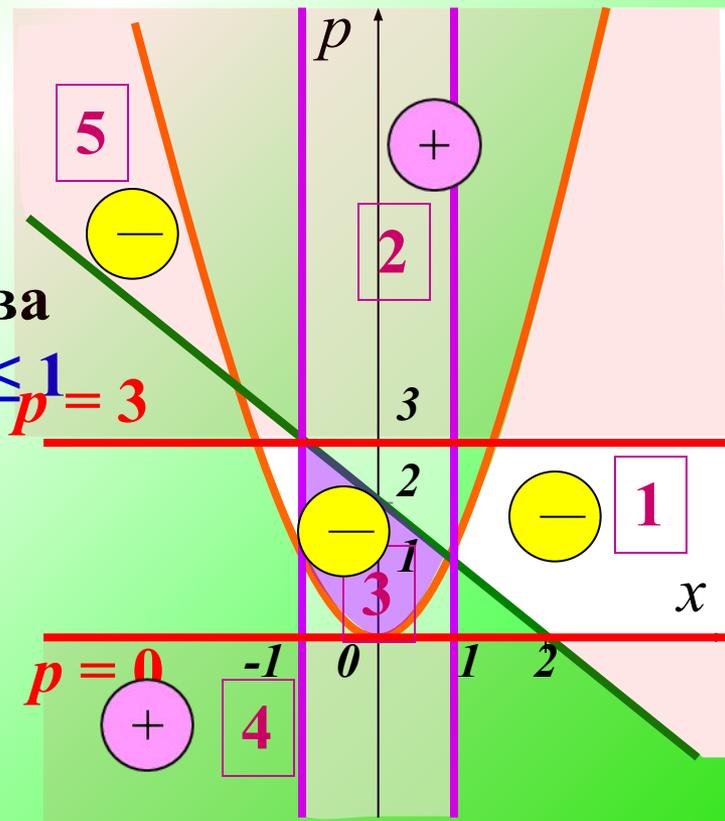
2) Определим знаки в полученных пяти областях, и укажем решение данного неравенства.

3) Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $x^2 \leq 1$

$$|x| \leq 1, \quad -1 < x < 1$$

По рисунку легко считываем ответ

При $p \leq 0$, $p \geq 3$ в решениях исходного неравенства нет решений неравенства $x^2 \leq 1$.



Ответ: $p \leq 0, p \geq 3$

Сколько решений имеет система
в зависимости от параметра a ?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

