Статистическая гипотеза

- Любое утверждение о виде или свойствах закона распределения наблюдаемых случайных величин
- Всякий раз предполагаем, что у нас имеются две взаимоисключающие гипотезы:

основная и альтернативная

Нулевой (основной) гипотезой - H_0 называют какое-либо конкретное предположение о теоретической функции распределения или предположение, влекущее за собой важные практические последствия

Альтернативная гипотеза H_1 - любая гипотеза, исключающая нулевую

Задача проверки статистической гипотезы состоит в том, чтобы, используя статистические данные (выборку)

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

принять или отклонить нулевую гипотезу

Нулевые и альтернативные гипотезы формулируются как утверждение о принадлежности функций распределения некоторой случайной величины определенному классу распределений

$$\Phi_0, \Phi_1 \in \Phi, \quad \Phi_0 \cup \Phi_1 = \Phi$$

$$\Phi_0 \cap \Phi_1 = \varnothing$$

$$H_0 : F_x \in \Phi_0; \quad H_1 : F_x \in \Phi_1$$

Гипотеза называется простой, если соответствующий класс распределений содержит лишь одно распределение, в противном случае гипотеза будет сложной.

Гипотезы о параметрах распределений называются параметрическими

Статистикой критерия называется функция от выборки

$$T\left(X\right)\in\tau$$

значение которой для заданной выборки служит основанием принятия или отклонения основной гипотезы

Статистический критерий - правило, позволяющее только по результатам наблюдений

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

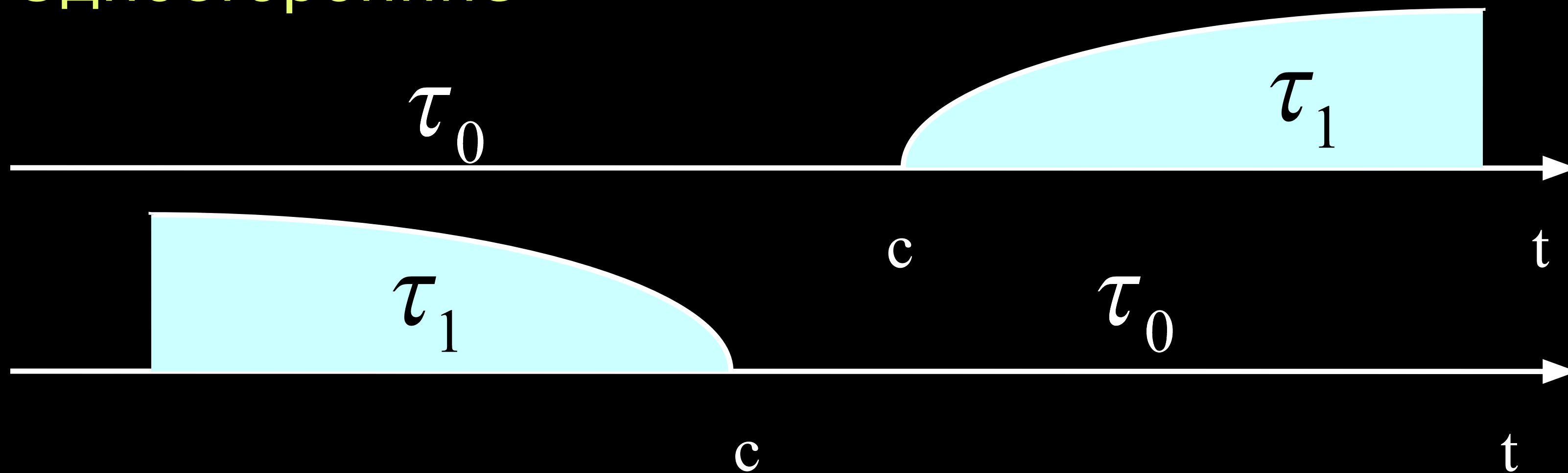
принять или отклонить нулевую гипотезу H_0

Каждому критерию отвечает разбиение области значений *статистики критерия* на две непересекающихся части:

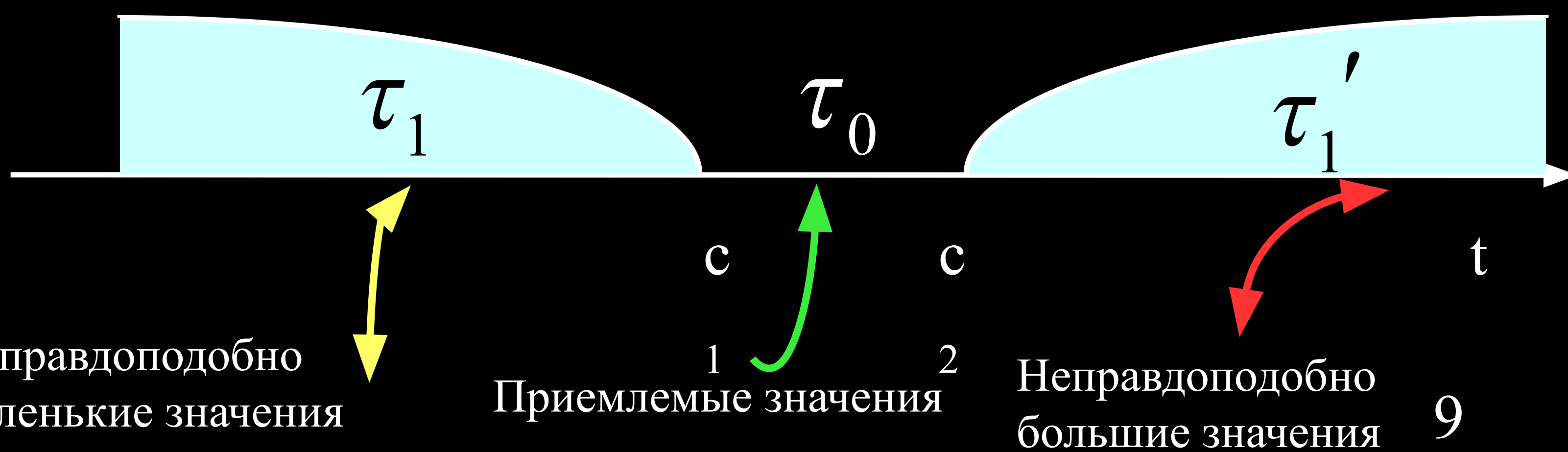
- ***критическую область*** τ_1
- ***область принятия гипотезы*** τ_0

Критические области

Односторонние



Двусторонняя



Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы τ_0 , то принимается *нулевая* гипотеза, в противном случае она отвергается (принимается *альтернативная* гипотеза)

Задать статистический критерий значит:

- задать статистику критерия
- задать критическую область

В ходе проверки гипотезы H_0 можно прийти к правильному выводу, либо совершить два рода ошибок:

- ошибку первого рода -- отклонить H_0, когда она верна
- ошибку второго рода -- принять H_0, когда она не верна.

Так как статистика критерия $T(X) \in \tau$ есть случайная величина со своим законом распределения, то попадание её в ту или иную область характеризуется соответствующими вероятностями:

- вероятностью ошибки первого рода α
- вероятностью ошибки второго рода β

Ошибку первого рода α ещё называют уровнем значимости критерия.

Часто пользуются понятием мощности критерия W -- вероятности попадания в критическую область при условии справедливости альтернативной гипотезы

