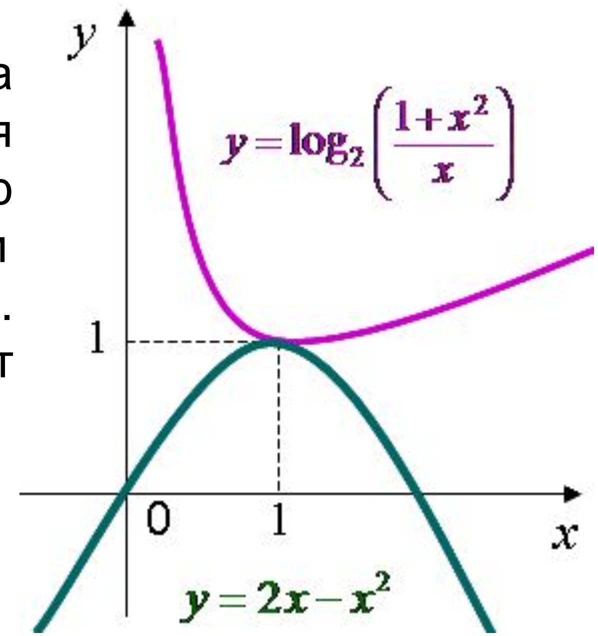
С1 метод мажорант

МЕТОД МАЖОРАНТ

Применим для задач в которых множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства имеют единственную общую точку, являющуюся наибольшим значением для одной части и наименьшим для другой. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.



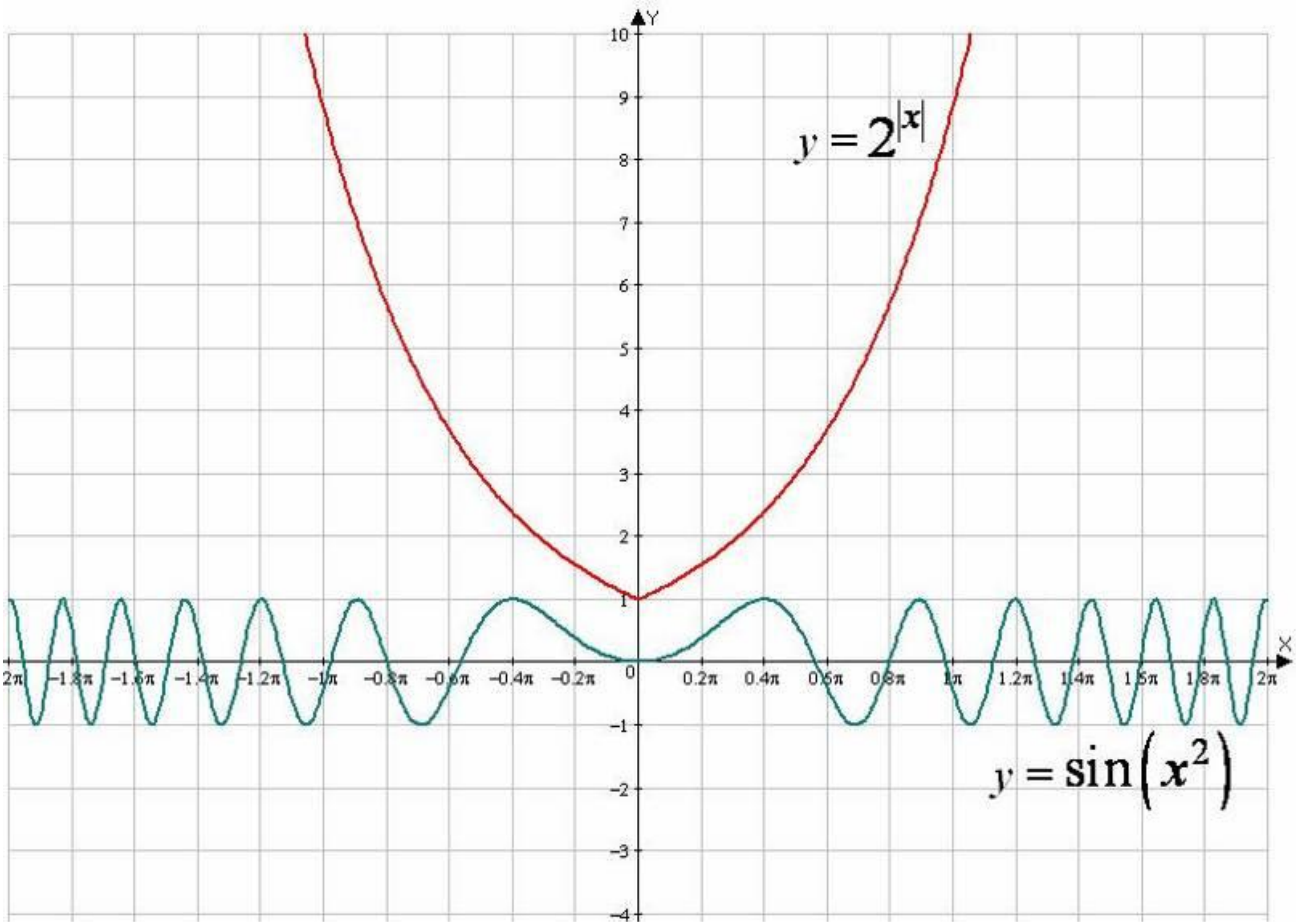
Как начинать решать такие задачи?

