Тема: «Построение графика неявно заданной функции на примере лемнискаты Бернулли»

Проект Гузь Ольги

Содержание.

Определение неявно заданной функции

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением F(x ,y)=0.

В зависимости от того, какой является функция F(x ,y)-алгебраической или трансцендентной,- кривые также делятся на алгебраические и трансцендентные.

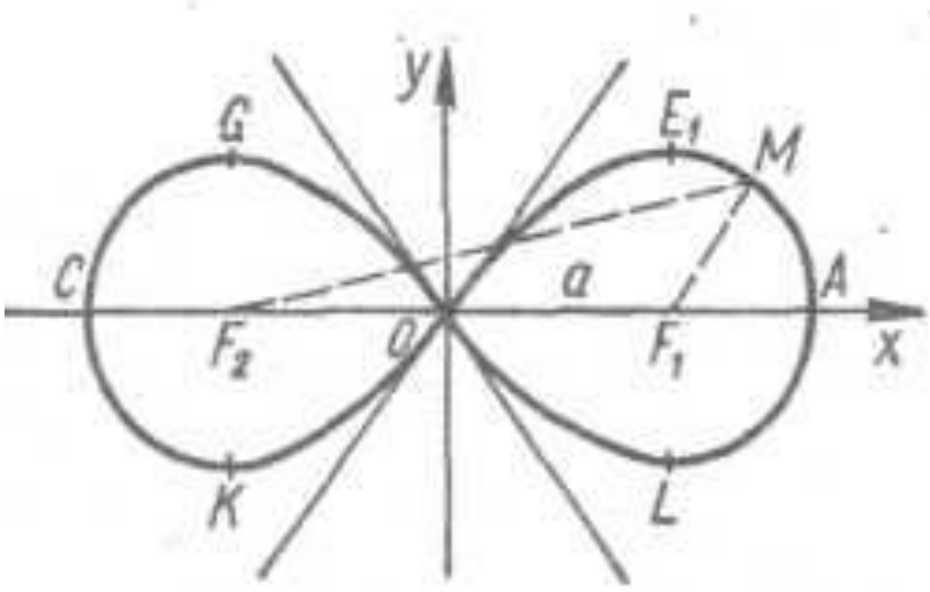
Примеры, лемниската Бернулли.

$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

Определение лемнискаты

Лемниската –

это кривая, у которой произведение расстояний каждой ее точки до двух заданных точек-фокусов -постоянно и равно квадрату половины расстояния между ними.



Вывод уравнения лемнискаты

Пусть фокусы имеют координаты: $F_1(-a;0)$ и F_2 $(a;0)$; $M(x, y)$ - произвольная точка геометрического места,

то по условию

$$F_1M \cdot F_2M = 2a$$

Подставляя в это равенство выражения

$$F_1M = \sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}; F_2M = \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2$$

Преобразование уравнения лемнискат

Дальнейшая цель- получить уравнение лемнискаты Бернулли в более простом виде.

Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$[(x^2+y^2+a^2)+2ax]\cdot[(x^2+y^2+a^2)-2ax]=a^4$$

отсюда

$$[(x^2+y^2)+a^2]^2-4a^2x^2=a^4$$

Преобразование уравнения лемнискаты

Преобразуя последнее уравнение, имеем:

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2=a^2,$$

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$$

или в окончательном виде

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

Мы получили уравнение лемнискаты в декартовой системе координат.

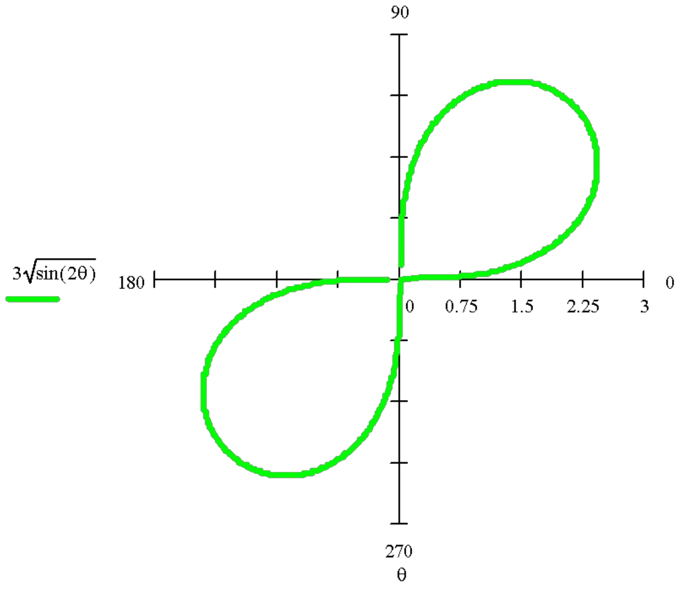
Построение графика лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

Т.к **x** и **y** входят в это уравнение только в чётных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей.

