# Учимся решать задачи на смеси и сплавы

Работа ученицы 7 класса Г
МОУ «СОШ № 24»г. Северодвинска
Лысковской Татьяны
Учитель математики Паршева В.В.

2008г.

# Немного теории

- Для решения данного вида задач необходимо знать, что такое концентрация вещества в смеси (растворе или сплаве). Пусть в смесь входят компоненты *A, B и C с* массами $m_A$, $m_B$, $m_C$ соответственно. Будем считать, что масса *m* смеси равна сумме масс компонентов, т.е. $m = = m_A + m_B + m_C$. Тогда *концентрацией компонента A по массе* будем называть отношение массы этого компонента к массе всей смеси и обозначать как $C_A$ *:*

$$c_A = \frac{m_A}{m} = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C},$$

*Аналогично для компонентов B и C*

$$c_B = \frac{m_B}{m} = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C}, \qquad c_C = \frac{m_C}{m} = \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C},$$

- *Концентрация — безразмерная величина. Понятно, что сумма концентраций всех компонентов смеси равна 1* ($C_A + C_B + C_C = 1$).

- *Процентным содержанием компонента А* называется число $p_A = c_A \cdot 100\%$, т.е. это концентрация вещества, выраженная в процентах.
- Аналогично $p_B = c_B \cdot 100\%$ и

$$p_C = c_C \cdot 100\%.$$

# Задача

| | Масса | % олова | Масса олова |
|---|---|---|---|
| 1 кусок | 300г. | 20%=0, 2 | ?<br>*1)0,2x300=60(г)* |
| 2 кусок | 200 г. | 40%=0, 4 | *2)0,4x200=80(г)* |
| Сплав | *3)300+200=500(г)* | ?<br>*5)140:500x100%=<br>=28%* | *4)60+80=140(г)* |

# Задача

| | М | % кислоты | М кислоты |
|---|---|---|---|
| *1 раствор* | *300* | *50%* | *1) 50%= 0, 5;*<br>*0, 5х300=150 (г)* |
| *2 раствор* | *100* | *30%* | *2) 30%= 0, 3;*<br>*0,3х100= 30 (г)* |
| *Смесь 1и 2 раствора* | *3) 300+100= = 400 (г)* | *4) 180:400х100%= = 45%* | |

**Ответ: 45%**

# Алгоритм решения задач такого типа

| | M | % олова | M олова |
|---|---|---|---|
| 1кусок | $M_1$ | $P_1\% = P_1/100$ | $P_1 M_1/100$ 1) |
| 2 кусок | $M_2$ | $P_2\% = P_2/100$ | $P_2 M_2/100$ 2) |
| Сплав из 1и 2 куска | $M_1 + M_2$ 4) | P%-? $\frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2}$ 5) | $\frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{100}$ 3) |

1) Масса олова в первом куске.
2) Масса олова во втором куске.
3) Масса олова в двух кусках.
4) Масса сплава в двух кусках.
5) Процентное содержание олова в двух кусках.

*Дано:*

$M_1 = 1$ л. $P_1 = 10\%$

$M_2 = 4$ л. $P_2 = 0\%$

*Найти:* $P\%$

*Решение:* $P\% = \dfrac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \dfrac{10 \times 1 + 0 \times 4}{1 + 4} = 10/5 = 2\%$

*Ответ:* 2% соли.

*Дано:*

$M_1 = 6л.$ $P_1 = 60\%$

$M_2 = 4л.$ $P_2 = 0\ \%$

*Найти:* $P\%$

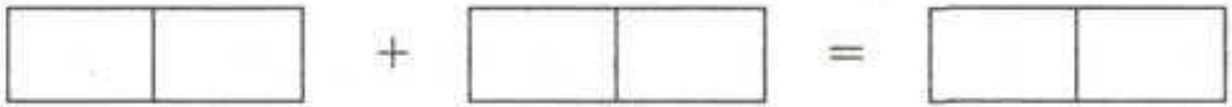
*Решение:* $P\% = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{60x6 + 0x4}{6+4} = 180/10 = 18\%$

*Ответ 18% кислоты.*

- При решении задач данного типа полезно пользоваться наглядной моделью — схемой, в которой смесь (раствор, сплав) изображается в виде прямоугольника, разбитого на фрагменты в соответствии с числом входящих в нее (в него) компонентов, а непосредственно при составлении уравнения — проследить содержание какого-нибудь одного компонента.