Привести уравнение или неравенство к виду $f(x) = g(x)$

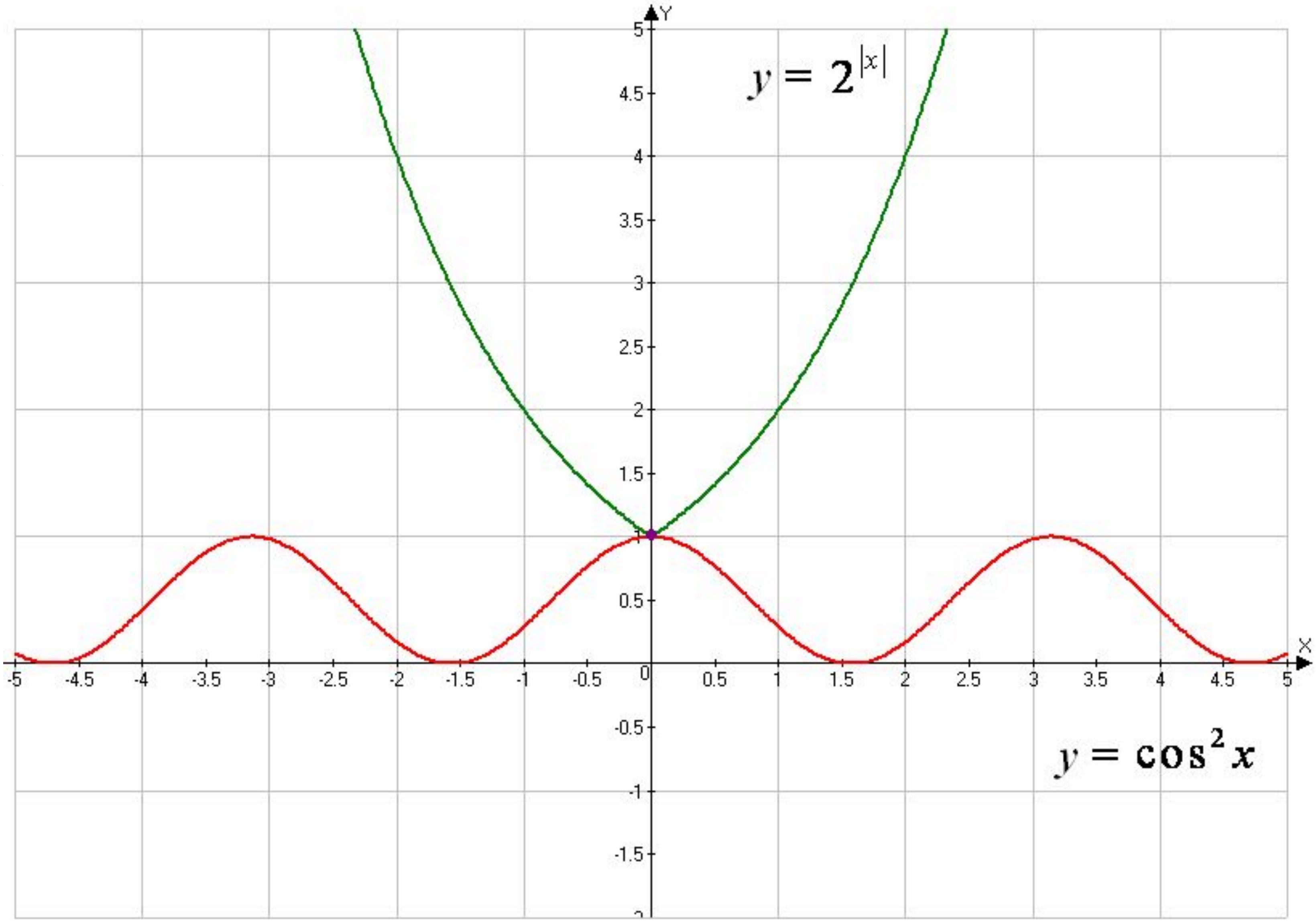
Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число *M*, из области определения такое что $f(x) \leq M$ $g(x) \geq M$