решений нет при $a < 1$

4 решения при $a = 1$

8 решений при $1 < a < \sqrt{2}$

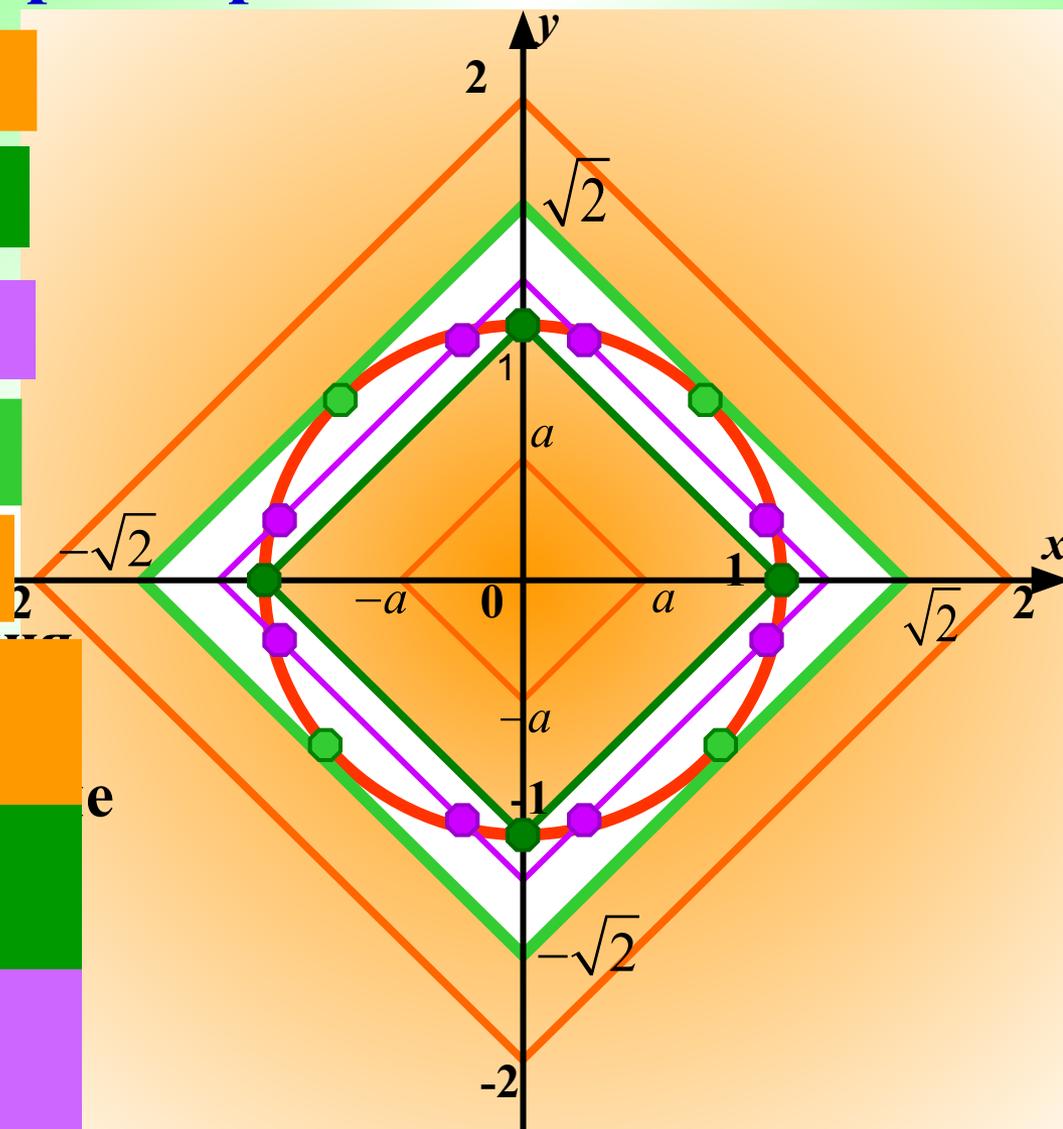
4 решения при $a = \sqrt{2}$

решений нет при $a > \sqrt{2}$

решений нет, если
 $a < 1$ или $a > 2\sqrt{2}$

4 решения, если
 $a = 1$ или $a = 2\sqrt{2}$

8 решений, если
 $1 < a < \sqrt{2}$



При каких положительных значениях параметра a , система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |4 - |x - 2|| - |y| = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4(x - 1) \end{cases}$$

Запишем $|4 - |x - 2|| = |y|$

решений нет при $a < 2\sqrt{2}$.

Построим графики обоих уравнений.

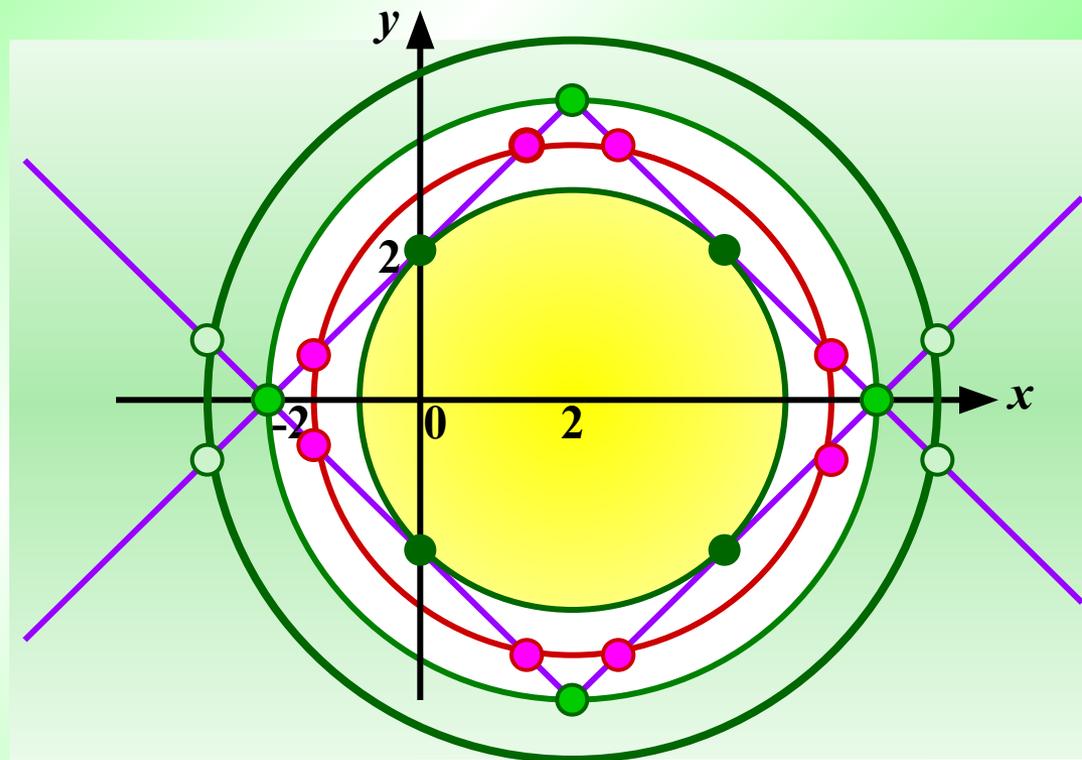
4 решения при $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$.

