

Разнообразные подходы к решению ТЕКСТОВЫХ задач

Цель методической разработки:

систематизация различных подходов к изучению раздела математики по решению текстовых задач, используемых на уроках математики в 5-6 классах, алгебры в 7-11 классах.

Задачи:

- Проведение теоретического анализа различных подходов к решению задач в современной науке.
- Обобщение различных приемов решения текстовых задач.
- Обобщение методики решения задач на движение, работу, проценты, смеси, сплавы и т.д.
- Определение сложностей, которые испытывают учащиеся при решении текстовых задач, и пути их решения.

Основные цели решения текстовых задач в школьном курсе математики:

- научить переводить реальные предметные ситуации в различные математические модели,
- обеспечить действенное усвоение учащимися основных методов и приемов решения учебных математических задач.

Текстовые задачи в различных учебниках алгебры 9 класса

	Текстовые задачи	На работу	Движение по окружности	Смеси, сплавы	Раздел «Для внекл. работы»
Ю.Н.Макарычев	65	15	-	-	
Ш.А.Алимов	55	7	-	2	20
А.Г.Мордкович	73	14	1	3	

Этапы решения текстовых задач:

- Анализ содержания задачи.
- Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения.
- Осуществление плана решения задачи.
- Проверка решения задачи.

Приемы, используемые на этапе «Анализ задачи»

- **представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче.** Цель такого воспроизведения — выявление основных количественных и качественных характеристик ситуации, представленной в задаче.
- **постановка специальных вопросов и поиск ответов на них** — включает следующий «стандартный» набор вопросов, ответы на которые позволяют детально разобраться в содержании задачи: О чем говорится в задаче? Что известно в задаче? Что требуется найти в задаче? Что в задаче неизвестно? и др.
- **переформулировка текста задачи** — состоит в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим описанием, сохраняющим все отношения, связи, но более явно их выражающим. При необходимости строится вспомогательная модель задачи: краткая запись условия, таблица, рисунок, чертеж и т.п.
- **моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных моделей или графических моделей.**

приемы, используемые на этапе «Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения».

- **анализ задачи по тексту** или **по ее вспомогательной модели;**
- от вопроса задачи к данным (**аналитический путь**) или от данных к вопросу (**синтетический путь**);
- **комбинированный** (анализ и синтез), анализ часто производят «про себя»;
- **разбиение задачи на смысловые части;**
- **введение подходящих обозначений** в том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены.

Задача 1. Ваня, Петя и Сережа пошли на рыбалку и поймали вместе 51 рыбку. Ваня поймал рыбок в 2 раза больше, чем Петя, а Сережа на 3 рыбки больше, чем Петя. Сколько рыбок поймал каждый мальчик?

Ваня - ?, в 2 раза больше
 Петя - ? р.
 Сережа - ?, на 3 р. больше

Ваня	2	4	6	8	20	22		24
Петя	1	2	3	4	10	11		12
Сережа	4	5	6	7	13	14		15
Всего	7	11	15	19	43	47	Должно быть 51	51

Пусть

Ваня	$2x$ рыбок
Петя	x рыбок
Серёжа	$(x + 3)$ рыбок
Всего	51 рыбка

$$x + 2x + x + 3 = 51.$$

$$x = 12.$$

Следовательно,

Петя поймал 12 рыбок,

Ваня 24 рыбки,

Серёжа 15 рыбок.

Алгоритм

- Обозначим неизвестную величину через x .
- Выразим через нее другие величины.
- Найдем зависимость между ними и на основании ее составим уравнение.
- Решим уравнение.
- Найдем ответ на вопрос задачи.
- Проверим правильность решения задачи.
- Запишем ответ.

$$\text{Чтобы} \left\{ \begin{array}{l} A = N \cdot t \\ N = A : t \\ t = A : N \end{array} \right. \text{Если}$$

$$\text{Чтобы} \left\{ \begin{array}{l} S = a \cdot b \\ a = S : b \\ b = S : a \end{array} \right. \text{Если}$$

$$\text{Чтобы} \left\{ \begin{array}{l} s = v \cdot t \\ v = s : t \\ t = s : v \end{array} \right. \text{Если,}$$

$$\begin{array}{l} \bar{b} - m = \mathbf{на}, \\ \bar{b} - \mathbf{на} = m, \\ m + \mathbf{на} = \bar{b}, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m \cdot \mathbf{в} = \bar{b}, \\ \bar{b} : \mathbf{в} = m, \\ \bar{b} : m = \mathbf{в}, \end{array}$$

\bar{b} – большая величина,
 m – меньшая величина,
 $\mathbf{на}$ – на сколько больше или меньше,
 $\mathbf{в}$ – во сколько раз больше или меньше.