Построить график данной функции затруднительно.

Запишем это же уравнение в полярной системе координат.



Уравнение лемнискаты в полярной системе координа

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Поскольку $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $x^2+y^2= \rho^2$, то уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид

$$\rho^4=2a^2 \rho(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

или

$$\boldsymbol{\rho^2=2a^2 \cos 2\varphi.}$$

Исследование уравнения лемнискаты

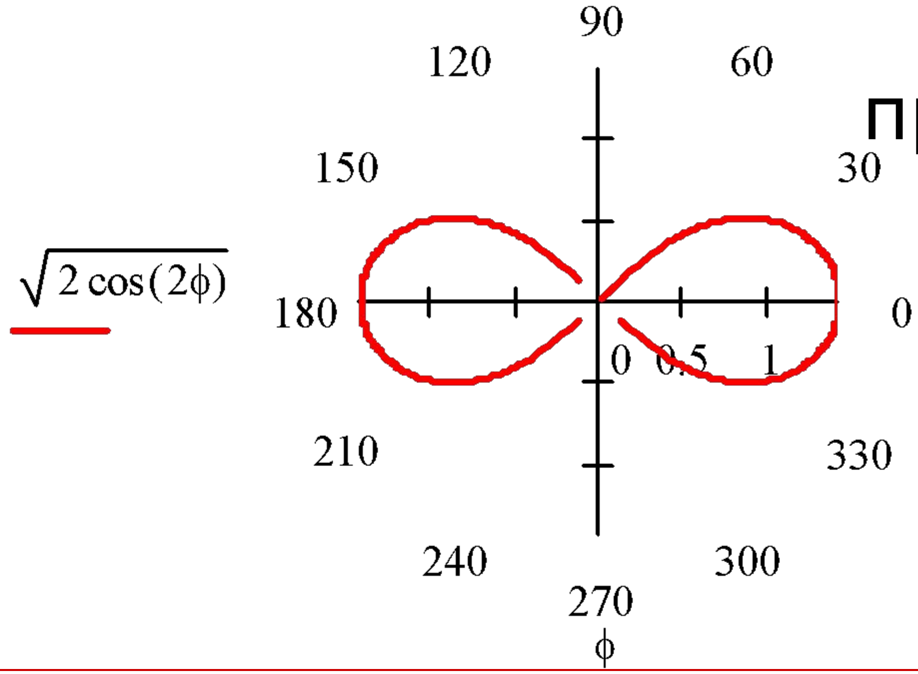
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Из этого уравнения видно, что $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Если φ увеличивается в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$, то ρ уменьшается от $\rho = a\sqrt{2}$ до $\rho = 0$.

Если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то ρ принимает мнимые значения. Это означает, что на лемнискате нет точек, для которых φ меняется в указанных пределах.

