Учимся решать задачи на смеси и сплавы

Работа ученицы 7 класса Г
МОУ «СОШ № 24»г. Северодвинска
Лысковской Татьяны
Учитель математики Паршева В.В.

2008г.

Немного теории

- Для решения данного вида задач необходимо знать, что такое концентрация вещества в смеси (растворе или сплаве). Пусть в смесь входят компоненты *A, B и C с* массами m_A, m_B, m_C соответственно. Будем считать, что масса m смеси равна сумме масс компонентов, т.е. $m = = m_A + m_B + m_C$. Тогда *концентрацией компонента А по массе* будем называть отношение массы этого компонента к массе всей смеси и обозначать как C_A :

$$c_A = \frac{m_A}{m} = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C},$$

Аналогично для компонентов В и С

$$c_B = \frac{m_B}{m} = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C}, \qquad c_C = \frac{m_C}{m} = \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C},$$

- *Концентрация — безразмерная величина. Понятно, что сумма концентраций всех компонентов смеси равна 1 ($C_A + C_B + C_C = 1$).*

- *Процентным содержанием компонента A* называется число $p_A = c_A \bullet 100\%$, т.е. это концентрация вещества, выраженная в процентах.
- Аналогично $p_B = c_B \bullet 100\%$ и

$$p_C = c_C \bullet 100\%.$$

Задача

	Масса	% олова	Масса олова
1 кусок	300г.	20%=0, 2	? *1)0,2x300=60(г)*
2 кусок	200 г.	40%=0, 4	*2)0,4x200=80(г)*
Сплав	*3)300+200=500(г)*	? *5)140:500x100%= =28%*	*4)60+80=140(г)*

Задача

	M	% кислоты	M кислоты
1 раствор	*300*	*50%*	*1) 50%= 0, 5;* *0, 5х300=150 (г)*
2 раствор	*100*	*30%*	*2) 30%= 0, 3;* *0,3х100= 30 (г)*
Смесь 1и 2 раствора	*3) 300+100= = 400 (г)*	*4) 180:400х100%= = 45%*	

Ответ: 45%

Алгоритм решения задач такого типа

	M	% олова	M олова	
1кусок	M_1	$P_1\%=P_1/100$	$P_1 M_1/100$	1)
2 кусок	M_2	$P_2\%=P_2/100$	$P_2 M_2/100$	2)
Сплав из 1и 2 куска	M_1+M_2 4)	P%-? $\dfrac{P_1M_1+P_2M_2}{M_1+M_2}$ 5)	$\dfrac{P_1M_1+P_2M_2}{100}$	3)

1) Масса олова в первом куске.
2) Масса олова во втором куске.
3) Масса олова в двух кусках.
4) Масса сплава в двух кусках.
5) Процентное содержание олова в двух кусках.

Дано:

$M_1=1$ л. $\quad P_1= 10\%$

$M_2=4$ л. $\quad P_2=0\%$

Найти: P%

Решение: $P\%= \dfrac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \dfrac{10x1+0x4}{1+4} =10/5=2\%$

Ответ: 2% соли.

Дано:

M_1 =6л. P_1=60%

M_2=4л. P_2=0 %

Найти: P%

Решение:

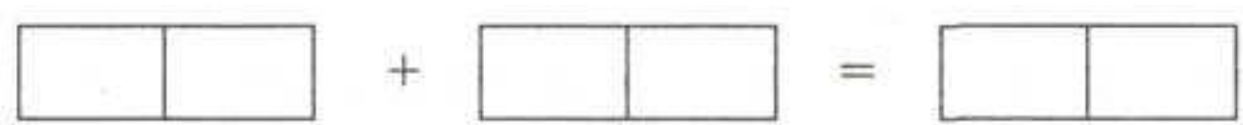
$$P\% = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{60 \times 6 + 0 \times 4}{6+4} = 180/10 = 18\%$$

Ответ 18% кислоты.

- При решении задач данного типа полезно пользоваться наглядной моделью — схемой, в которой смесь (раствор, сплав) изображается в виде прямоугольника, разбитого на фрагменты в соответствии с числом входящих в нее (в него) компонентов, а непосредственно при составлении уравнения — проследить содержание какого-нибудь одного компонента.

