

# Статистическая гипотеза

- Любое утверждение о виде или свойствах закона распределения наблюдаемых случайных величин
- Всякий раз предполагаем, что у нас имеются две взаимоисключающие гипотезы:

**основная и альтернативная**

**Нулевой (основной)** гипотезой -  $H_0$  называют какое-либо конкретное предположение о теоретической функции распределения или предположение, влекущее за собой важные практические последствия

---

**Альтернативная гипотеза  $H_1$**  - любая гипотеза, исключая нулевую

Задача проверки статистической гипотезы состоит в том, чтобы, используя статистические данные (выборку)

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

принять или отклонить нулевую гипотезу

Нулевые и альтернативные гипотезы формулируются как утверждение о принадлежности функций распределения некоторой случайной величины определенному классу распределений

$$\Phi_0, \Phi_1 \in \Phi, \quad \Phi_0 \cup \Phi_1 = \Phi$$

$$\Phi_0 \cap \Phi_1 = \emptyset$$

$$H_0 : F_x \in \Phi_0; \quad H_1 : F_x \in \Phi_1$$

Гипотеза называется **простой**, если соответствующий класс распределений содержит лишь **одно** распределение, в противном случае гипотеза будет **сложной**.

---

Гипотезы о параметрах распределений называются **параметрическими**

## Статистикой критерия

называется функция от выборки

$$T(X) \in \tau$$

значение которой для заданной  
выборки служит основанием принятия  
или отклонения основной гипотезы

**Статистический критерий** - правило,  
позволяющее только по результатам  
наблюдений

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

принять или отклонить нулевую  
гипотезу  $H_0$

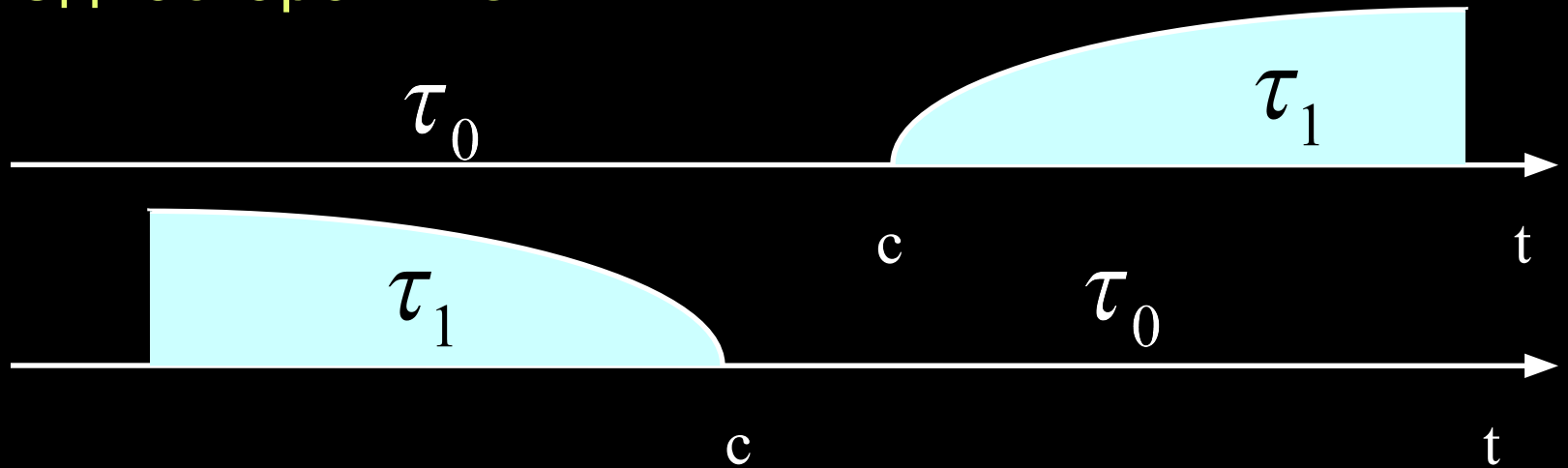
Каждому критерию отвечает разбиение области значений *статистики критерия* на две непересекающихся части:

- *критическую область  $\tau_1$*
- *область принятия гипотезы  $\tau_0$*

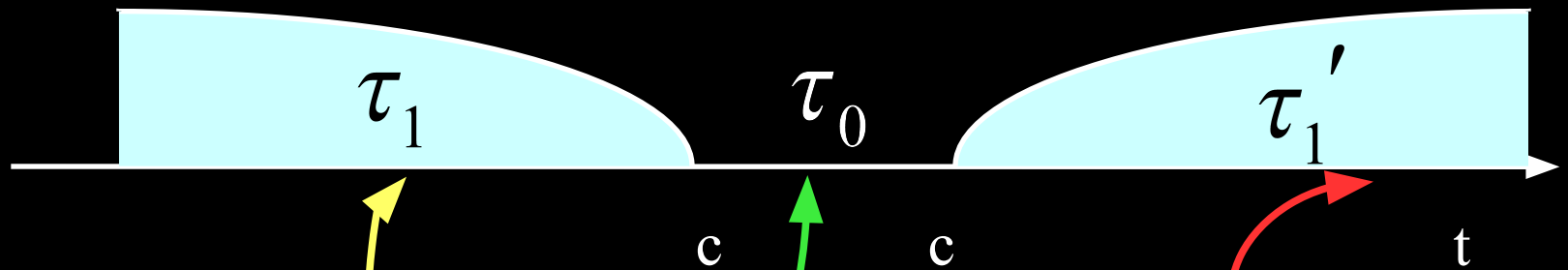


# Критические области

## Односторонние



## Двусторонняя



Неправдоподобно  
маленькие значения

1 Приемлемые значения 2

Неправдоподобно  
большие значения

Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы  $\tau_0$ , то принимается *нулевая* гипотеза, в противном случае она отвергается (принимается *альтернативная* гипотеза)



Задать статистический критерий

значит:

- задать статистику критерия
- задать критическую область

В ходе проверки гипотезы  $H_0$  можно прийти к правильному выводу, либо совершить **два рода ошибок**:

- ошибку первого рода -- **отклонить  $H_0$** , когда она верна
- ошибку второго рода -- **принять  $H_0$** , когда она не верна.

Так как статистика критерия  $T(X) \in \tau$  есть случайная величина со своим законом распределения, то попадание её в ту или иную область характеризуется соответствующими вероятностями:

- вероятностью ошибки первого рода  $\alpha$
- вероятностью ошибки второго рода  $\beta$

Ошибку первого рода  $\alpha$  ещё называют уровнем значимости критерия.

Часто пользуются понятием **мощности критерия  $W$**  -- вероятности попадания в критическую область при условии справедливости альтернативной гипотезы