Решить систему уравнений: $\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases}$

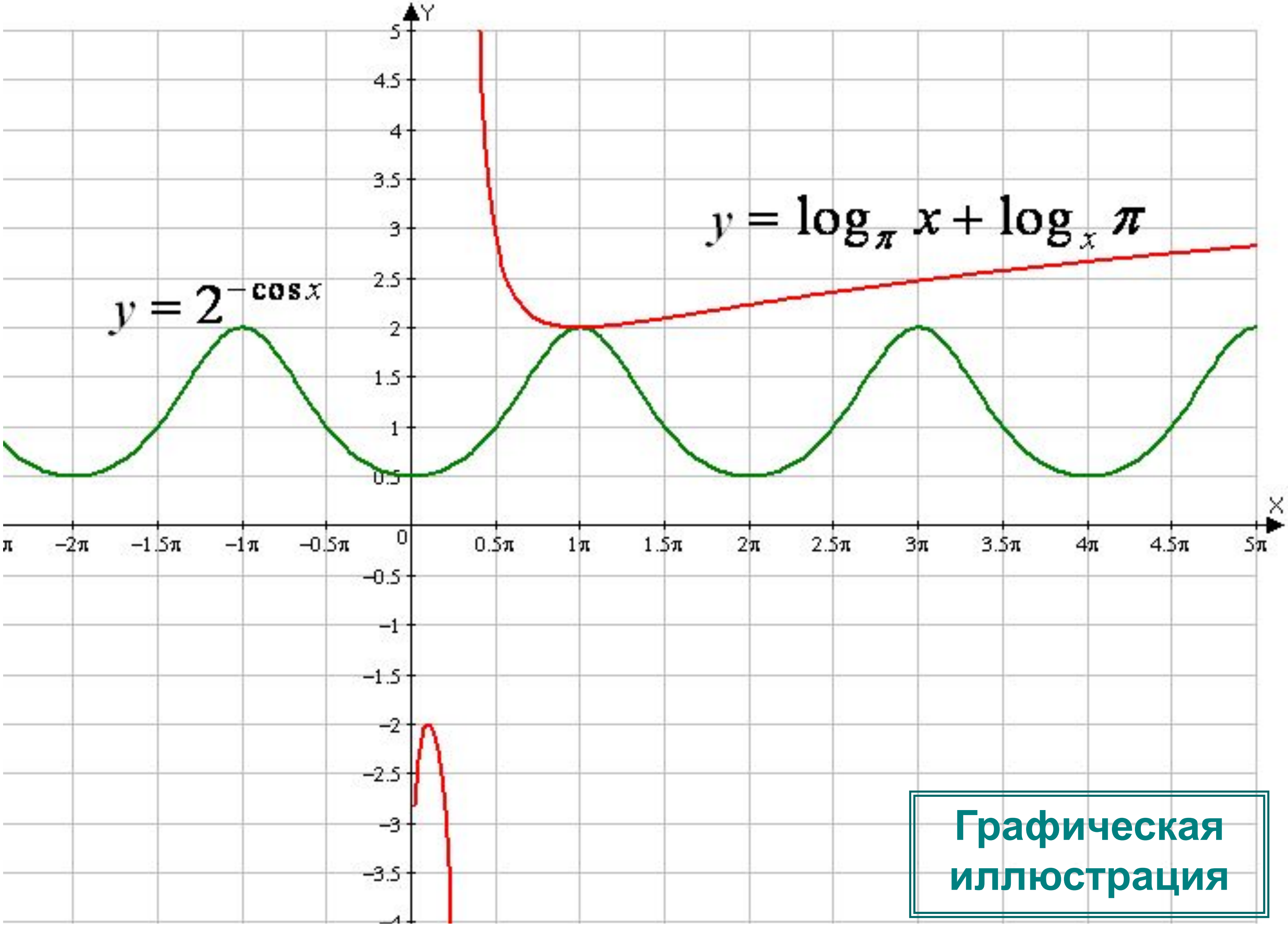
Пример 1. Решите уравнение $2^{|x|} = \sin\left(x^2\right).$