$$W = 1 - \beta$$

В общем случае вводят функцию мощности

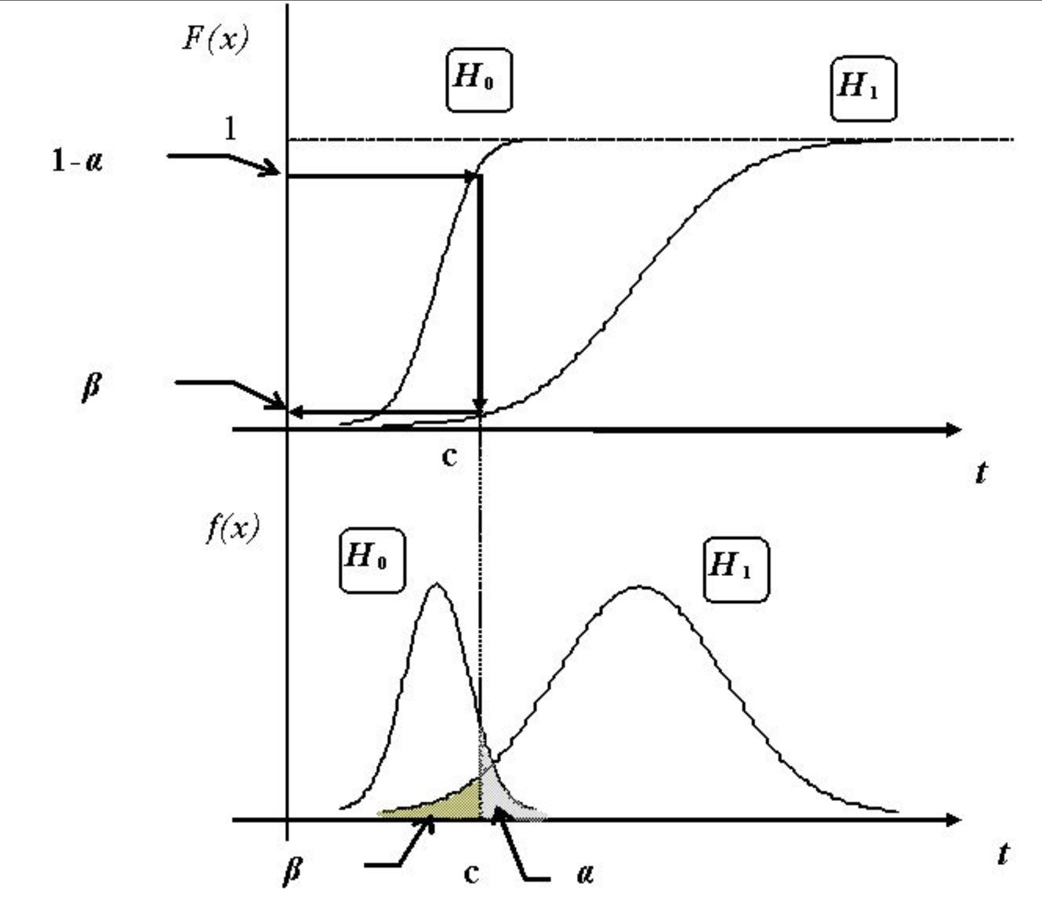
$$W\left(F\right)=P\left(T\left(X\right)\in\tau_1\middle|F\right)$$

$$\alpha=W\left(F_0\right),\quad \beta=1-W\left(F_1\right)$$

$$W=W\left(F_1\right)$$

При разработке статистического критерия невозможно одновременно минимизировать обе ошибки. Поэтому поступают следующим образом: при заданном числе испытаний n устанавливается верхняя граница для ошибки первого рода α. Выбирается тот критерий, у которого наименьшая ошибка второго рода.

Распределение статистики критерия для нулевой и альтернативной гипотез (односторонний критерий)



Уровень значимости α устанавливается из значений следующего ряда:

0.05, 0.01, 0.005, …

события с такими вероятностями считаются практически невозможными.

Допустимая величина уровня значимости определяется теми последствиями, которые наступают после совершения ошибки.

Примеры формулировок статистических гипотез

Гипотеза о виде распределения:

произведено n независимых измерений случайной величины с неизвестной функцией распределения F(x).

Следует проверить гипотезу:

$$H_0 : F_\xi(x) \in \Phi_0$$

Гипотеза однородности

Произведено *k* серий независимых испытаний

$$\left(x_1, x_2, \ldots\ x_{n1}\right)_1, \left(x_1, x_2, \ldots\ x_{n2}\right)_2, \ldots \left(x_1, x_2, \ldots\ x_{nk}\right)_k$$

Можно ли с достаточной надежностью считать, что закон распределения наблюдений от серии к серии не менялся? Если это так, то статистические данные однородны.

Проверяется гипотеза однородности:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$$

Гипотеза независимости

Наблюдается двухмерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x, y)$ и есть основания полагать, что компоненты ξ_1, ξ_2 -- независимы.

В этом случае проверяется гипотеза независимости:

$$H_0:\ F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$$

Пять шагов проверки гипотезы

- 1 шаг – выдвигается основная гипотеза H_0
- 2 шаг – задается уровень значимости α
- 3 шаг – задается статистика критерия $T(X)$ с известным законом распределения

- 4 шаг – из таблиц распределения статистики критерия находятся квантили, соответствующие границам критической области
- 5 шаг – для данной выборки рассчитывается значение статистики критерия

Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается на уровне значимости α.

