Алгоритмы внутренних точек с приближенным решением вспомогательной задачи

Филатов А.Ю.
к.ф.-м.н., ИСЭМ СО РАН, ИГУ (Иркутск)

Пержабинский С.М.
ИСЭМ СО РАН (Иркутск)

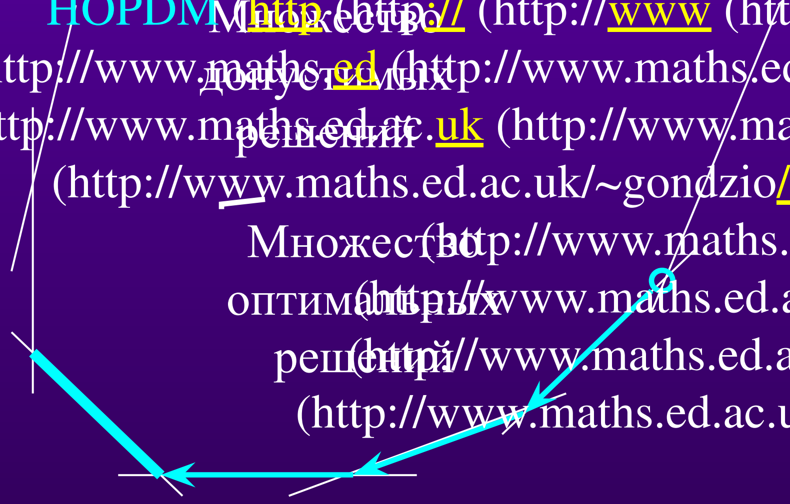
http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog.htm,
http://matec.isu.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект 05-01-00587а)

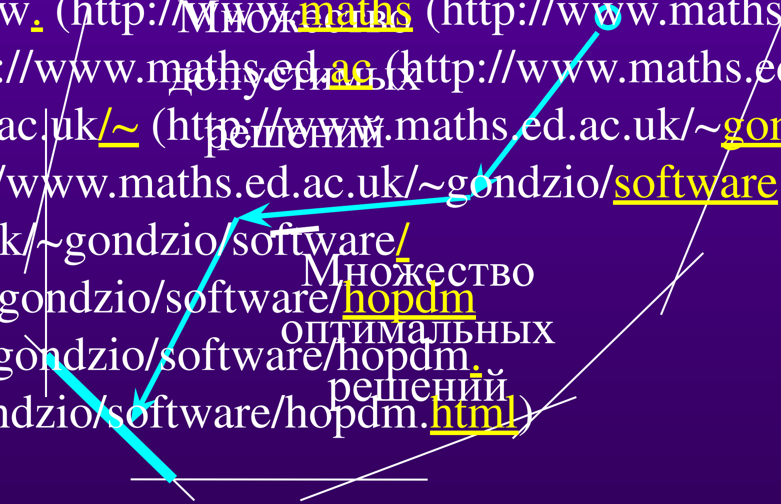
Исторический экскурс

1939 – линейное программирование (Канторович).
1947 – симплекс-метод (Данциг).
1967 – метод внутренних точек (Дикин).
1984 – полиномиальный МВТ (Кармаркар).
1990-е - 2007 – эффективные программные реализации.

CPlex (http (http:// (http://maximal (http://maximal- (http://maximal-usa (http://maximal-usa. (http://maximal-usa.com), BPMPD (http (http:// (http://sztaki (http://sztaki. (http://sztaki.hu), MOSEK (http (http:// (http://mosek (http://mosek. (http://mosek.com), HOPDM (http (http:// (http://www (http://www. (http://www.maths (http://www.maths. (http://www.maths.ed (http://www.maths.ed. (http://www.maths.ed.ac (http://www.maths.ed.ac. (http://www.maths.ed.ac.uk (http://www.maths.ed.ac.uk/~ (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/ (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/ (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm. (http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm.html)



Траектория симплекс-метода



Траектория методов внутренних точек

Пара взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$c^T x \to \min_{x \in X}, \quad X = \left\{ x \in R^n : \; Ax = b, \; x \geq 0 \right\} \tag{1}$$

$$b^T u \to \max_{u \in U}, \quad U = \left\{ u \in R^m : \; g(u) \equiv c - A^T u \geq 0 \right\} \tag{2}$$

Основные классы алгоритмов внутренних точек

- Аффинно-масштабирующие алгоритмы.
- Алгоритмы центрального пути.
- Алгоритмы скошенного пути.
- Комбинированные алгоритмы.

- Прямые алгоритмы.
- Двойственные алгоритмы.
- Прямо-двойственные алгоритмы.

