



Алгоритмы внутренних точек с приближенным решением вспомогательной задачи

Филатов А.Ю.

к.ф.-м.н., ИСЭМ СО РАН, ИГУ (Иркутск)

Пержабинский С.М.

ИСЭМ СО РАН (Иркутск)

<http://polnolunie.baikal.ru/me/mat> http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog
[ghttp://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog.htm](http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog.htm),
<http://matec.isu.ru>

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект 05-01-00587а)



Исторический экскурс

1939 – линейное программирование (Канторович).

1947 – симплекс-метод (Данциг).

1967 – метод внутренних точек (Дикин).

1984 – полиномиальный МВТ (Кармаркар).

1990-е - 2007 – эффективные программные реализации.

CPlex (<http://maximal-usa.com>), BPMPD (<http://sztaki.hu>),

MOSEK (<http://mosek.com>),

HOPDM (<http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/hopdm.html>),

Множество оптимальных решений

<http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm.html>

Траектория симплекс-метода

Траектория методов внутренних точек



Пара взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}, \quad X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (1)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}, \quad U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{g}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (2)$$

Основные классы алгоритмов внутренних точек

- Аффинно-масштабирующие алгоритмы.
- Алгоритмы центрального пути.
- Алгоритмы скошенного пути.
- Комбинированные алгоритмы.

- Прямые алгоритмы.
- Двойственные алгоритмы.
- Прямо-двойственные алгоритмы.



Аффинно-масштабирующие алгоритмы внутренних точек

Стартовое приближение: $\mathbf{x}^1 > \mathbf{0}$

Итеративный переход: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \Delta \mathbf{x}^k$

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / d_j^k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k, \quad \mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^k \quad (3)$$

Шаг корректировки:

$$\lambda^k = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k < 0} \left(-x_j^k / \Delta x_j^k \right) \quad (4)$$

Способы выбора весовых коэффициентов:

$$d_j^k = \left(x_j^k \right)^2, \quad j = 1, \dots, n; \quad (5)$$

$$d_j^k = \min \left\{ \left(x_j^k \right)^p, N \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad p \geq 1; \quad (6)$$

$$d_j^k = x_j^k / \max \left\{ \varepsilon, g_j \left(\mathbf{u}^{k-1} \right) \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$



Алгоритмы центрального пути (имеют полиномиальные оценки)

Логарифмическая барьерная функция:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j \rightarrow \min, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (8)$$

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Комбинированные алгоритмы (используют параметризацию)

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k \quad (10)$$



Решение вспомогательной задачи

Аффинно-масштабирующие алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{c} + \mathbf{r}^k \right), \quad \mathbf{X}_k = \text{diag} \{ x_j^k \} \quad (11)$$

$$\Delta x_j^k = - \left(x_j^k \right)^2 g_j \left(\mathbf{u}^{k+1} \right) \quad (12)$$

Алгоритмы центрального пути:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{c} - \mu^k \mathbf{b} \right) \quad (13)$$

$$\Delta x_j^k = x_j^k - \frac{1}{\mu^k} \left(x_j^k \right)^2 g_j \left(\mathbf{u}^{k+1} \right) \quad (14)$$

$$\mu^{k+1} = \left(1 - 0,5 / \sqrt{n} \right) \mu^k \quad (15)$$

Комбинированные алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{k+1}(\mu) = \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{c} + \mathbf{r}^k - \mu \mathbf{b} \right) \quad (16)$$

$$\Delta x_j^k(\mu) = \mu x_j^k - \left(x_j^k \right)^2 g_j \left(\mathbf{u}^{k+1}(\mu) \right) \quad (17)$$

$$\lambda^k(\mu) = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k(\mu) < 0} \left(- x_j^k / \Delta x_j^k(\mu) \right) \quad (18)$$



Методы решения вспомогательной задачи $\mathbf{AD}_k \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}$

- Метод Гаусса.
- Метод Халецкого (метод квадратного корня).
- Метод сопряженных направлений.
- Метод Зейделя.
- Другие приближенные итеративные методы.

Предпосылки использования приближенных итеративных методов

- На первых итерациях достаточно искать приближенное направление корректировки $\Delta \mathbf{x}^k$, используя вектор \mathbf{u}^k , для которого $\mathbf{AD}_k \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}^k \neq \mathbf{b}^k$.
- В финале вычислительного процесса, диагональная матрица \mathbf{D}_k изменяется по итерациям очень незначительно, имеется хорошее стартовое приближение $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^{k-1}$.



Метод сопряженных направлений

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}} \Leftrightarrow f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{u} \rightarrow \min_{\mathbf{u}}$$

Итеративный переход:

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{t-1} + \alpha_t \Delta \mathbf{u}^t$$

Направление корректировки:

$$\Delta \mathbf{u}^t = \nabla f(\mathbf{u}^{t-1}) - \beta_t \Delta \mathbf{u}^{t-1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}} - \beta_t \Delta \mathbf{u}^{t-1}$$

Шаг, определяющий вариант метода:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_t = \frac{(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}})^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^{t-1}}{(\Delta \mathbf{u}^{t-1})^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^{t-1}}$$

Шаг корректировки:

$$f(\mathbf{u}^{t-1} + \alpha \Delta \mathbf{u}^t) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad \alpha_t = -\frac{(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}})^T \Delta \mathbf{u}^t}{(\Delta \mathbf{u}^t)^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^t}$$



Экспериментальное исследование

Число итераций, необходимое для решения задач при $n=1,2t$

Размерность t	Число итераций			Среднекв. отклонение
	Минимал.	Максимал.	Среднее	
10	10	10	10	0
30	30	61	39,78	6,98
50	47	71	56,98	5,58
100	71	89	79,06	4,17
300	187	253	219,48	14,04

Число итераций, необходимое для решения задач при $n=1,5t$

Размерность t	Число итераций			Среднекв. отклонение
	Минимал.	Максимал.	Среднее	
10	10	10	10	0
30	24	35	29,04	2,11
50	34	44	39,26	1,93
100	47	58	51,14	1,98
300	55	65	60,54	2,35



Параметры управления алгоритмом

- Вариант приближенного метода.
- ε – параметр в условии останова $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} < \varepsilon$.
- δ – параметр в условии перехода с точного на приближенный метод $\|\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{k-1} - \tilde{\mathbf{b}}\| / \|\tilde{\mathbf{b}}\| < \delta$.
- K – максимальное число выполняемых подряд итераций приближенного метода.
- t – число внутренних итераций приближенного метода.
- Процедуры корректировки формул (3), (10) и формул вычисления максимального шага на фазе 1.

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / d_j^k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k / \tilde{\lambda}^k,$$

$\tilde{\lambda}^k$ – прогноз шага корректировки.



*Спасибо
за внимание!*