В противном случае принимается альтернативная гипотеза (отвергается нулевая гипотеза)

Среди критериев выделяются такие, которые улавливают любые отклонения от нулевой гипотезы.
Они называются

« критерии согласия »

Критерий согласия Колмогорова

Применяется для проверки гипотезы о виде распределения

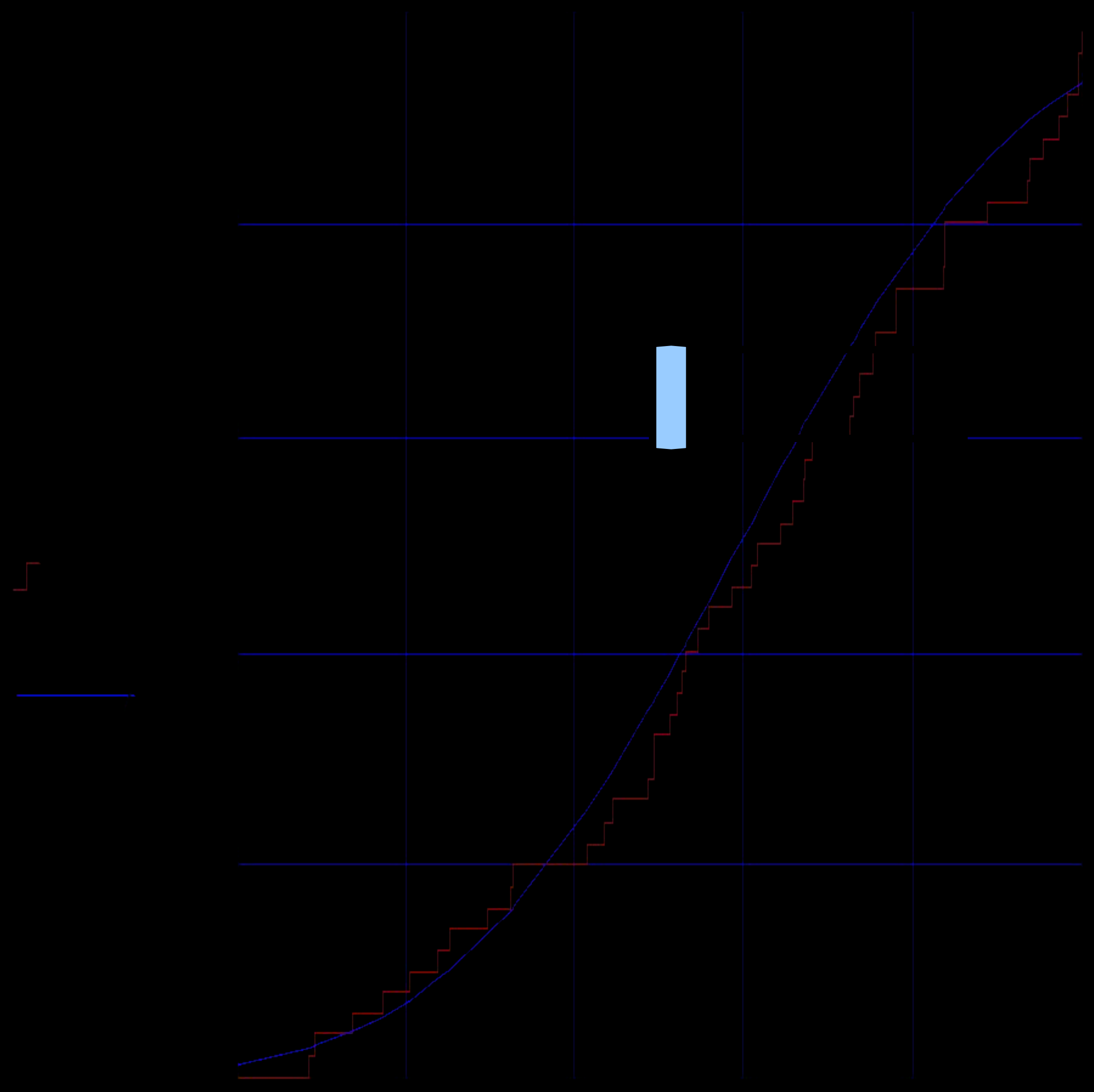
$$H_0 : F_n(X) = F(X) \qquad H_1 : F_n(X) \neq F(X)$$

При условии, что теоретическая функция распределения непрерывная и полностью определена