$y = |4 - |x - 2||$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Второе уравнение задает семейство

4 решения при $a \geq 4$ и



Итак:
при $a < 2\sqrt{2}$ решений нет; при $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$ система имеет 4 решения;
система имеет 8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$

При каких значениях параметра a сумма $\log_a (\cos^2 x + 1)$ и $\log_a (\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x ?

Решение. Рассмотрим сумму данных выражений

$$\log_a (\cos^2 x + 1) + \log_a (\cos^2 x + 5) = 1; \text{ заметим, } 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

Пусть $\cos^2 x + 1 = t$; $t \in [1; 2]$;
тогда уравнение примет вид

$$\log_a (t \cdot (t + 4)) = 1; \text{ откуда}$$

$$t^2 + 4t = a$$

Построим в прямоугольной системе координат график

функции $y(t) = t^2 + 4t$,

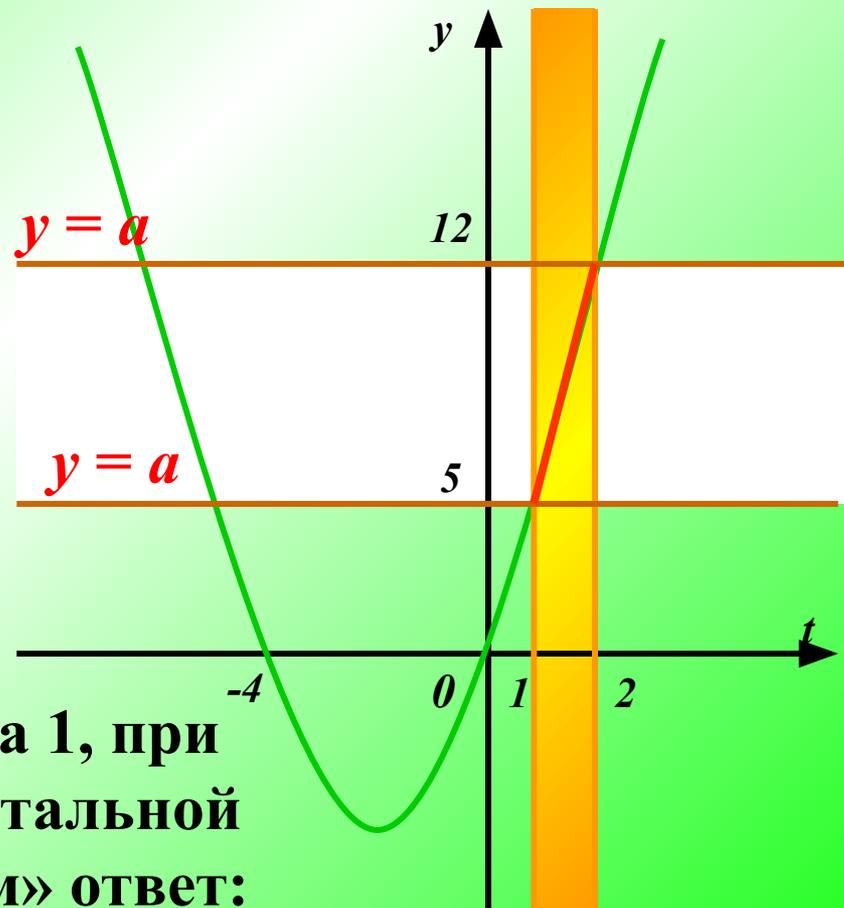
учитывая, что $t \in [1; 2]$

и прямые $y = a$

Сумма данного выражения равна 1, при пересечении параболы с горизонтальной прямой. По рисунку «считываем» ответ:

$$5 \leq a \leq 12$$

Ответ: при всех $a \in [5; 12]$



Найдите все значения параметра a , при которых количество корней уравнения $(5 - a)x^3 - 4x^2 + x = 0$ равно количеству общих точек линий $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 5 - |x - 1|$