$$W = 1 - \beta$$

В общем случае вводят функцию  
МОЩНОСТИ

$$W(F) = P(T(X) \in \tau_1 | F)$$

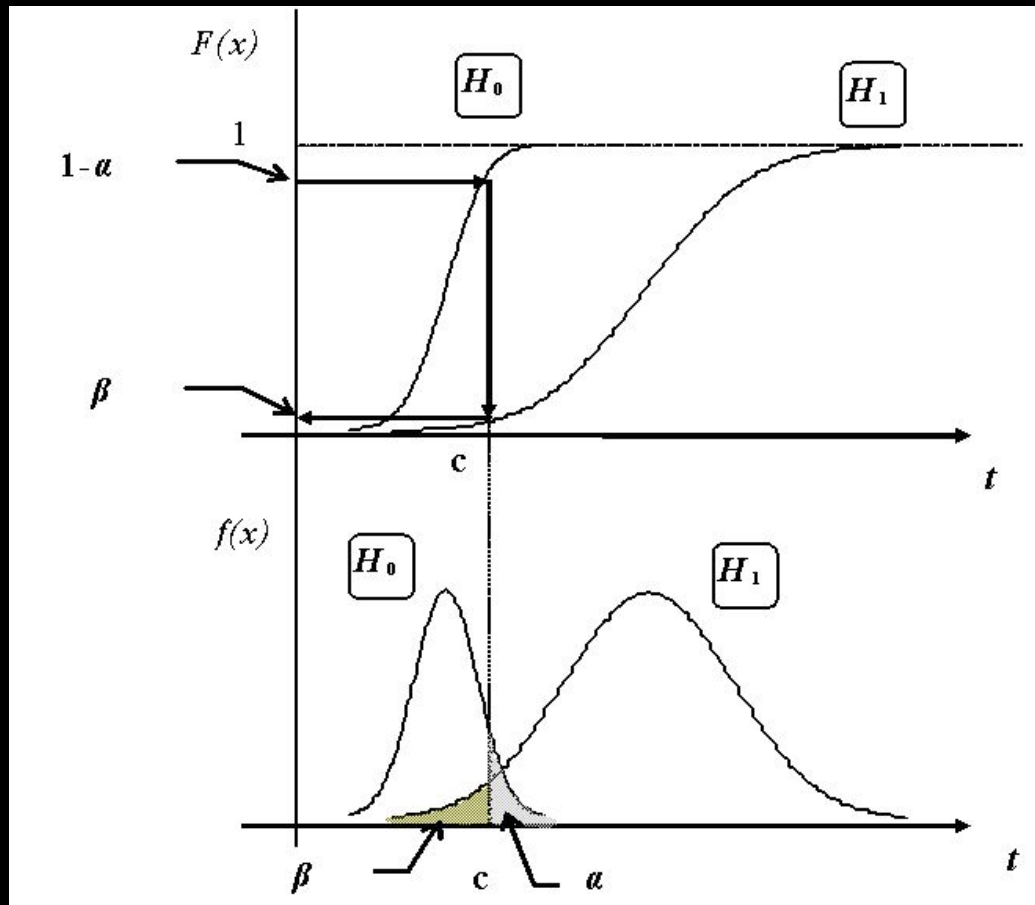
$$\alpha = W(F_0), \quad \beta = 1 - W(F_1)$$

$$W = W(F_1)$$

При разработке статистического критерия невозможно одновременно минимизировать обе ошибки. Поэтому поступают следующим образом: при заданном числе испытаний  $n$  устанавливается верхняя граница для ошибки первого рода  $\alpha$ . Выбирается тот критерий, у которого наименьшая ошибка второго рода.



# Распределение статистики критерия для нулевой и альтернативной гипотез (односторонний критерий)



Уровень значимости  $\alpha$  устанавливается из значений следующего ряда:

$0.05, 0.01, 0.005, \dots$

события с такими вероятностями считаются практически невозможными.

Допустимая величина уровня значимости определяется теми последствиями, которые наступают после совершения ошибки.

Примеры формулировок статистических гипотез

**Гипотеза о виде распределения:**

произведено  $n$  независимых измерений случайной величины с неизвестной функцией распределения  $F(x)$ .

Следует проверить гипотезу:

$$H_0 : F_{\xi} (x) \in \Phi_0$$

# Гипотеза однородности

Произведено  $k$  серий независимых испытаний  
 $(x_1, x_2, \dots, x_{n1})_1, (x_1, x_2, \dots, x_{n2})_2, \dots, (x_1, x_2, \dots, x_{nk})_k$

Можно ли с достаточной надежностью считать, что закон распределения наблюдений от серии к серии не менялся? Если это так, то статистические данные однородны.

Проверяется гипотеза однородности:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$$

## Гипотеза независимости


Наблюдается двумерная случайная величина  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  с неизвестной функцией распределения  $F_\xi(x, y)$  и есть основания полагать, что компоненты  $\xi_1, \xi_2$  -- независимы.


В этом случае проверяется **гипотеза независимости**:

$$H_0 : F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$$

# Пять шагов проверки гипотезы

- 1 шаг – выдвигается основная гипотеза  $H_0$
- 2 шаг – задается уровень значимости  $\alpha$
- 3 шаг – задается статистика критерия  $T(X)$  с известным законом распределения

- 
- 4 шаг – из таблиц распределения статистики критерия находятся квантили, соответствующие границам критической области
  - 5 шаг – для данной выборки рассчитывается значение статистики критерия



Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается на уровне значимости  $\alpha$ .

В противном случае принимается альтернативная гипотеза (отвергается нулевая гипотеза)



Среди критериев выделяются такие, которые улавливают любые отклонения от нулевой гипотезы.