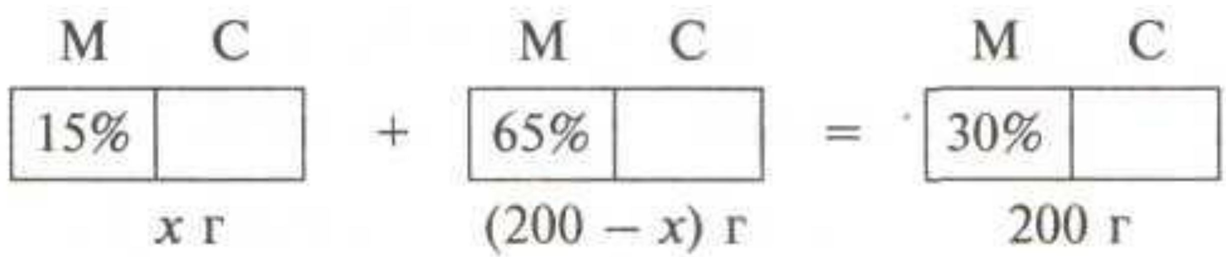
Пример 1. Имеются два сплава меди со свинцом. Один спла
содержит15% меди, а другой 65%. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 200 г сплава, содержащего 30% меди?

Решение. Изобразим каждый сплав в виде прямоугольника,
разбитого на два фрагмента. Поскольку данные сплавы соединяют в новый (на схеме эту операцию обозначим знаком « + » между прямоугольниками, а тот факт, что третий сплав — результат смешения первых двух, покажем с помощью знака «=») и он содержит те же самые компоненты, изобразим получающийся сплав в виде такого же прямоугольника



- Сверху подпишем названия компонентов сплавов. Обычно бывает достаточно указать первые буквы в их названиях (если они различны). В данном случае — это буквы М (медь) и С (свинец).
- Теперь внутри соответствующих фрагментов каждого прямоугольника запишем данное в условии процентное содержание элементов (в нашем примере только меди), а под прямоугольником укажем массу сплава (нам известна только масса третьего сплава).

- В результате получим следующую модель рассматриваемой в задаче ситуации



- Решим задачу двумя способами.

Дано:

$M_1 = 30$в. $\qquad P_1 = 48\%$

$M_2 = 24$в. $\qquad P_2 = 36\%$

Найти: P%.

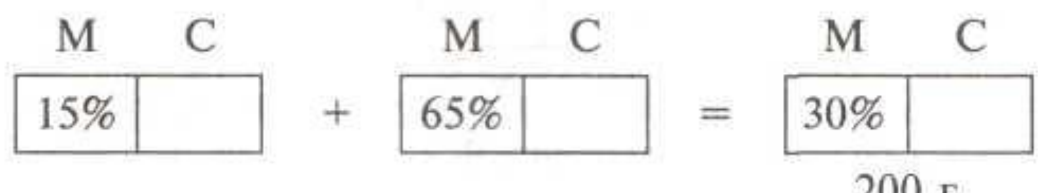
Решение: $P\% = \dfrac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \dfrac{48x30 + 24x36}{30+24} = \dfrac{1440+864}{54} =$

$= 2304/54 = 42,6\ \%$

Ответ: 43%.

Первый способ

- Пусть масса первого сплава х г, тогда масса второго сплава (200 - х) г. Дополним модель данными



Зная, что сумма масс меди в исходных сплавах равна массе меди в новом сплаве, составим уравнение $0{,}15x + 0{,}65(200 - x) = 0{,}3 \cdot 200$, из которого $x = 140$.

Следовательно, надо взять 140 г первого сплава и 200 — 140 = 60 г - второго.

Второй способ.

- Можно обозначить *x* г и *y* г массу первого и второго сплава соответственно.

М	С		М	С		М	С
15%		+	65%		=	30%	
x г			y г			200 г	

Очевидно, *x* + *y* = 200 — первое уравнение системы.
Второе уравнение получим, приравняв сумму масс
меди в исходных сплавах и в новом сплаве. Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0{,}15x + 0{,}65y = 0{,}3 \cdot 200, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 140 \\ y = 60. \end{cases}$$

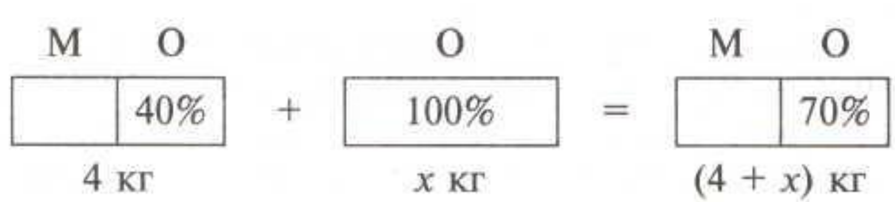
Ответ: 140 г, 60 г.

Замечание.