1 решение при $|a| = 2\sqrt{2}$

задает неподвижный угол с

2 решения при $2\sqrt{2} < |a| < 3\sqrt{2}$

3 решения при $|a| = 3\sqrt{2}$

4 решения при $3\sqrt{2} < |a| < \sqrt{26}$

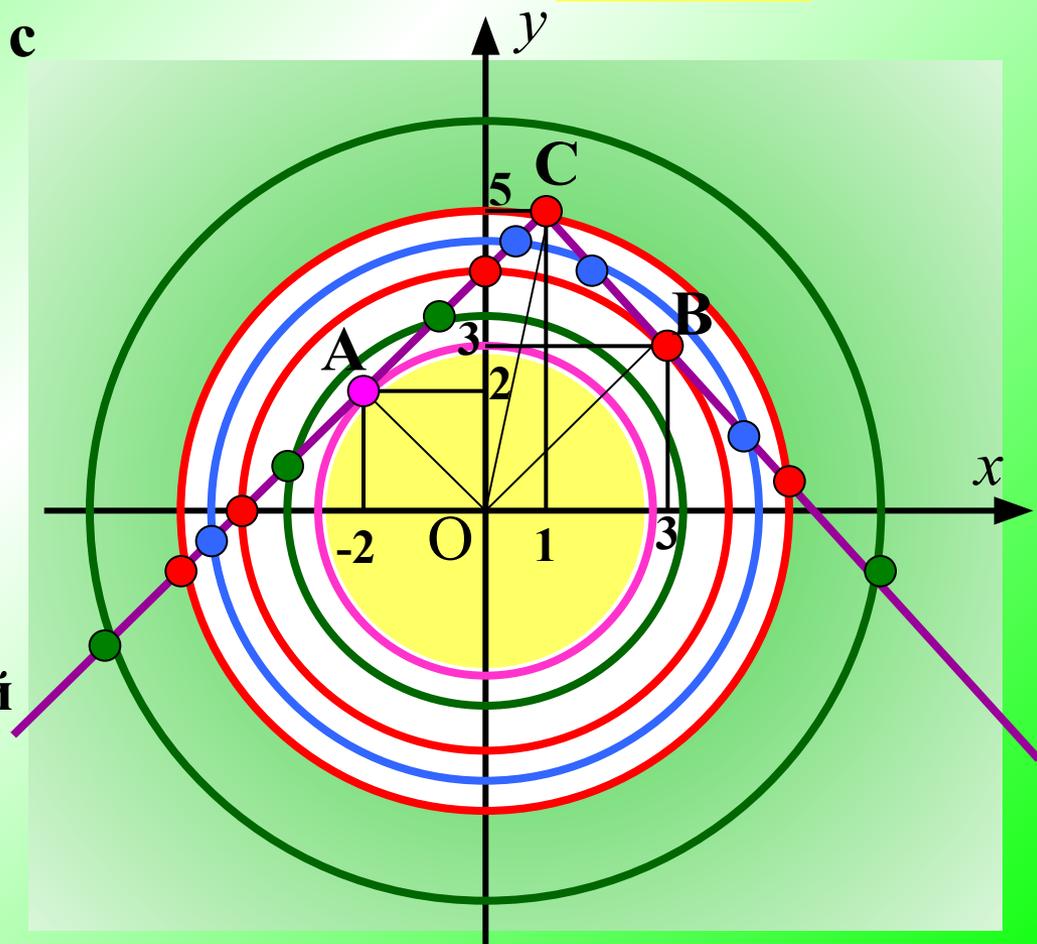
3 решения при $|a| = \sqrt{26}$

2 реш. при $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$

Построим эскизы этих линий и определим из рисунка количество общих точек.

$$a_3 = OC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

нет решение при $|a| < 2\sqrt{2}$



Запишем первое уравнение в виде $x(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$

Заметим, что $x = 0$ – корень не зависимо от параметра a .

Уравнение $(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$ может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра a и $D = 4(a - 1)$.

	<i>одно решение</i>	<i>два решения</i>	<i>три решения</i>
<i>первое уравнение</i>	$a < 1$	$a = 5; a = 1$	$a > 1$
<i>совокупность линий</i>	$a = 2\sqrt{2}$ $a = -2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < a < -2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2},$ $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$	$a = -3\sqrt{2}, a = -\sqrt{26}$ $a = 3\sqrt{2},$ $a = \sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$

Ответ: $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$