

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ
РАБОТА
по математике:

СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Исполнитель: Лукин Николай Сергеевич
МОУ СОШ №21, г. Подольск

Научный руководитель: Буянова Анна
Матвеевна

учитель математики МОУ СОШ №21, г.
Подольск

2011

год

Цел

Рассмотреть решение квадратных, кубических и биквадратных уравнений;

Делимость многочленов;

Деление многочленов с остатком;

Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени;

Симметрические и возвратные уравнения;

формулы Виета, Горнера и Безу.

Применить полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.

КВАДРАТНОЕ

УРАВНЕНИЕ

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ называется квадратным уравнением,

где x – переменная, a , b и c – некоторые числа, причем, $a \neq 0$.

Чтобы найти корни квадратного уравнения вида: $ax^2+bx+c=0$, нужно найти его дискриминант.

Дискриминант находится по формуле: $D=b^2-4ac$.

ЕСЛ

$D > 0$, то уравнение имеет два корня.

И:

$D = 0$, то уравнение имеет один корень.

$D < 0$, то уравнение не имеет корней.

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что сумма равна p , а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Частные случаи при решении квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

1) Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

2) Если $a+c=b$, то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

Пример: $2x^2-3x+1=0$,

$$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}.$$

$$2x^2+3x+1=0,$$

$$x_1=-1, x_2=-\frac{1}{2}.$$

БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнения вида $x^4+bx^2+c=0$ будем называть биквадратными уравнениями.

Первый способ:

Биквадратное уравнение можно заменой $y=x^2$ свести к квадратному уравнению $y^2+by+c=0$.

Пример. Решить уравнение $x^4-10x^2+1=0$.

Решение. Пусть $y=x^2$, $y^2-10y+1=0$, тогда $y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$.

Решив совокупность неполных квадратных уравнений $x^2=5+\sqrt{24}$ и $x^2=5-\sqrt{24}$, получим ответ.

Ответ: $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$.

Можно действовать иначе.

Второй способ.

Разделим обе части уравнения на x^2 . Получим:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 10 = 0, \quad x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 12 = 0, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12, \quad \text{откуда } x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{12}.$$

Решим полученные уравнения::

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = \sqrt{12}, \quad x^2 - \sqrt{12}x + 1 = 0, \quad x_{1,2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}.$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = -\sqrt{12}, \quad x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0, \quad x_{3,4} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}.$$

СИММЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Свойства симметрического уравнения

1) Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$,
в чем можно убедиться непосредственной подстановкой

2) Уравнение четной степени $2n$ с помощью подстановки $u = x + \frac{1}{x}$
сводится к уравнению степени n .

Пример симметрического уравнения

Решить уравнение :

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$$

Решение. Заметим, что $x=-1$ - корень исходного уравнения. Пусть $x \neq -1$.

Разделим левую часть уравнения на $x+1$ и получим

симметрическое уравнение четвертой степени:

$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$. *Разделим обе части уравнения на x^2 :*

$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$. *Сгруппируем члены уравнения:*

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$. Пусть теперь $t = x + \frac{1}{x}$,

тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, и после преобразований

получим квадратное уравнение:

$$2t^2 + 3t - 20 = 0.$$

Корни квадратного уравнения: $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = -4$.

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени равносильно совокупности уравнений

$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ и $x + \frac{1}{x} = -4$. *Решив уравнение, получим еще четыре корня исходного уравнения.*

Ответ: $-1, -2 \pm \sqrt{3}, 2, \frac{1}{2}$.

ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_n x^{n+1} + a_{n+1} x^n + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

называют возвратными уравнениями нечетной степени, если

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0} = \lambda^{n+1}, \frac{a_{2n}}{a_1} = \lambda^n, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

где λ - некоторое действительное число.

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

называют возвратными уравнениями четной степени, если

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = \lambda^n, \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \lambda^{n-1}, \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \lambda$$

Свойства возвратного уравнения

1) Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -\lambda$
в чем можно убедиться подстановкой;

2) Уравнение четной степени $2n$ с помощью

подстановки $u = x + \frac{\lambda}{x}$ сводится к уравнению степени n .