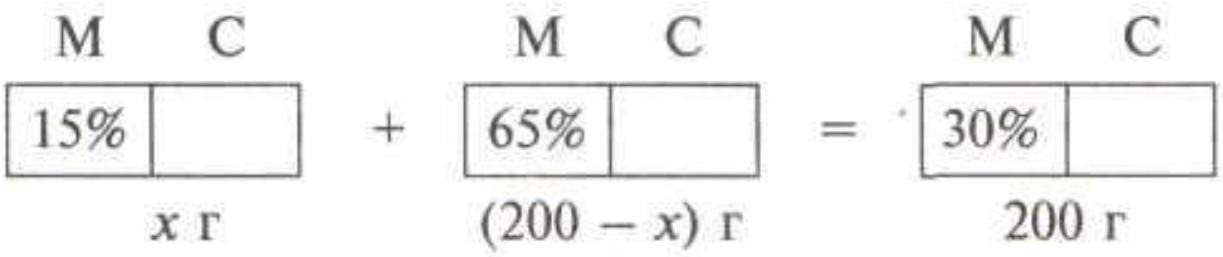
**Пример 1.** Имеются два сплава меди со свинцом. Один сплав содержит15% меди, а другой 65%. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 200 г сплава, содержащего 30% меди?

*Решение*. Изобразим каждый сплав в виде прямоугольника,
разбитого на два фрагмента. Поскольку данные сплавы соединяют в новый (на схеме эту операцию обозначим знаком « + » между прямоугольниками, а тот факт, что третий сплав — результат смешения первых двух, покажем с помощью знака «=») и он содержит те же самые компоненты, изобразим получающийся сплав в виде такого же прямоугольника



- Сверху подпишем названия компонентов сплавов. Обычно бывает достаточно указать первые буквы в их названиях (если они различны). В данном случае — это буквы М (медь) и С (свинец).
- Теперь внутри соответствующих фрагментов каждого прямоугольника запишем данное в условии процентное содержание элементов (в нашем примере только меди), а под прямоугольником укажем массу сплава (нам известна только масса третьего сплава).

- В результате получим следующую модель рассматриваемой в задаче ситуации




- Решим задачу двумя способами.

*Дано:*

$M_1 = 30в.$ $P_1 = 48\%$

$M_2 = 24в.$ $P_2 = 36\%$

*Найти:* $P\%$.

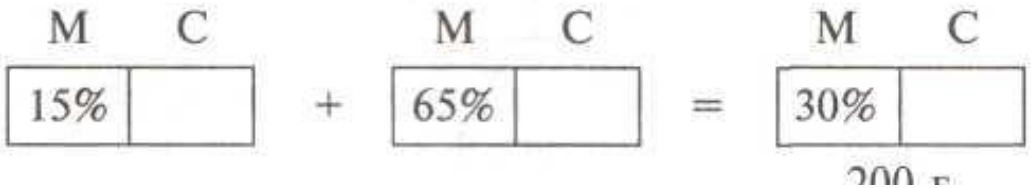
*Решение:* $P\% = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{48x30 + 24x36}{30+24} = \frac{1440+864}{54} =$

$= 2304/54 = 42,6\ \%$

*Ответ:* 43%.

# Первый способ

- Пусть масса первого сплава x г, тогда масса второго сплава (200 - x) г. Дополним модель данными




Зная, что сумма масс меди в исходных сплавах равна массе меди в новом сплаве, составим уравнение $0{,}15x + 0{,}65(200 - x) = 0{,}3 \cdot 200$, из которого $x = 140$.

Следовательно, надо взять 140 г первого сплава и 200 — 140 = 60 г - второго.

# Второй способ.

- Можно обозначить *x* г и *y* г массу первого и второго сплава соответственно.

| М | С | | М | С | | М | С |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15% | | + | 65% | | = | 30% | |
| *x* г | | | *y* г | | | 200 г | |

Очевидно, $x + y = 200$ — первое уравнение системы. Второе уравнение получим, приравняв сумму масс меди в исходных сплавах и в новом сплаве. Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0{,}15x + 0{,}65y = 0{,}3 \cdot 200, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 140 \\ y = 60. \end{cases}$$

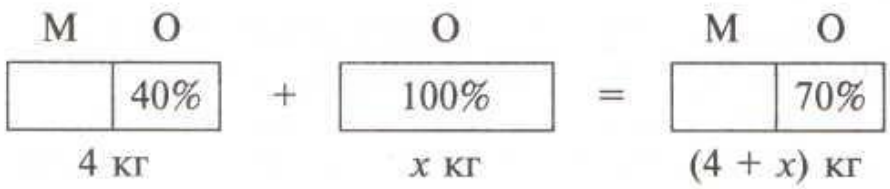
Ответ: 140 г, 60 г.