Они называются

**« критерии согласия »**

# Критерий согласия Колмогорова

---

Применяется для проверки гипотезы о виде распределения

$$H_0: F_n(X) = F(X)$$

$$H_1: F_n(X) \neq F(X)$$

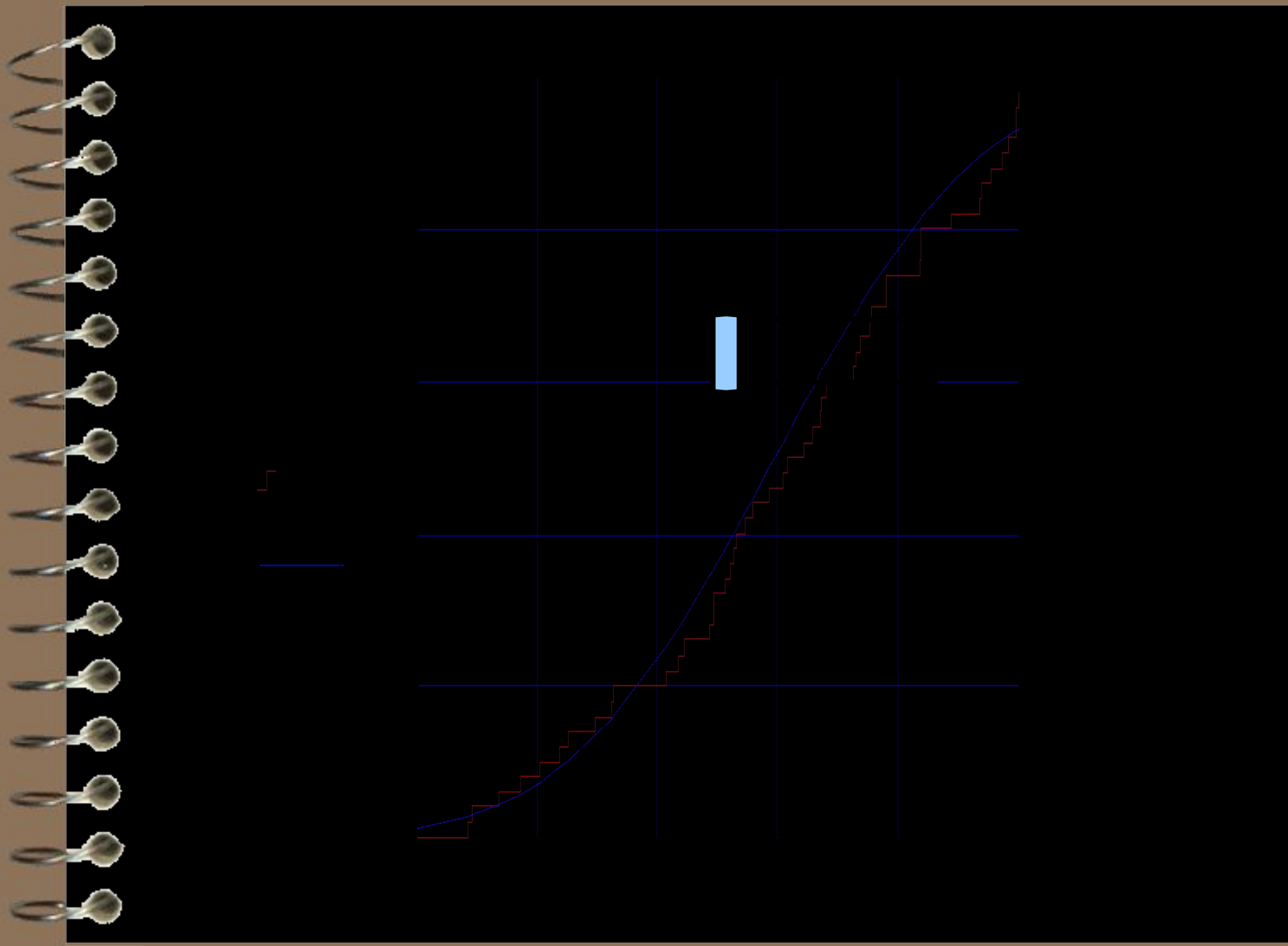
При условии, что теоретическая функция распределения непрерывная и полностью определена