ПРИМЕР ВОЗВРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решить уравнение:

$$3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$$

Решение: Разделим обе части уравнения на x^2 и сгруппируем члены уравнения:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0, 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$$

Обозначим $x + \frac{2}{x} = p$, тогда $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = p^2$ и $x^2 + \frac{4}{x^2} = p^2 - 4$

Получим уравнение $3(p^2 - 4) - 2p + 4 = 0$, откуда $3p^2 - 2p - 8 = 0$ и $p_1 = 2$, $p_2 = -\frac{4}{3}$

Уравнения $x + \frac{2}{x} = 2$ и $x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3}$ корней не имеют, следовательно, исходное уравнение

также не имеет корней.

Ответ: корней нет.

ТЕОРЕМА I

*Если x_0 - корень уравнения $f(x) = 0$,
где $f(x)$ - многочлен степени n , то $f(x) = (x-x_0) \cdot g(x)$,
причем $g(x)$ - многочлен степени $n-1$.*

Доказательство. Покажем, что $f(x)$ можно представить в виде $(x-x_0) \cdot g(x)$.

Пусть $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и x_0 - корень уравнения $f(x) = 0$, тогда $f(x_0) = 0$, и

$$f(x) - f(x_0) = f(x) = a_0(x^n - x_0^n) + \dots + a_{n-1}(x - x_0).$$

Поскольку

$$x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}),$$

То в правой части равенства можно вынести за скобки выражение $x-x_0$,

а выражение в скобках x - многочлен степени $n-1$.

ТЕОРЕМА II

Если x_0 - целый корень уравнения $f(x) = 0$,
где $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами,
свободный член которого не равен 0,
то x_0 - делитель свободного члена.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $f(x_0) = 0$.

То есть $a_0x_0^n + \dots + a_{n-1}x_0 = -a_n$, откуда следует, что $-(a_0x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1})x_0 = a_n$, что означает,
что x_0 - делитель a_n .

Пример

Найдите целые корни уравнения

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$$

Делители свободного члена : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

при $x = 1, 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 - 18 \neq 0$;

при $x = -1, -1^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot (-1) - 18 \neq 0$;

при $x = 2, 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 18 = 0$;

при $x = -2, -2^4 - 4 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 21 \cdot (-2) - 18 \neq 0$;

при $x = 3, 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 - 18 = 0$;

при $x = -3, -3^4 - 4 \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + 21 \cdot (-3) - 18 \neq 0$;

при $x = 6, 6^4 - 4 \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 + 21 \cdot 6 - 18 \neq 0$;

при $x = -6, -6^4 - 4 \cdot (-6)^3 - 2 \cdot (-6)^2 + 21 \cdot (-6) - 18 \neq 0$;

при $x = 9, 9^4 - 4 \cdot 9^3 - 2 \cdot 9^2 + 21 \cdot 9 - 18 \neq 0$;

при $x = -9, -9^4 - 4 \cdot (-9)^3 - 2 \cdot (-9)^2 + 21 \cdot (-9) - 18 \neq 0$;

при $x = 18, 18^4 - 4 \cdot 18^3 - 2 \cdot 18^2 + 21 \cdot 18 - 18 \neq 0$;

при $x = -18, -18^4 - 4 \cdot (-18)^3 - 2 \cdot (-18)^2 + 21 \cdot (-18) - 18 \neq 0$;

Если x_0 - корень уравнения $f(x) = 0$,

где $f(x)$ - многочлен степени n ,

то $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, причем $g(x)$ - многочлен степени $n-1$.

$$f(x) : (x - x_0) = g(x)$$

И дальше находить корни многочлена $g(x)$.

Пример

Решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$$

Зная, что уравнение $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$, имеет корни $x=2$ и $x=3$

я понизил степень многочлена делением уголком на $x-2$ и $x-3$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0 & x-2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 - 2x^2 - 6x + 9 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 & \\ \hline -2x^3 + 4x^2 & \\ \hline -6x^2 + 21x & \\ \hline -6x^2 + 12x & \\ \hline 9x - 18 & \\ \hline 9x - 18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0 & x-3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & x^2 + x - 3 \\ \hline x^2 - 6x & \\ \hline x^2 - 3x & \\ \hline -3x + 9 & \\ \hline -3x + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Решим квадратное уравнение $x^2 + x - 3 = 0$

$$D=13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}; 2; 3.$$

СХЕМА ГОРНЕРА

При делении многочлена n -й степени $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на многочлен первой степени $x-c$ удобен метод сокращенного деления (называемый схемой Горнера).

Он получается как следствие определения операции деления многочленов, из которого следует, что при делении многочлена n -й степени на линейный многочлен $x-c$ в остатке может получиться либо многочлен нулевой степени (т.е. отличное от нуля число), либо нуль, а степень частного равна $n-1$.