# Замечание.

- Обратите внимание на то, что в любом из рассмотренных способов решения можно было составить уравнение и на основе подсчета масс свинца. Ясно, что если в первом сплаве медь составляет 15% от его общей массы, то на свинец приходится 85%. Аналогично во втором и третьем сплавах свинца будет 35% и 70% соответственно. Тогда, решая задачу первым способом, получим уравнение
- $0{,}85x + 0{,}35(200 - x) = 0{,}7 \cdot 200$.
- Очевидно, оно равносильно уравнению $0{,}15x + 0{,}65(200 - x) = 0{,}3 \cdot 200$.
- Из двух возможных уравнений обычно выбирают то, что проще составить по условию задачи или легче будет решить.

**Пример 2.** В 4 кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова надо добавить к этому сплаву, чтобы содержание олова в новом сплаве было равно 70%?

*Решение.* Обозначим компоненты сплава буквами М (медь) и О (олово). Пусть к сплаву надо добавить *x* кг олова, тогда масса нового сплава будет равна (4 + *x)* кг. Составим модель рассматриваемой в задаче ситуации.



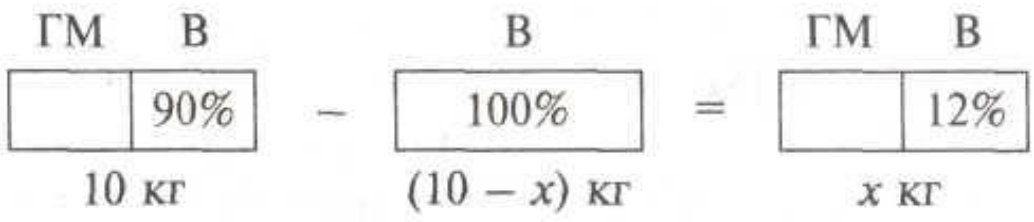

Так как сумма масс олова, указанных в левой части схемы (до смешения сплавов), равна массе олова в новом сплаве, можно составить уравнение

$$0{,}4 \cdot 4 + x = 0{,}7(4 + x), \text{ откуда } x = 4.$$

Ответ: 4 кг.

**Пример 3.** Свежие грибы содержат 90% влаги, а сушеные — 12% влаги. Сколько сушеных грибов получится из 10 кг свежих?

- Решение. Введем обозначения: ГМ — грибная масса, В — вода (влага). Процесс сушки грибов состоит в удалении из них большей части влаги. Если принять за *x* кг массу сушеных грибов, то масса удаленной влаги будет равна (10 - x) кг. Теперь нетрудно составить необходимую для дальнейшего решения схему



Можно составить уравнение на основе подсчета масс влаги, учитывая, что она удаляется из грибов:

0,9 •10-(10-x) = 0,12x.

Однако поступим иначе. Найдем процентное содержание грибной массы в свежих и в сушеных грибах и, учитывая, что она в результате сушки не изменилась, составим уравнение 0,1 • 10 = 0,88x.

| ГМ | В | | В | | ГМ | В |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10% | 90% | – | 100% | = | 88% | 12% |
| 10 кг | | | (10 – x) кг | | x кг | |

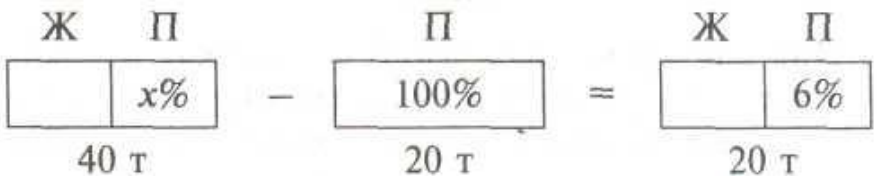
Ясно, что второе уравнение проще первого. Решив его, найдем

$$x = 1\frac{3}{22}$$

Ответ: $1\frac{3}{22}\,кг$ .