# Критерий согласия Колмогорова

---

За меру близости распределений принимается максимальное отклонение *эмпирической* функции распределения  $F_n(x)$  от *теоретической*  $F(x)$ .

$$D_n = \max_{x \in X} |F(x) - F_n(x)|$$



# Статистика критерия

$$T(X) = \sqrt{n} \cdot D_n = \sqrt{n} \cdot \max [F(X) - F_n(X)]$$

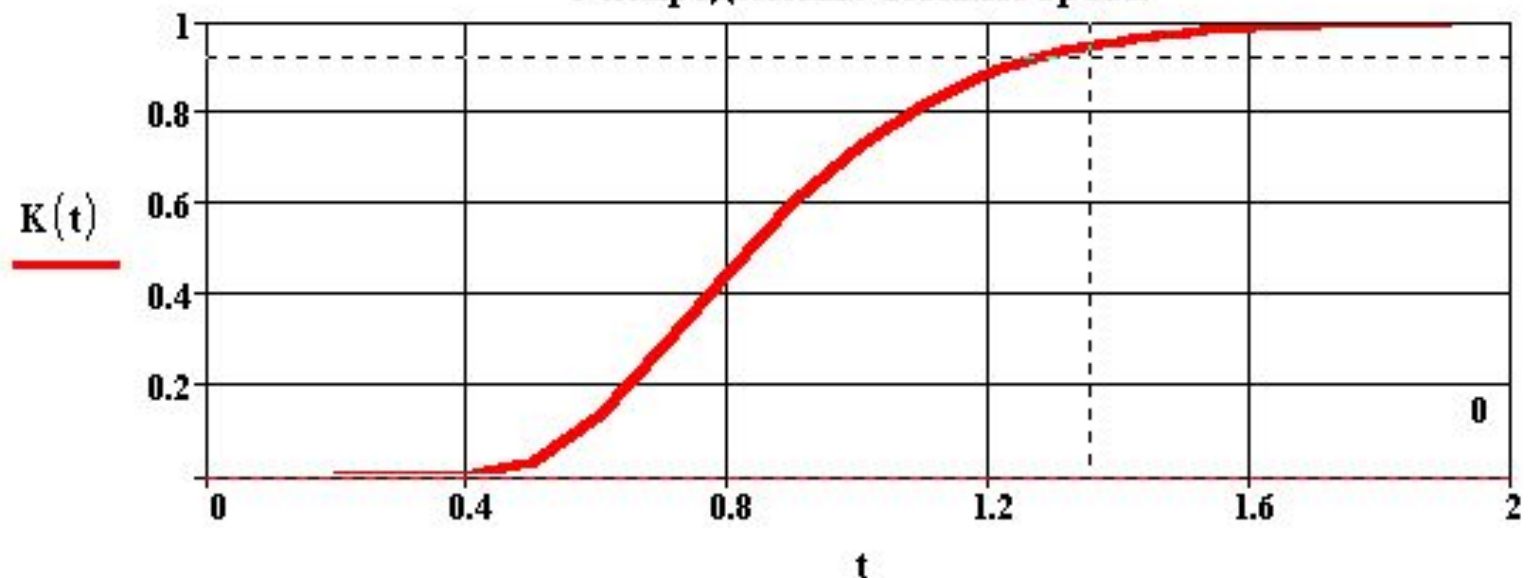
Распределение статистики Колмогорова не зависит от  $F(x)$ .

При больших  $n$  оно стремится к распределению Колмогорова.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} D_n(X) \leq t\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 t^2}$$

$$K(t) := \sum_{i = -2001}^{2001} \left[ \left[ (-1)^{-i} \right] \cdot e^{-\left( 2 \cdot i^2 \cdot t^2 \right)} \right] \quad t := 0, 0.1 \dots 2$$

### Распределение Колмогорова



Расчет квантилей распределения Колмогорова

$$qK(t, \text{alfa}) := \text{root}(K(t) - \text{alfa}, t)$$

$$qK(1, 0.95) = 1.358099$$



Критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона  
(хи-квадрат)

Первоначально разработан для  
дискретных распределений

# Простейшие параметрические гипотезы

- Гипотезы о среднем значении гауссовской случайной величины
- Гипотезы о сравнении дисперсий