Задача 2. Пристани А и В расположены на реке, причем В – на 80 км ниже по течению, чем А. Катер прошел путь из А в В и обратно за 8 ч 20 мин. За какое время катер прошел расстояние от А до В и расстояние от В до А, если известно, что скорость в стоячей воде равна 20 км/ч?

Решение.

Первый этап.

Составление математической модели.

Пусть x км/ч – скорость течения реки.

Получим уравнение

$$\frac{80}{20+x} + \frac{80}{20-x} = \frac{25}{3}.$$

	v (км/ч)	$t = s : v$ (ч)	s (км)
По течению	$20+x$	$\frac{80}{20+x}$	80
Против течения	$20-x$	$\frac{80}{20-x}$	80

} 8ч20мин

Второй этап. Работа с составленной моделью.

Решив уравнение, находим $x = 4$.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

$$\frac{80}{24} = 3 \frac{1}{3} \text{ ч}, \quad \frac{80}{16} = 5 \text{ ч.}$$

Задача 3. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 ч. Если бы сначала первый рабочий сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

Решение.

Первый этап. Составление математической модели.

Примем всю работу за 1.

Производительность труда I рабочего $\frac{1}{x}$, а II - $\frac{1}{y}$. За 12 ч, работая отдельно, I рабочий выполнит $\frac{12}{x}$ всей работы, а II рабочий - $\frac{12}{y}$ всей работы, т.е. $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$

$\frac{x}{2}$ ч – время, которое потребуется I рабочему, чтобы сделать половину работы, $\frac{y}{2}$ ч – время, которое потребуется II рабочему, чтобы сделать половину работы, тогда $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25$.

Второй этап. Работа с составленной моделью. Решив систему

	$N=A : t$	t (ч)	A
I	$\frac{1}{x}$	x	1
II	$\frac{1}{y}$	y	1

$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25; \end{cases}$$

находим решение: $x = 20, y = 30$.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи. 20 ч и 30 ч.

Задача 4. Сплав меди и цинка содержал 82 % меди. После добавления в сплав 18 кг цинка процентное содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и сколько цинка было первоначально?

Решение.

Первый этап. Составление математической модели.

Пусть первоначальная масса сплава x кг.

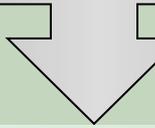
Старый сплав	ЦИНК	+	Новый сплав	=
медь	ЦИНК		медь	ЦИНК
82%			70%	
$0,82x$ кг	18кг		$0,7(x+18)$ кг	
<div style="border-top: 1px solid black; width: 100%; margin-top: 5px;"></div> x кг			<div style="border-top: 1px solid black; width: 100%; margin-top: 5px;"></div> $(x + 18)$ кг	

Расчет ведем по меди, масса меди в сплаве остается неизменной.

Получим уравнение $0,82x = 0,7(x+18)$.
Корень уравнения $x = 105$.

Тогда меди в первоначальном сплаве 86,1 кг, цинка – 18,9 кг.

Сложности при решении текстовых задач



составление математической модели

**составление уравнений и неравенств,
связывающих данные величины и переменные,
которые вводят учащиеся**

**нахождение соответствия между различными
величинами, применительно к которым
формулируется
вопрос задачи**

**решение уравнений, системы уравнений
или неравенств**

Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

1. Составление математической модели

непонимание физических, химических, экономических терминов, законов, зависимости

непонимание связи между расстоянием, скоростью и временем при равномерном движении или между работой, производительностью труда и временем и т.п.

затруднения в определении скорости сближения объектов при движении навстречу, в одном направлении или при движении по окружности

Тщательно изучить и правильно истолковать содержание задачи, выразив искомые величины через известные величины и введенные переменные.

Не зацикливаться на периодичности маршрута при движении по окружности, а мыслить только в категориях *время, путь, скорость.*

Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

2. Составление уравнений и неравенств, связывающих данные величины и переменные, которые вводят учащиеся

неправильный выбор величин, относительно которых составляется уравнение

усложнение процесса составления уравнения из-за неправильного выбора величин

Важно правильно выбрать величины, относительно которых будет составлено уравнение.

Неправильный выбор делает процесс составления уравнения более сложным.

Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

3. Нахождение соответствия между различными величинами, применительно к которым формулируется вопрос задачи

невозможность нахождения значения переменных, которые в уравнениях присутствуют и не являются необходимыми

большое количество неизвестных, нахождение значения которых не являются необходимыми

Держать в поле зрения основную цель, не боясь вводить столько вспомогательных переменных, сколько их понадобится по ходу решения.

Совсем необязательно ставить в качестве неперменного условия сведение числа неизвестных к минимуму.

Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

4. Решение уравнений, системы уравнений или неравенств

**невозможность решения уравнения,
неравенства или их системы**

**решение уравнения, неравенства или
их системы нерациональным способом**

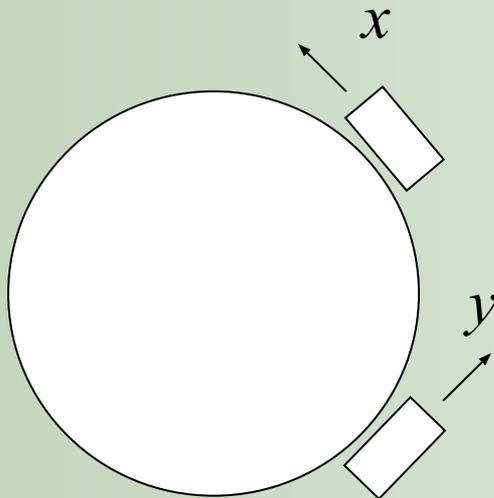
**Решение полученной
системы уравнений или
неравенств желательно
наиболее рациональным
методом.**

Задача: Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через каждые 24 с оно будет 26 м (в течение этих 24 с тела не встретятся).

Найдите скорости тел и длину окружности.

Задача: Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через каждые 24 с оно будет 26 м (в течении этих 24 с тела не встретятся).

Найдите скорости тел и длину окружности.



Решение:

Пусть l м – длина окружности, x м/мин - скорость первого тела, а y м/мин – скорость второго тела ($x > y$).

В задаче речь идет о трех ситуациях, каждую из которых можно описать уравнением.

При движении в одном направлении первое тело догоняет второе со скоростью $(x - y)$ м/мин.

После одного из обгонов следующий обгон имеет место через столько минут, сколько понадобится, чтобы преодолеть l метров со скоростью $(x - y)$ м/мин, т.е. через 56 мин:

$$\frac{l}{x - y} = 56 \quad (1)$$

При движении в разных направлениях тела сближаются со скоростью $(x + y)$ м/мин, причем l м они вместе проходят за 8 мин

$$\frac{l}{x + y} = 8 \quad (2)$$

Если первоначальное расстояние было равно 40м, осталось пройти до встречи 26 м, то общий путь составляет

$$40\text{м} - 26\text{м} = 14\text{м}.$$

Он был преодолен со скоростью $(x + y)$ м/мин за 24 с, т.е. за $\frac{24}{60}$ мин, что равно $\frac{2}{5}$ мин.

Следовательно последняя часть условия приводит к

$$\text{уравнению } \frac{14}{x+y} = \frac{2}{5} \quad (3)$$

Разделив уравнение (2) на (1), получим

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{l}{7}, \text{ отсюда } y = \frac{3}{4}x.$$

Решим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ \frac{14}{x+y} = \frac{2}{5} \end{array} \right. \Rightarrow x = 20$$

Следовательно, $y = 15$, а из уравнения (2) $l = 280$.

Ответ: 280 м, 20 м/мин, 15 м/мин.

Выводы:

- Для того, чтобы научиться решать задачи, надо приобрести опыт их решения путем многократного повторения операций, действий, составляющих предмет изучения.
- Редкие ученики самостоятельно приобретают такой опыт. Долг учителя - помочь учащимся приобрести опыт решения задач, научить их решать задачи.
- Помощь учителя не должна быть чрезмерной, но и не быть слишком малой.
- Навыки решения текстовых задач формируются на основе осмысленных знаний и умений.
- Для формирования навыков нужна тщательно продуманная система упражнений и задач «от простого к сложному».
- Знания учащихся по математике должны совершенствоваться с решением каждой новой задачи.
- Следует добиваться, чтобы осознанные умения и навыки ученики получали при наименьших затратах времени.
- Следует учитывать индивидуальные особенности и возможности учащихся.

Колесникова Е.В.
МОУ «СОШ № 20 г.Чебоксары»