Пример 2. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x.$



Пример 4. Решить уравнение $2^{-\cos x} = \log_\pi x + \log_x \pi.$



Графическая иллюстрация

Пример 5. **Решить уравнение** $\sin x + \sin 9x = 2.$

Решение. Оценим обе части уравнения.

Поскольку $\sin x \le 1$ è $\sin 9x \le 1,$ равенство $\sin x + \sin 9x = 2$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1 \end{cases}.$$

Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{o} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

При этих *x* найдем $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1.$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ решение системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

<u>Пример 6.</u> Решить уравнение $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2.$

Решение.

Так как $\left|\cos 3x\right| \le 1$ и $\left|\cos\frac{5}{2}x\right| \le 1,$ то $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2$

в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 1.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos\frac{5}{2}x = 1 \end{cases},$$

решая которые имеем $x = 4\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = 4\pi k, k \in Z.$

<u>Пример 7.</u> Решить уравнение

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1 + tg^2 2y\right)\cdot\left(3 + \sin 3z\right) = 4.$$

Решение. Очевидно, что $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 2,$

$\left(1 + tg^2 2y\right) \geq 1$ и $\left(3 + \sin 3z\right) \geq 2.$ Заметим, что перемножив почленно эти неравенства, получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1 + tg^2 2y\right)\cdot\left(3 + \sin 3z\right) \geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии: одновременно $\cos^2 x = 1,\ tg^2 2y = 0,\ \sin 3z = -1$

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ tg^2 2y = 0 \\ \sin 3z = -1 \end{cases}.$$

Решая систему уравнений, получаем корни:

Ответ: $x = \pi m, m \in Z;\ \ y = \frac{\pi}{2}k, k \in Z;\ \ z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi l, l \in Z$

Пример 8. Решите уравнение $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}.$

Решение. Для решения уравнения оценим его части:

$$\cos^2(x\cdot\sin x)\le 1,\quad 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge 1.$$

Поэтому равенство возможно только при условии $\begin{cases}\cos^2(x\cdot\sin x)=1\\ 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=1\end{cases}.$

Сначала решим второе уравнение:

$$\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0,\ \sqrt{x^2+x+1}=1,\ x^2+x+1=1,\ x^2+x=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=-1.$ Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни.

При $x=0$ получаем: $\cos^2(0\cdot\sin 0)=\cos^2 0=1$ (верное равенство).

При x = -1 имеем: $\cos^2(-1\cdot\sin(-1))=\cos^2(\sin 1)\ne 1$ (неверное равенство).

Итак, данное уравнение имеет единственный корень x = 0.

Ответ: 0.

Пример 9. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26}=\cos 14\pi x-81a^2-72a-13$ имеет решения. Найдите эти решения.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1}=3+\cos\left(14\pi x\right)-(9a+4)^2.$$

При всех значениях *x* выражение $(7x-5)^2+1\ge 1\Rightarrow\ 4^{(7x-5)^2+1}\ge 4.$

При всех значения *x* выражения $\cos 14\pi x\le 1$ и $(9a+4)^2\ge 0.$

Поэтому $3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2\le 3+1=4.$

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases}4^{(7x-5)^2+1}=4,\\ 3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(7x-5\right)^2=0,\\ \cos 14\pi x=1,\\ (9a+4)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{7},\\ a=-\dfrac{4}{9}.\end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{5}{7}$ при $a=-\dfrac{4}{9}.$