Пусть частное многочленов $P(x)$ и $x-c$ имеет вид

$$G(x) = \alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}$$

а остаток $R(x)$ равен числу β основании формулы $P(x) = Q(x) \cdot G(x)$ имеем

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x-c)(\alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}) + \beta. \quad (1)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в правой части равенства (1), из условия равенства многочленов получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \beta:$$

$$\alpha_0 = a_0,$$

$$\alpha_1 = a_1 + c\alpha_0,$$

$$\alpha_2 = a_2 + c\alpha_1,$$

.....

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + c\alpha_{n-2},$$

$$\beta = a_n + c\alpha_{n-1}.$$

Эту таблицу называют схемой Горнера.

ТЕОРЕМА БЕЗУ

Первое уравнение системы дает значение $\alpha_0 = a_0$

Подставляя это значение во второе уравнение системы, получаем $\alpha_1 = a_1 + c\alpha_0$

Подставляя полученное значение α_1 в третье уравнение системы, получаем значение α_2 и т.д. Последним будет найдено выражение для остатка β

$$\beta = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \dots + a_{n-1}c + a_n.$$

Это равенство известно под названием теоремы Безу.

$$\text{Многочлен } a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a$$

при делении $x-c$ дает остаток, равный значению этого многочлена при $x = c$.

Пример

Найдем корни многочлена $x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 = 0$

Корнями могут быть $-1; 1; 3; -3$. Чертим схему Горнера.

	1	-1	-6	14	-11	3	
-1	1	-2	-4	18	-29	$\neq 0$	
1	1	0	-6	8	-3	0	$x_1=1$
1	1	1	-5	3	0		$x_2=1$
1	1	2	-3	0			$x_3=1$
1	1	3	0				$x_4=1$
1	1	$\neq 0$					
3	1	$\neq 0$					
-3	1	0					$x_5=-3$
-3	$\neq 0$						

1 - корень кратности 4.

Ответ: 1; -3.

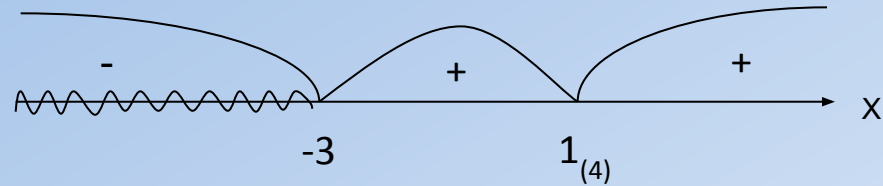
Теперь я могу разложить левую часть на множители.

$$\text{Получается } (x-1)^4 \cdot (x+3)$$

Зная, как находить корни многочлена, можно решать неравенства. Например, это

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 \leq 0$$

$$(x-1)^4 \cdot (x+3) \leq 0$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -3] \cup \{1\}$$

	1	-7	17	-17	6	
1	1	-6	11	-6	0	$x_1=1$
1	1	-5	6	0		$x_2=1$
1	1	-4	$\neq 0$			
1	1	-6	$\neq 0$			
2	1	-3	0			$x_3=2$
2	1	$\neq 0$				
-2	1	$\neq 0$				
3	1	0				$x_4=3$

Еще я научился составлять уравнения.

Например, я составил уравнение с корнями 1,1,2,3

и решил его по схеме Горнера.

$$(x-1)^2 \cdot (x-2)(x-3) = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$$

Корнями могут быть -1;1;2;-2;3;-3;6;-6.

Ответ: 1;1;2;3.

ФОРМУЛЫ ВИЕТА

Если $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$, то x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Оказывается между корнями c_1, c_2, \dots, c_n многочлена n -й степени

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

со старшим коэффициентом,

равным единице (каждый корень взят такое число раз, какова его кратность),

существуют зависимости, называемые *Формулами Виета*:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{n-2} + c_n = -a_1 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n = a_2 \\ c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -a_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_1c_2c_3 \dots c_{n-1}c_n = (-1)^n a_n \end{cases}$$

Решение алгебраических уравнений 3-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1)

Где a, b, c - действительные числа.

