

Числовые системы

Арифметическая теория действительных чисел по Мерзэ-Кантору



Георг Кантор

(3 марта 1845г. – 6 января 1918г.)

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор родился 3 марта 1845 г. в России, в Санкт-Петербурге. Его мать, Мария Анна Бём, происходила из семьи талантливых музыкантов. Его отец Георг Вольдемар Кантор был удачливым коммерсантом и благочестивым лютеранином, передавшим сыну глубокие религиозные убеждения.

Когда Кантор был ещё ребёнком, семья переехала из России в Германию, и именно там началось его обучение математике. Защитив в 1868 г. диссертацию по теории чисел, он получил степень доктора в Берлинском университете.



Два года спустя он занял должность приват-доцента в Университете в Галле .

Один из его коллег в Галле, Генрих Эдуард Гейне, работал в то время над теорией тригонометрических рядов и он побудил Кантора заняться сложной проблемой единственности таких рядов. В 1872 г. в возрасте 27 лет Кантор опубликовал статью, содержащую весьма общее решение этой проблемы, в которой он использовал идеи, выросшие впоследствии в теорию бесконечных множеств.



Шарль Мерзэ (1835г – 1811г.)

В 1869 году Мерзэ опубликовал статью, в которой было впервые дано определение вещественного числа и впервые изложена математическая теория вещественных чисел. Его идеи не были должным образом оценены современниками и никак не повлияли на развитие науки. Позже его работы были повторили независимо от него другими учеными — Рихард Дедекиндр и Георг Кантор.

Создание теории действительного числа

Чтобы определить иррациональное число как предел последовательности рациональных чисел, нужно показать, что такая последовательность сходится. Для этого нужно воспользоваться критерием Коши, который будет справедлив для любых рациональных значений. Однако для того чтобы ответить на вопрос будет ли он справедлив для действительных чисел, необходимо иметь определенными иррациональные числа. Получается замкнутый круг.

Эта задача была решена в XIX веке с разных точек зрения и независимо друг от друга Вейерштрассом, Дедекиндом, Кантором и Мерзэ.

Теория действительного числа

В своем построении Кантор исходит из наличия рациональных чисел. Затем он вводит фундаментальные последовательности Коши и приписывает им формальный предел. Далее, он разбивает все последовательности на классы эквивалентности. К одному и тому же классу последовательности относятся тогда и только тогда, когда их разность стремится к нулю, то есть

$$\{x_n\} : \{y_n\} \longleftrightarrow |x_n - y_n| \longrightarrow 0$$

Далее, формальные пределы равны друг другу, если они имеют две такие фундаментальные последовательности, которые эквивалентны друг другу или

$$b = a \iff \exists x_n \rightarrow b \iff$$

$$\rightarrow a \iff \{x_n\} : \{y_n\}$$



Отношение порядка

Отношение порядка определяется следующим образом.

Если $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ и $\lim(x_n - y_n) < 0$

то $a < b$

Если $\lim(x_n - y_n) > 0$ то $a > b$



Заключение

Таким образом, классы эквивалентности описывают некоторые вещественные числа. Назовем их вещественными числами первого порядка. Если мы попробуем образовать вещественное число большего порядка, составляя фундаментальные последовательности Коши, то получим опять множество вещественных чисел первого порядка. Иными словами, множество вещественных чисел замкнуто.

**Спасибо за
внимание!**