- Обратите внимание на то, что в любом из рассмотренных способов решения можно было составить уравнение и на основе подсчета масс свинца. Ясно, что если в первом сплаве медь составляет 15% от его общей массы, то на свинец приходится 85%. Аналогично во втором и третьем сплавах свинца будет 35% и 70% соответственно. Тогда, решая задачу первым способом, получим уравнение
- $0{,}85x + 0{,}35(200 - x) = 0{,}7 \cdot 200.$
- Очевидно, оно равносильно уравнению $0{,}15x + 0{,}65(200 - x) = 0{,}3 \cdot 200.$
- Из двух возможных уравнений обычно выбирают то, что проще составить по условию задачи или легче будет решить.

Пример 2. В 4 кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова надо добавить к этому сплаву, чтобы содержание олова в новом сплаве было равно 70%?

Решение. Обозначим компоненты сплава буквами М (медь) и О (олово). Пусть к сплаву надо добавить *x* кг олова, тогда масса нового сплава будет равна (4 + *x)* кг. Составим модель рассматриваемой в задаче ситуации.



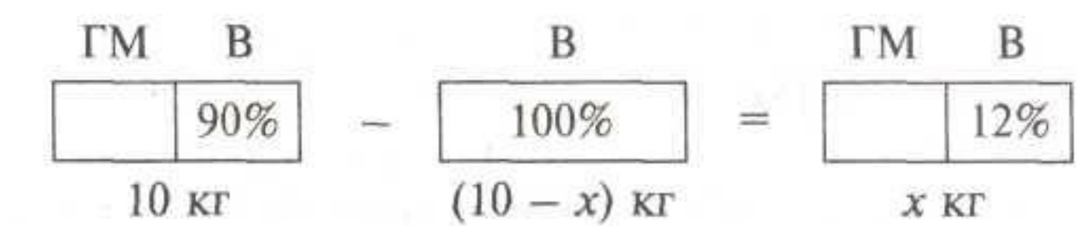
Так как сумма масс олова, указанных в левой части схемы (до смешения сплавов), равна массе олова в новом сплаве, можно составить уравнение

$$0{,}4 \cdot 4 + x = 0{,}7(4 + x),$$ откуда $x = 4$.

Ответ: 4 кг.

Пример 3. Свежие грибы содержат 90% влаги, а сушеные — 12% влаги. Сколько сушеных грибов получится из 10 кг свежих?

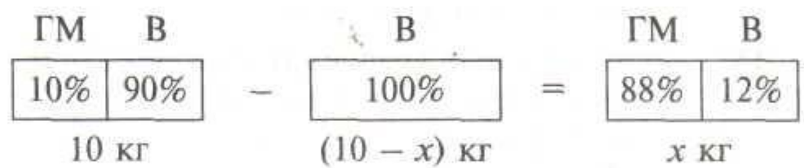
- Решение. Введем обозначения: ГМ — грибная масса, В — вода (влага). Процесс сушки грибов состоит в удалении из них большей части влаги. Если принять за *x* кг массу сушеных грибов, то масса удаленной влаги будет равна (10 - x) кг. Теперь нетрудно составить необходимую для дальнейшего решения схему



Можно составить уравнение на основе подсчета масс влаги, учитывая, что она удаляется из грибов:

$0{,}9 \bullet 10-(10-x) = 0{,}12x.$

Однако поступим иначе. Найдем процентное содержание грибной массы в свежих и в сушеных грибах и, учитывая, что она в результате сушки не изменилась, составим уравнение $0{,}1 \bullet 10 = 0{,}88x.$



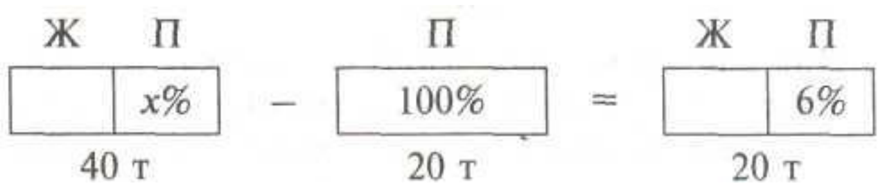
Ясно, что второе уравнение проще первого. Решив его, найдем

$$x = 1\frac{3}{22}$$

Ответ: $1\frac{3}{22}$ *кг* .