Введение подстановки $x = \left(y - \frac{a}{3}\right)$ уравнение (1) сводится к каноническому виду:

$$y^3 + y \cdot \left(b - \frac{a^2}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c = 0. \quad (2)$$

Используя обозначения $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$, приводим уравнение (2) к виду:

$$y^3 + py + q = 0. \quad (3)$$

Введем новую подстановку $y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p \cdot \left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0. \text{ Произведя преобразования, получим:}$$

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0, \text{ или } z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

Окончательно получаем уравнение

$$z^6 + qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет корни

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Отсюда

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (5)$$

Следовательно,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \quad (6)$$

Избавимся от иррациональности во втором члене выражения (6):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Произведя преобразования, получим известную формулу Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (7)$$

$$\text{Где } p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c, \quad y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$$

Использование второго значения z , которое дает выражение (5) со знаком "минус", приводит к получению аналогичного выражения (7).

Решение алгебраических уравнений 4-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$ (8)

Подстановкой $x = y - \frac{a}{4}$ уравнение (8) приведем к виду:

$$y^4 + py + qy + r = 0 \quad (9)$$

Для того чтобы найти, чему равны коэффициенты p , q и r , представим выражение в левой части уравнения (9) в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + \alpha y + \beta + \gamma) \cdot (y^2 - \alpha y + \beta - \gamma). \quad (10)$$

Перемножив квадратные трехчлены и произведя преобразования, получим следующее уравнение:

$$y^4 + (2\beta - \alpha^2)y^2 - 2\alpha\gamma y + \beta^2 - \gamma^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) тождественны, следовательно, коэффициенты при равных степенях неизвестного у равны, что дает право составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha^2 = p \\ -2\alpha\gamma = q \\ \beta^2 - \gamma^2 = r \end{cases} \quad (12)$$

Из первого уравнения системы выразим коэффициент β :

$$\beta = \frac{p + \alpha^2}{2}$$

Из второго уравнения выразим коэффициент γ

$$\gamma = -\frac{q}{2\alpha}.$$

Подставив полученные выражения для β и γ уравнение системы, получим

$$\left(\frac{p + \alpha^2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{q}{2\alpha}\right)^2 = r, \quad \frac{p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^4}{4} - \frac{q^2}{4\alpha^2} = r.$$

Произведя преобразования, приведем к уравнению

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0,$$

Которое сводится к кубическому подстановкой $\alpha^2 = t$:

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0. \quad (13)$$

Решив данное уравнение, найдем значения коэффициентов α , β и γ :

$$\alpha = \pm\sqrt{t}, \quad \beta = \frac{p+t}{2}, \quad \gamma = -\frac{q}{2\sqrt{t}} \quad (14)$$

Теперь возможно найти значения коэффициентов при степенях u в выражении (10):

$$\alpha = \pm\sqrt{t_1}, \quad \beta + \gamma = \frac{p+t_1 - \frac{q}{\sqrt{t_1}}}{2}, \quad \beta - \gamma = \frac{p+t_1 + \frac{q}{\sqrt{t_1}}}{2},$$

где t_1 - действительный положительный корень уравнения (13).

Таким образом доказано, что уравнение (9) может быть разложено на два квадрат ных уравнения :

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{t_1} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left(p + t_1 - \frac{q}{\sqrt{t_1}} \right) = 0 \\ y^2 - \sqrt{t_1} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left(p + t_1 + \frac{q}{\sqrt{t_1}} \right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной системы уравнений дает значения четырех корней уравнения (9).

Пример:

Решить уравнение

$$y^4 - 27y^2 + 14y + 120 = 0$$

В данном уравнении $p = -27$, $q = 14$, $r = 120$. Подставим значения p , q и r в уравнение (13):

$$t^3 + 2(-27)t^2 + ((-27)^2 - 4 \cdot 120)t - 14^2 = 0.$$

Произведя преобразования, получим уравнение третьей степени:

$$t^3 - 54t^2 + 249t - 196 = 0.$$

которое имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, $t_3 = 49$.

Подставив эти значения в систему (15), получим три разложения исходного уравнения:

$$\begin{cases} (y^2 + y - 20) \cdot (y^2 - y - 6) = 0 \\ (y^2 + 2y - 15) \cdot (y^2 - 2y - 8) = 0 \\ (y^2 + 7y + 10) \cdot (y^2 - 7y + 12) = 0 \end{cases}$$

Решение каждой пары уравнений последней системы дает следующие корни:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = -2, \quad y_4 = -5.$$

Определить все значения a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Решение:

Пусть q - знаменатель геометрической прогрессии и x_1, x_2, x_3 – корни кубического уравнения. Тогда корни связаны соотношением $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -(a^2 - 15a) \\ x_1 \cdot x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 216 \end{cases}$$