Критерий согласия Колмогорова

За меру близости распределений принимается максимальное отклонение *эмпирической* функции распределения $F_n(x)$ от *теоретической* $F(x)$.

$$D_n = \max \left| F(X) - F_n(x) \right|$$



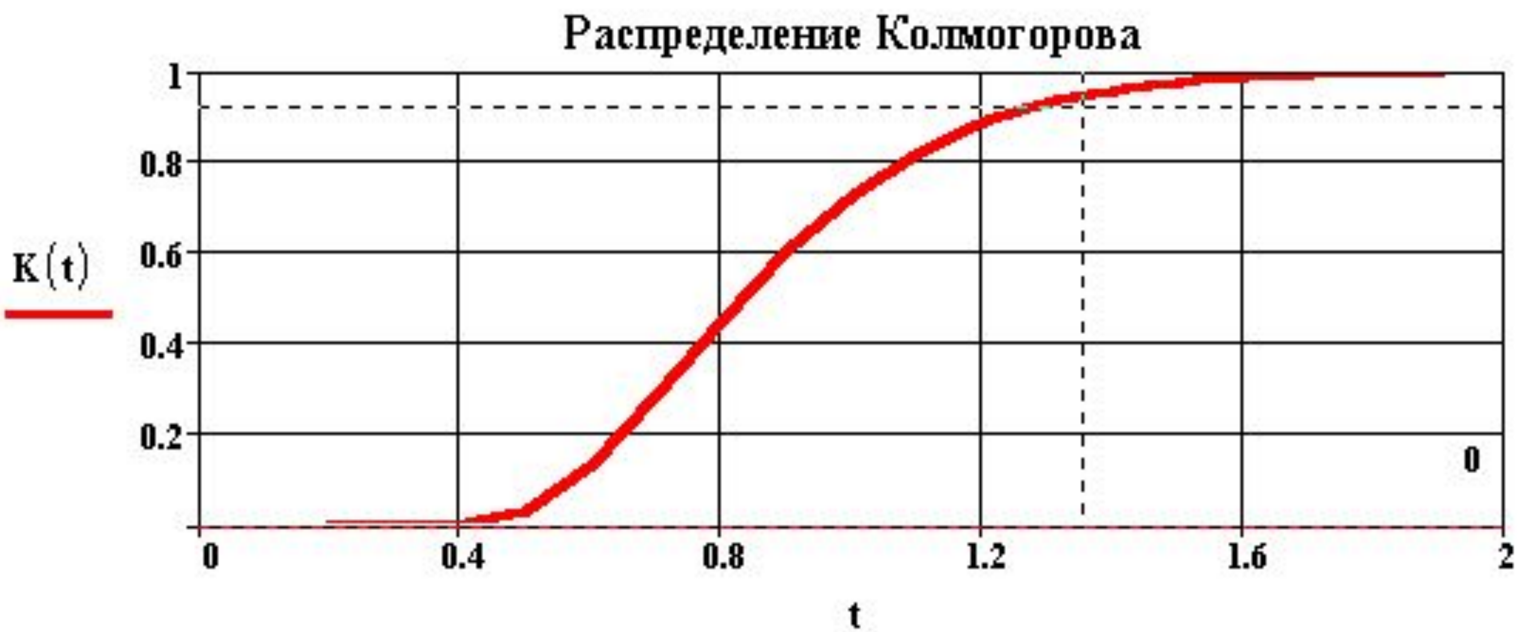
Статистика критерия

$$T(X) = \sqrt{n} \cdot D_n = \sqrt{n} \cdot max\left[F(X) - F_n(X)\right]$$

Распределение статистики Колмогорова не зависит от ***F* (*x*)**.
При больших *n* оно стремится к распределению Колмогорова.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} D_n(X) \le t\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2t^2}$$

$$K(t) := \sum_{i=-2001}^{2001} \left[\left[(-1)^{-i}\right] \cdot e^{-\left(2 \cdot i^2 \cdot t^2\right)}\right] \qquad t := 0, 0.1 .. 2$$



Расчет квантилей распределения Колмогорова

$$qK(t, alfa) := root(K(t) - alfa, t) \qquad qK(1, 0.95) = 1.358099$$

Критерий согласия χ^2 Пирсона (хи-квадрат)

Первоначально разработан для дискретных распределений

Простейшие параметрические гипотезы

- Гипотезы о среднем значении гауссовской случайной величины
- Гипотезы о сравнении дисперсий