Пример 4. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

- Решение. Воспользуемся следующими обозначениями: Ж — железо в руде и стали, П — примеси. В процессе плавки удаляется большая часть примесей. Пусть в руде их содержится *x %.* Составим вспомогательную схему:



Рассуждая, как и в предыдущей задаче, придем к уравнению

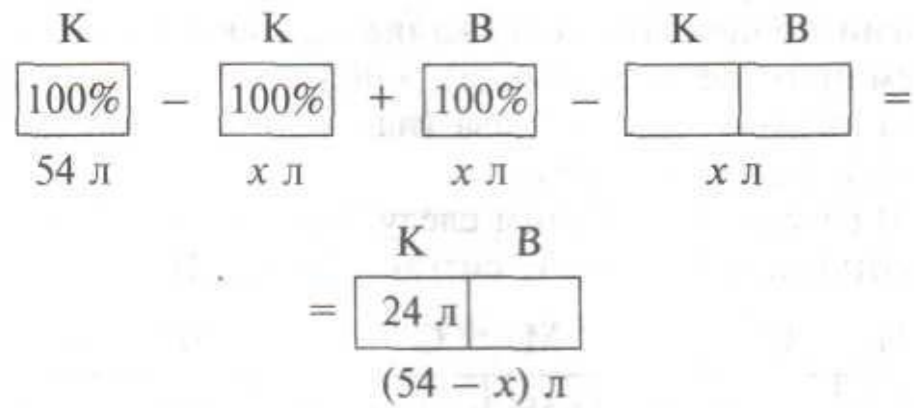
$$0{,}01 \cdot x \cdot 40 - 20 = 0{,}06 \cdot 20.$$

Или, выразив процентное содержание железа в руде и стали:(100 *-x)%* и 94% соответственно, приравняем массы железа в обоих случаях, получим равносильное уравнение$0{,}01 \cdot (100 - x) \cdot 40 = 0{,}94 \cdot 20$, откуда $x = 53$.

Ответ: 53%.

Пример 5

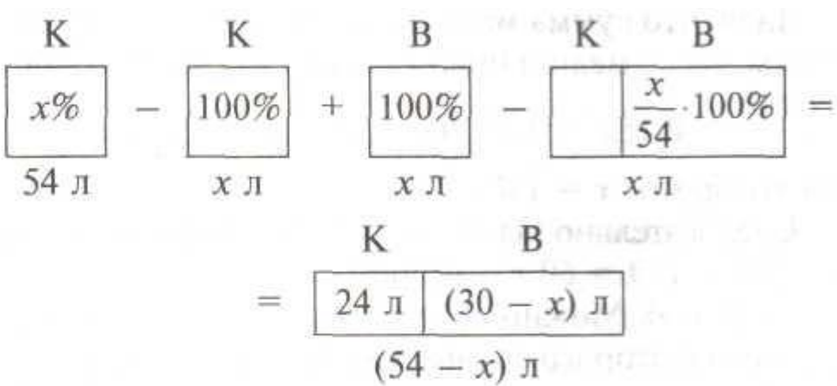
- ***Задача***. Из бака емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой. Потом опять вылили столько же литров смеси, после чего в баке осталось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
- ***Решение.*** Введем обозначения: К — кислота, В — вода. Пусть *x* л - количество кислоты, отлитой из бака в первый раз. Описанную в задаче ситуацию можно представить в виде следующей схемы



Однако работа со схемой затруднительна: не хватает данных, чтобы составить уравнение.

Определим процентное содержание воды в отлитой смеси. После второй операции (когда кислоту заменили водой) в баке получилась смесь, в которой на 54 л приходится *x* л воды. Следовательно, процентное содержание воды в этой смеси равно

Кроме того, после третьей операции (когда вылили х л смеси) в баке стало (54-х)-24=(30-х)л воды. Добавим эти данные в схему



Ясно, что количество воды, казанное в схеме слева и справа от знака равенства, одно и то же, т.е.

$$x-\frac{x}{54}\cdot x=30-x.$$

$$x-\frac{x}{54}\cdot x=30-x.$$

54x-x² =1620-54x;

x² -108x+1620=0.

Корни уравнения: x=90, x=18. Первый корень не подходит по смыслу задачи (нельзя отлить 90л из бочки, вмещающей всего 54л).

Ответ:18л

Задача 6

- Слиток сплава серебра с цинком весом в 3.5 кг содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10.5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

Решение:
1) 3.5-0.76 = 2.66 (кг) серебра в первом слитке.
2) 10.5-0.84 = 8.82 (кг) серебра в 10.5 кг сплава.
3) 8.82 - 2.66 = 6.16 (кг) серебра во втором слитке.
4) 10.5 - 3.5 = 7 (кг) вес второго слитка.
5) 6.16: 7 = 0.88 = 88% серебра содержалось во втором слитке.
Ответ: 88% серебра содержалось во втором слитке.