Аффинно-масштабирующие алгоритмы внутренних точек

Стартовое приближение: $\mathbf{x}^1 > 0$

Итеративный переход: $\mathbf{x}^{\mathbf{k}+1} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}} + \lambda^k \Delta\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j^2 \Big/ d_j^k \to \min_{\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathbf{k}} \qquad (3)$$

Шаг корректировки:

$$\lambda^k = \gamma \min_{j:\Delta x_j^k < 0}\left(-x_j^k \Big/ \Delta x_j^k\right) \qquad (4)$$

Способы выбора весовых коэффициентов:

$$d_j^k = \left(x_j^k\right)^2, \quad j = 1,\ldots,n; \qquad (5)$$

$$d_j^k = \min\left\{\left(x_j^k\right)^p, N\right\}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad p \ge 1; \qquad (6)$$

$$d_j^k = x_j^k \Big/ \max\left\{\varepsilon, g_j\left(\mathbf{u}^{\mathbf{k}-1}\right)\right\}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \varepsilon > 0. \qquad (7)$$

Алгоритмы центрального пути (имеют полиномиальные оценки)

Логарифмическая барьерная функция:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \to \min, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (8)$$

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2}\mu^k \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j^2}{\left(x_j^k\right)^2} \to \min_{\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (9)$$

Комбинированные алгоритмы (используют параметризацию)

Задача поиска направления корректировки:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j^2}{\left(x_j^k\right)^2} \to \min_{\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^{\mathbf{k}} \qquad (10)$$

Решение вспомогательной задачи

Аффинно-масштабирующие алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}} = \left(\mathbf{A X_k^2 A^T}\right)^{-1}\left(\mathbf{A X_k^2 c} + \mathbf{r^k}\right), \quad \mathbf{X_k} = diag\left\{x_j^k\right\} \tag{11}$$

$$\Delta x_j^k = -\left(x_j^k\right)^2 g_j\left(\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}}\right) \tag{12}$$

Алгоритмы центрального пути:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}} = \left(\mathbf{A X_k^2 A^T}\right)^{-1}\left(\mathbf{A X_k^2 c} - \mu^k \mathbf{b}\right) \tag{13}$$

$$\Delta x_j^k = x_j^k - \frac{1}{\mu^k}\left(x_j^k\right)^2 g_j\left(\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}}\right) \tag{14}$$

$$\mu^{k+1} = \left(1 - 0{,}5/\sqrt{n}\right)\mu^k \tag{15}$$

Комбинированные алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}}(\mu) = \left(\mathbf{A X_k^2 A^T}\right)^{-1}\left(\mathbf{A X_k^2 c} + \mathbf{r^k} - \mu \mathbf{b}\right) \tag{16}$$

$$\Delta x_j^k(\mu) = \mu x_j^k - \left(x_j^k\right)^2 g_j\left(\mathbf{u}^{\mathbf{k+1}}(\mu)\right) \tag{17}$$

$$\lambda^k(\mu) = \gamma \min_{j:\Delta x_j^k(\mu)<0}\left(-x_j^k / \Delta x_j^k(\mu)\right) \tag{18}$$

Методы решения вспомогательной задачи $AD_k A^T u = \tilde{A} u = \tilde{b}$

- Метод Гаусса.
- Метод Халецкого (метод квадратного корня).

- Метод сопряженных направлений.
- Метод Зейделя.
- Другие приближенные итеративные методы.

Предпосылки использования приближенных итеративных методов

- На первых итерациях достаточно искать приближенное направление корректировки Δx^k, используя вектор u^k, для которого $AD_k A^T u = \tilde{b}^k \neq b^k$.

- В финале вычислительного процесса, диагональная матрица D_k изменяется по итерациям очень незначительно, имеется хорошее стартовое приближение $u^0 = u^{k-1}$.

Метод сопряженных направлений

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{b}}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} \to \min_{\mathbf{u}}$$

Итеративный переход:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{t}} = \mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} + \alpha_t \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}}$$

Направление корректировки:

$$\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}} = \nabla f\left(\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}}\right) - \beta_t \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} - \tilde{\mathbf{b}} - \beta_t \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}}$$

Шаг, определяющий вариант метода:

$$\beta_1 = 0, \qquad \beta_t = \frac{\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} - \tilde{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}}}{\left(\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}}\right)^{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}}}$$

Шаг корректировки:

$$f\left(\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} + \alpha\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\right) \to \min_{\alpha}, \qquad \alpha_t = -\frac{\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{\mathbf{t-1}} - \tilde{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{T}} \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}}}{\left(\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{t}}}$$

Экспериментальное исследование

Число итераций, необходимое для решения задач при *n=1,2m*

Размерность *m*	Число итераций Минимал.	 Максимал.	 Среднее	Среднекв. отклонение
10	10	10	10	0
30	30	61	39,78	6,98
50	47	71	56,98	5,58
100	71	89	79,06	4,17
300	187	253	219,48	14,04

Число итераций, необходимое для решения задач при *n=1,5m*

Размерность *m*	Число итераций Минимал.	 Максимал.	 Среднее	Среднекв. отклонение
10	10	10	10	0
30	24	35	29,04	2,11
50	34	44	39,26	1,93
100	47	58	51,14	1,98
300	55	65	60,54	2,35

Параметры управления алгоритмом

- Вариант приближенного метода.
- ε – параметр в условии останова $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} < \varepsilon.$
- δ – параметр в условие перехода с точного на приближенный метод $\left\|\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{\mathbf{k-1}} - \widetilde{\mathbf{b}}\right\| \Big/ \left\|\widetilde{\mathbf{b}}\right\| < \delta.$
- K – максимальное число выполняемых подряд итераций приближенного метода.
- t – число внутренних итераций приближенного метода.
- Процедуры корректировки формул (3), (10) и формул вычисления максимального шага на фазе 1.

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j^2 \Big/ d_j^k \to \min_{\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^{\mathbf{k}} \Big/ \widetilde{\lambda}^k,$$

$\widetilde{\lambda}^k$ – прогноз шага корректировки.

Спасибо

за внимание!