Т.е. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 216$, то $(qx_1)^3 = 216$, т.е. $x_1^3 = 216$,

$x_1 = 6$ запишем т. Виета для $x_1 = \frac{x_2}{q} = \frac{6}{q}$, $x_2 = 6$, $x_3 = x_2q = 6q$

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = -(a^2 - 15a) & (1) \\ 36\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = 12a & (2) \\ x_2 = 6 & (3) \end{cases}$$

Ясно, что $a \neq 0$ т.к. иначе уравнение $q+1+\frac{1}{q}=0$ решений не имеет и следовательно,

этот случай противоречит условию существования трех различных корней.

$$\text{Из (1) и (2) } 2a=15a-a^2, 15-a=2, a=13$$

$$\text{Из (2) } q+1+\frac{1}{q}=\frac{a}{3};$$

$$q+1+\frac{1}{q}=\frac{13}{3};$$

$$q^2-\frac{10}{6}q+1=0$$

$$D=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$q=\frac{1}{3}, q=3$$

1) $q=3$, тогда $x_1=2, x_2=6, x_3=18$

2) $q=\frac{1}{3}$, тогда $x_1=18, x_2=6, x_3=2$

Ответ: $a=13$, корни 2, 6, 18.

$$2ax^4 + 8x^3 + (a + 2a^3)x^2 + 4x + a^3 > 0$$

При каждом значении a решить неравенство

Решение: Разложим на множители левую часть:

$2x^2(ax^2 + 4x + a^3) + (ax^2 + 4x + a^3) > 0$; $(2x^2 + 1) \cdot (ax^2 + 4x + a^3) > 0$. Т.к. $2x^2 + 1 > 0$ для любого $x \in R$, то $ax^2 + 4x + a^3 > 0$.

(x_a, y_a) – вершина параболы. $D = 16 - 4a^2 = 4(4 - a^2) = 4(2 - a^2)(2 + a^2)$.

Пусть $a=0$, тогда $x > 0$. При $a \neq 0$ функция $f(x) = ax^2 + 4x + a^3$

квадратный трехчлен, его график – парабола. Рассмотрим три случая в зависимости от знака

$D = 16 - 4a^2 = 4(4 - a^2)$ при $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1) Пусть $D = 4(4 - a^2) < 0$.

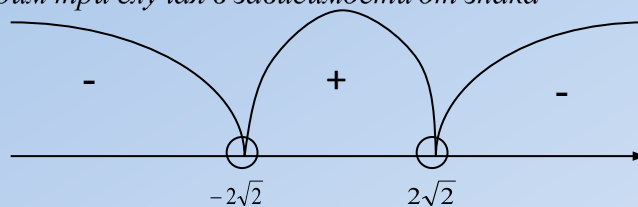
$$4(2 - a^2)(2 + a^2) < 0$$

$$(\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) < 0$$

$a \notin (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. Тогда в зависимости от знака a функция $f(x)$, будет всюду положительна, либо всюду отрицательна.

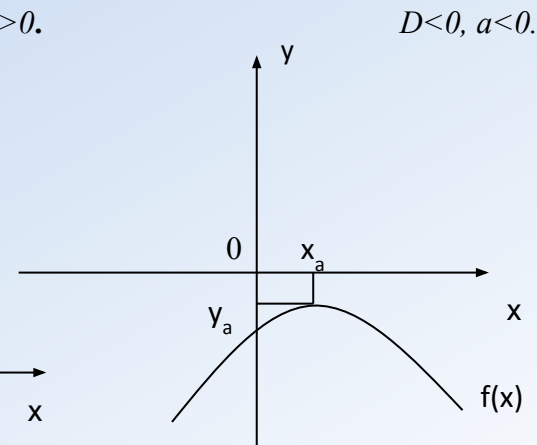
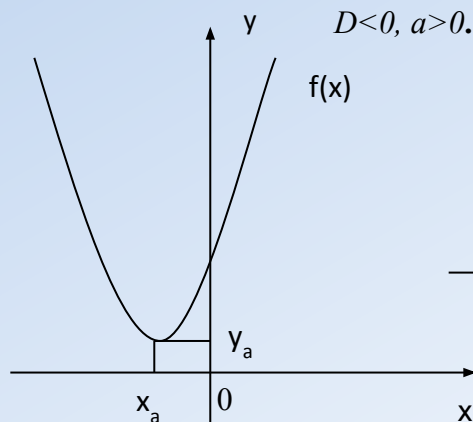
Для $a > 0$, точнее для $a \notin (\sqrt{2}; +\infty)$, получаем $f(x) > 0$ для $x \in R$.