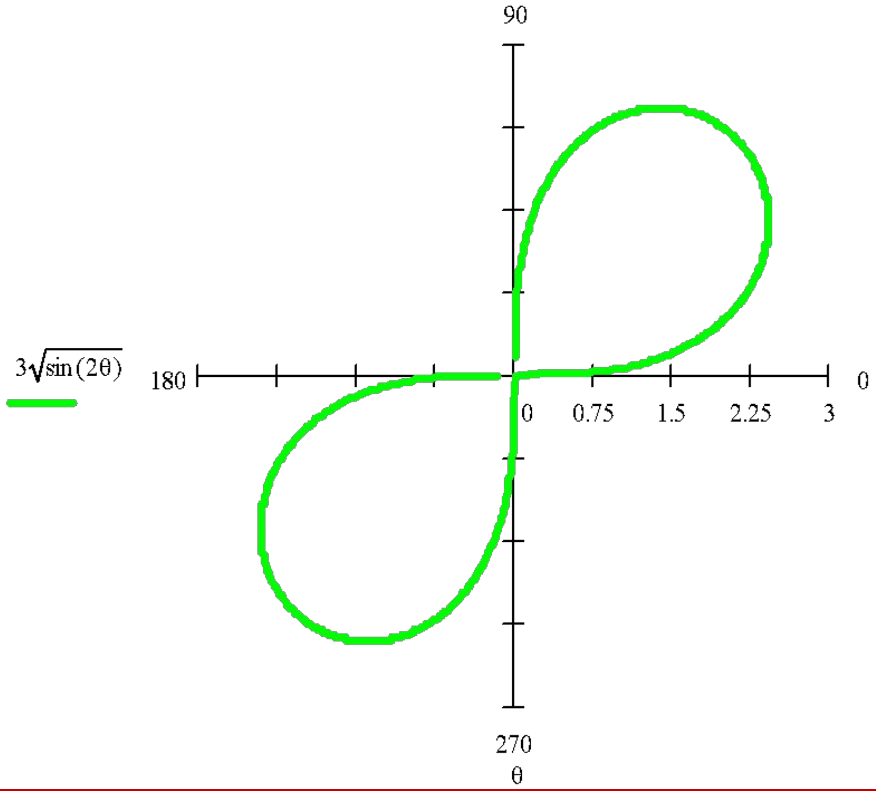
Построение лемнискаты

Построим график функции $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ при разных значениях а:



при а=1 $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$

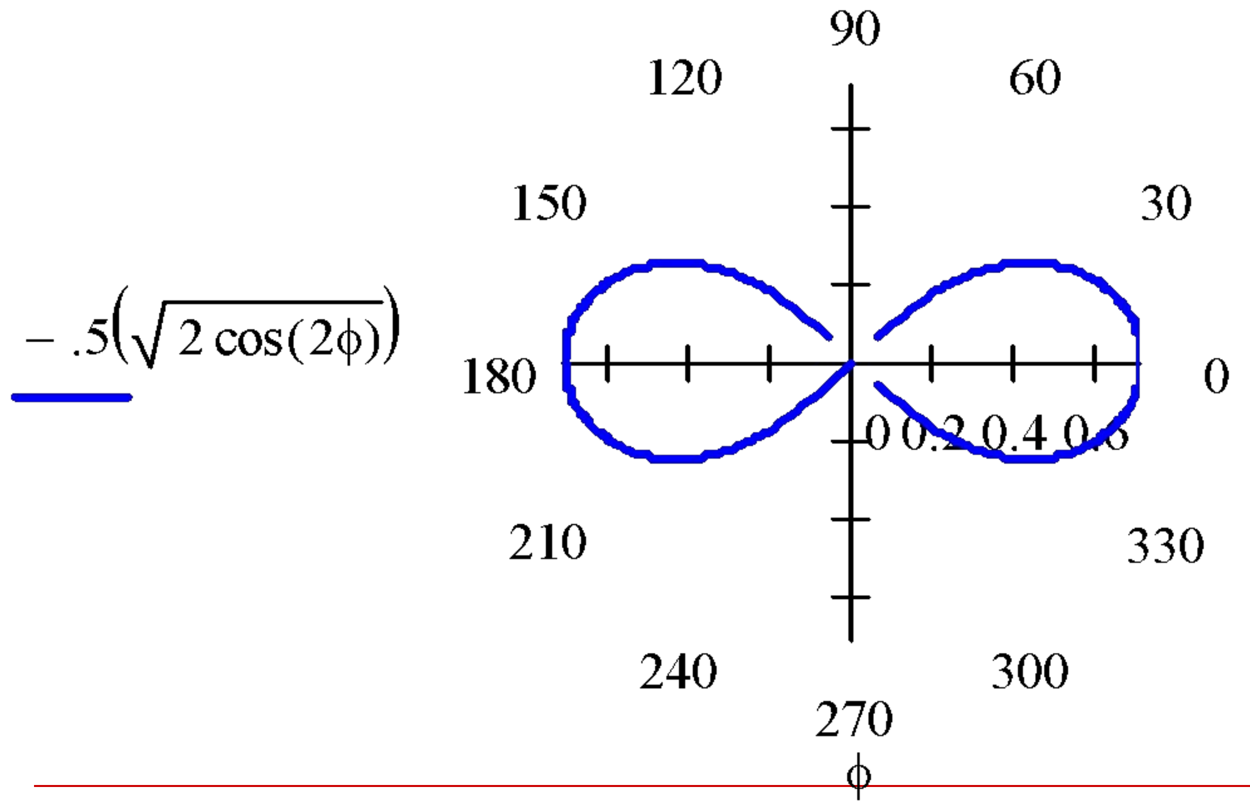
Построение лемнискаты



$$\rho = 3\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

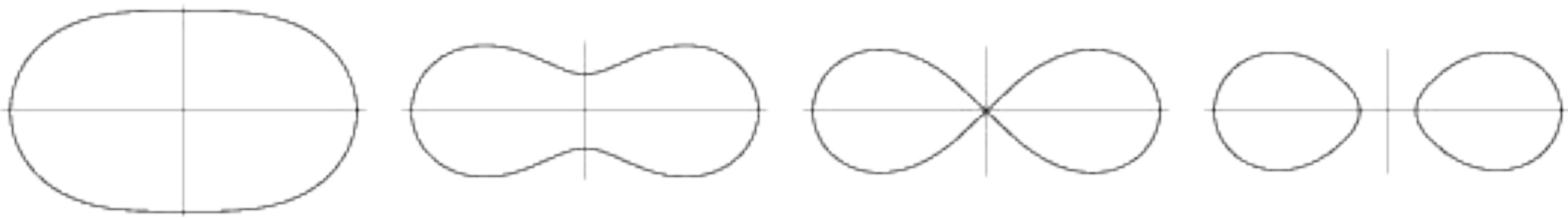
Построение лемнискаты

при a=-0,5 $\rho = -0{,}5\sqrt{2\cos 2\varphi}$



Построение

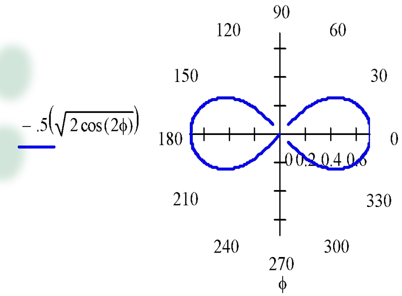
При построении кривых семейства овалов Кассини, промежуточным графиком является лемниската Бернулли.



1. 2. 3. 4.

1. Фигура выпуклая как эллипс.
2. Появляется вогнутая перемычка с четырьмя точками перегиба.
3. Перемычка смыкается, полученная фигура называется лемнискатой Бернулли.
4. Фигура разваливается на два овала.

Применение:



В технике лемниската применяется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

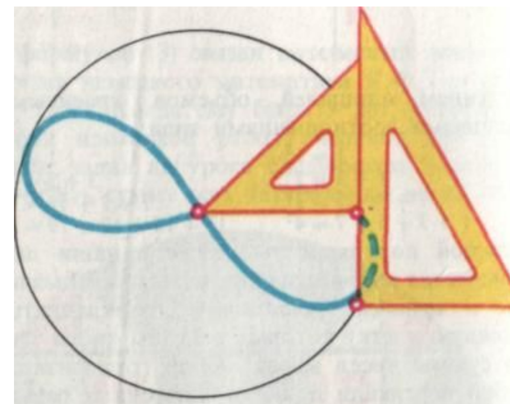
Способы построения лемнискаты

Существует два способа построения лемнискаты.

Первый способ - с помощью

двух угольников и нарисованной на листе бумаги окружности (рис.2).Вершина острого угла одного из угольников находится в центре окружности, вершина прямого угла другого -на окружности.

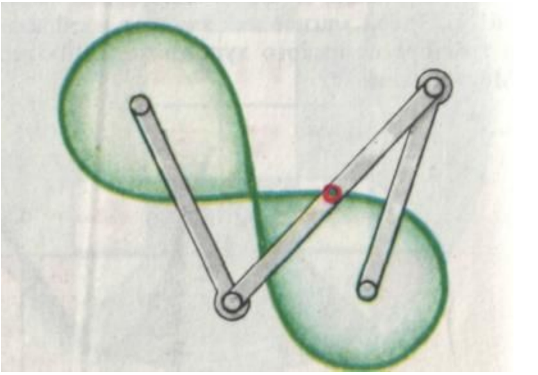
Рис.2



Способы построения лемнискаты

Второй способ - с помощью шарнирного устройства, две точки которого закреплены на плоскости (рис.3).

Рис.3



Историческая справка

<u>Лемниската Бернулли.</u>

Ее автор – швейцарский математик Якоб Бернулли. Он дал этой кривой поэтическое название «лемниската».

В античном Риме так называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх.

Краткая биография

БЕРНУЛЛИ Якоб I (1654-1705). Швейцарский математик. Работал в Базельском университете.

Работы посвящены математическому анализу, теории вероятностей и механике. В 1687 познакомился с первым мемуаром *Лейбница* по дифференциальному исчислению и применил его идеи к изучению ряда кривых, встречающихся в математике, механике, и выводу формулы радиуса кривизны плоской кривой. Ввел термин «интеграл».

Список использованной литературы

- Вирченко Н.А. и др.Справочник «Графики функций»; Киев: Наук. думка, 1979г;
- И.И.Валуцэ «Математика для техникумов»; Москва, Издательство «Наука», 1980г;
- Маркушевич А.И. «Замечательные кривые»; Москва 1978 г.

Список использованной литературы

Internet-ресурсы: WWW.Colledg.Ru; WWW.5ballov.Ru; WWW.bankreferatov.Ru; WWW.rubricon.com.

Программное обеспечение: MS Word; MS Power Point;Windows Media; Nero Wave Editor; Сканер.