**Пример 4.** Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

- Решение. Воспользуемся следующими обозначениями: Ж — железо в руде и стали, П — примеси. В процессе плавки удаляется большая часть примесей. Пусть в руде их содержится *x %.* Составим вспомогательную схему:




Рассуждая, как и в предыдущей задаче, придем к уравнению

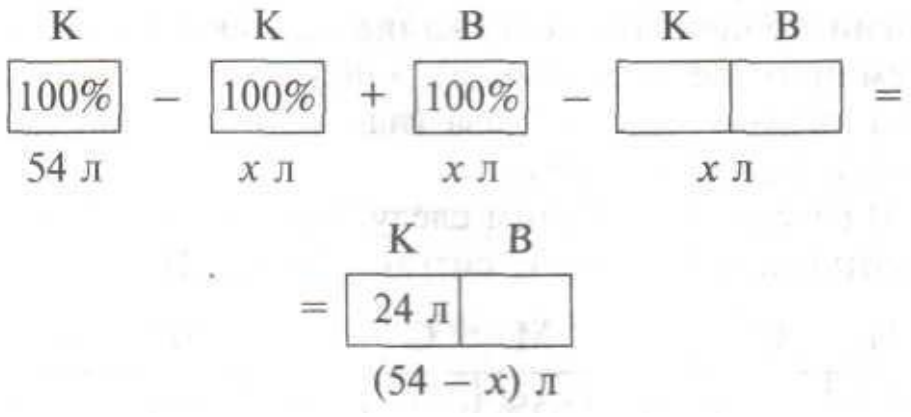
$$0{,}01 \cdot x \cdot 40 - 20 = 0{,}06 \cdot 20.$$

Или, выразив процентное содержание железа в руде и стали:(100 -*x)%* и 94% соответственно, приравняем массы железа в обоих случаях, получим равносильное уравнение$0{,}01 \cdot (100 - x) \cdot 40 = 0{,}94 \cdot 20$, откуда $x = 53$.

Ответ: 53%.

# Пример 5

- ***Задача***. Из бака емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой. Потом опять вылили столько же литров смеси, после чего в баке осталось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
- ***Решение.*** Введем обозначения: К — кислота, В — вода. Пусть *x* л - количество кислоты, отлитой из бака в первый раз. Описанную в задаче ситуацию можно представить в виде следующей схемы

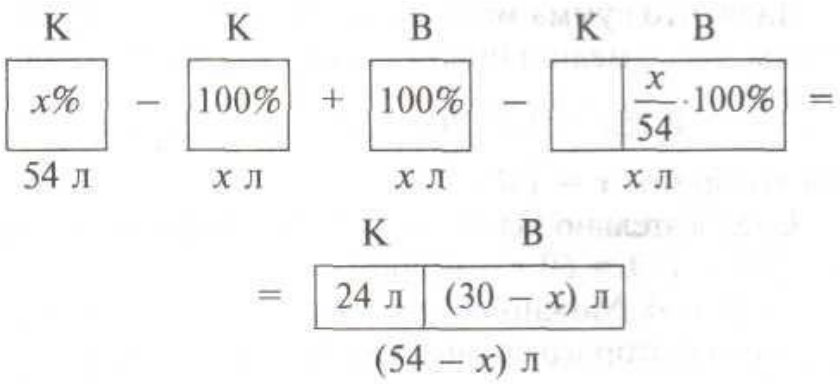


Однако работа со схемой затруднительна: не хватает данных, чтобы составить уравнение.

Определим процентное содержание воды в отлитой смеси. После второй операции (когда кислоту заменили водой) в баке получилась смесь, в которой на 54 л приходится *x* л воды. Следовательно, процентное содержание воды в этой

смеси равно

Кроме того, после третьей операции (когда вылили x л смеси) в баке стало (54-x)-24=(30-x)л воды. Добавим эти данные в схему




Ясно, что количество воды, казанное в схеме слева и справа от знака равенства, одно и то же, т.е.

$$x - \frac{x}{54} \cdot x = 30 - x.$$

$$x - \frac{x}{54} \cdot x = 30 - x.$$

*$54x - x^2 = 1620 - 54x;$*

*$x^2 - 108x + 1620 = 0.$*

Корни уравнения: x=90, x=18. Первый корень не подходит по смыслу задачи (нельзя отлить 90л из бочки, вмещающей всего 54л).

Ответ:18л

# Задача 6

- Слиток сплава серебра с цинком весом в 3.5 кг содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10.5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

*Решение:*

1) 3.5-0.76 = 2.66 (кг) серебра в первом слитке.
2) 10.5-0.84 = 8.82 (кг) серебра в 10.5 кг сплава.
3) 8.82 - 2.66 = 6.16 (кг) серебра во втором слитке.
4) 10.5 - 3.5 = 7 (кг) вес второго слитка.
5) 6.16: 7 = 0.88 = 88% серебра содержалось во втором слитке.

Ответ: 88% серебра содержалось во втором слитке.