Для $a < 0$ $f(x) < 0$ для $x \in R$.



у

Частичный ответ: при $a \leq -\sqrt{2}$ – решений нет;
при $a > \sqrt{2}$, то $x \notin (-\infty; +\infty)$.



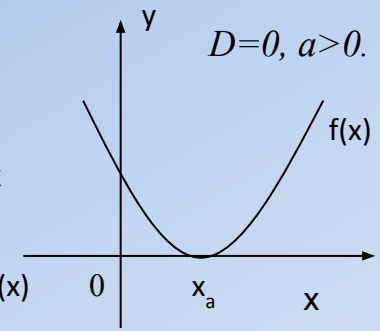
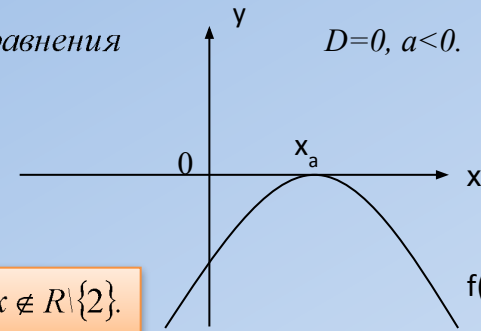
2) Пусть $D = 4(4 - a^4) = 0$, т.е. $a = \pm\sqrt{2}$. Тогда у квадратного уравнения

$f(x) = 0$ будет единственный корень. $x_0 = -\frac{2}{a}$;

Для $a > 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$.

Для $a < 0$ получаем $f(x) \leq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Частичный ответ: при $a = -\sqrt{2}$ – решений нет; при $a = \sqrt{2}$, то $x \notin \mathbb{R} \setminus \{2\}$.



3) Пусть $D = 4(4 - a^4) > 0$, т.е. $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Тогда у квадратного уравнения $f(x) = 0$ будет два решения:

$$x_+ = \frac{-4 + 2\sqrt{4 - a^4}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; \quad x_- = \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}.$$

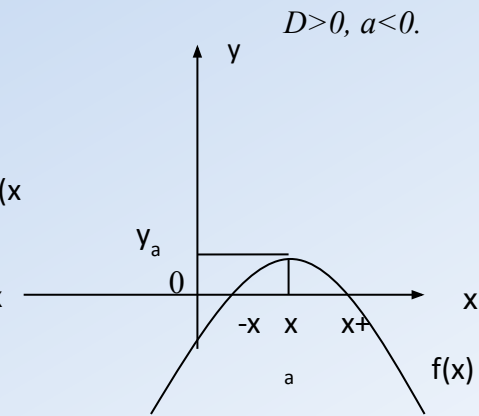
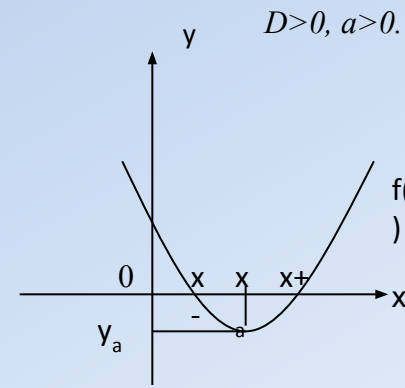
Для $a > 0$ получаем $f(x) > 0$ для $x \in (-\infty; x_-) \cup (x_+; +\infty)$.

Для $a < 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in (x_+; x_-)$.

Частичный ответ:

если $0 < a < \sqrt{2}$; то $x \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}; \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; +\infty\right)$

если $-\sqrt{2} < a < 0$; то $x \in \left(-\infty; \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}; +\infty\right)$



Объединим частичные ответы, получим ответ.

Ответ: При $a \leq -\sqrt{2}$ решений нет,

при $-\sqrt{2} \leq a < 0$, $x \in \left(\frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right)$; при $a = 0$; $x \in (0; +\infty)$; при $0 < a \leq \sqrt{2}$, $x \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2}; +\infty\right)$;

при $a > \sqrt{2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

ВЫВОД:

В своей работе я рассмотрел, изучил и опробовал на примере одиннадцать способов решения уравнений .

Упростил запись и ход решения схемы Горнера.

И я считаю, что нужно знать хотя бы самые простые способы решения уравнений высших степеней.

Применил полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.