ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2011

С 6

ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПБ АППО

ЗАДАНИЕ С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

- **ТРЕБОВАНИЯ:** Уметь строить и исследовать простейшие математические модели
- **СОДЕРЖАНИЕ:** Числа, корни и степени, основы тригонометрии, логарифмы, преобразования выражений
- **ПРИМЕРНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ**

БАЗОВЫЙ: -

ПРОФИЛЬНЫЙ : 40 мин

Задача С6

Найдите все тройки натуральных чисел *k, m и n*, *удовлетворяющие* уравнению $2\cdot k!=m!-2\cdot n!$ $(1!=1;\ 2!=1\cdot 2=2;\ n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)$.

Решение

1. Так как $m!=2\cdot k!+2\cdot n!$, *то* $n<m$ *и* $k<m$.

2. Пусть $k\le n$, *тогда* $4\cdot n!\ge 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\ge (n+1)\cdot n!$, *откуда* $4\ge n+1$ *и* $k\le n\le 3$.

3. Пусть $k>n$, *тогда* $4\cdot k!\ge 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\ge (k+1)\cdot k!$, *откуда* $4\ge k+1$ *и* $n<k\le 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1\le n\le 3$, $1\le k\le 3$ *находим все* решения.

n	k	$m!=2\cdot k!+2\cdot n!$	m
3	3	$m!=24$	4
3	2	$m!=20$	*Нет решений*
3	1	$m!=18$	*Нет решений*
2	3	$m!=20$	*Нет решений*
2	2	$m!=8$	*Нет решений*
2	1	$m!=6$	3
1	3	$m!=14$	*Нет решений*
1	2	$m!=6$	3
1	1	$m!=14$	*Нет решений*

Критерии оценивания выполнения задания С6
Баллы
Обоснованно получен верный ответ. 4

Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы.
3

Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако Конечность перебора не обоснована.
2

Приведен хотя бы один из правильных наборов, и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство. 1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. 0

m! должно быть больше n!, чтобы выполнялось условие $2k! = m! - 2n!$

Предположим, что $k=2, m=3, n=1$. Проверяем

$2 \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$3! - 2 \cdot 1! = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$

$\Rightarrow 2 \cdot 2! = 3! - 2 \cdot 1!$ наше предположение верно

При увеличении значений чисел разница между ними будет увеличиваться, а значит равенство не будет выполняться. Тогда единственным ответом будет $k=2, m=3, n=1$

Ответ: $k=2$; $m=3$; $n=1$

1 балл 1 балл гарантирован, так как одна верная тройка чисел
указана и проверка произведена. Дальнейшие «эвристические» соображения просто неверны.

$2k! = m! - 2n!$

$k! + n! = \frac{m!}{2} \Rightarrow m > k;\ m > n$, т.к. $m, n, k \in N$, то

наименьшее значение $m = 2$; при $m = 2 \cdot \frac{m}{2} = 1$, а

минимальное значение $k! + n! = 2$

при $m = 3$ $k = 1$ $n = 2$ или $k = 2$ $n = 1$

при $m = 4$ $\frac{m!}{2} = 12$ $n! + k! = 12 \Rightarrow n = 3$ $k = 3$

при $m = 5$ $\frac{m!}{2} = 60$, а наибольшая сумма $n! + k!$ при

данном m будет 58

при $m = 6$ $\frac{m!}{2} = 390$, а наибольшая сумма $n! + k!$

при данном m будет 240

при $m = 7$ $\frac{m!}{2} = 2730$, а наибольшая сумма $n! + k!$

при данном m будет 1560 и т.д.

т.е. при увеличении m разрыв между $\frac{m!}{2}$ и $k! + n!$

будет увеличиваться. Отсюда далее решений нет.

Ответ: $m = 3, k = 1, n = 2$; $m = 3, k = 2, n = 1$; $m = 4, n = 3, k = 3$.

2 балла 2 балла гарантированы, так как все три верные тройки
чисел указаны и проверка произведена. Дальнейшие «эвристические»
соображения верны (т. е. контрпримера не существует), но не обоснованы.

С6. $2\cdot k! = m! - 2\cdot n!$ $\quad k, m, n \in \mathbb{N}$. $\quad k, m, n = ?$

Решение.

$2\cdot k! = m! - 2\cdot n! \Leftrightarrow 2(k! + n!) = m! \Rightarrow m \geq 2$

1) при $m = 2$: $k! + n! = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. даже при $k = 1$ и $n = 1$ $k! + n! = 2$

2) при $m = 3$: $k! + n! = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1, n = 2 \\ k = 2, n = 1 \end{array}\right.$

3) $m = 4 \Rightarrow k! + n! = 12 \Leftrightarrow k = 3, n = 3$

4) $m = 5 \Rightarrow k! + n! = 60 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. $4! = 24$, $3! = 6$, $5! = 120$, $6! = 720$

5) $m = 6 \Rightarrow k! + n! = 360 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. $5! = 120$, $6! = 720$ нет таких x и $y \in \mathbb{N}$, что $x! + n! = 360$

6) при $m \geq 5$ ситуация будет аналогична 5) и 4).

Значит, все возможные тройки чисел, при которых выполняется равенство: $k = 1$; $m = 3$; $n = 2$

$k = 2$; $m = 3$; $n = 1$

$k = 3$; $m = 3$; $n = 3$

Ответ: $(1; 3; 2)$; $(2; 3; 1)$; $(3; 4; 3)$.

2 балла Ситуация схожа с предыдущим примером, правда несколько хуже: вместо «далее будет увеличиваться» тут просто констатируется «аналогично», и
при этом неясно о какой именно аналогии идет речь. Кроме того, регулярное *$k \in \varnothing$ («нас так учили?») неприятно раздражает. Но меньше 2 баллов поставить* нельзя: все ответы приведены.

$2k! = m! - 2n!$

$\Updownarrow$

$2(k!+n!) = m!$ Пусть m — константа.
тогда $k, n < m$) $k < m$, Пусть $k \geq n$,
тогда $m \geq k+1$. Докажем, что при
$m \geq 5$ решений нет. При $m \geq 5$ k меньше
m более, чем в 5 раз. Тогда n должно
быть ~~равно~~ меньше m более, чем в 5 раз,
их сумма меньше или равна m ~~в 2~~ более
чем в 2,5 раза, а умноженная на 2 меньше
в 1,25 раз. Поэтому $m \leq 4$. Рассмотрим
случаи. Если $m = 1$ — то корней очевидно нет.
Если $m = 2$, то $k!+n! = 1 \Rightarrow$ корней нет. ~~$k! + n! = 1$. Тройка $(1;2;1)$~~
Если $m = 3$, то $k! + n! = 3$, $\Rightarrow k! = 2$, $n! = 1$
или $k! = 1$; $n! = 2$. Тройка $(2;3;1)$; $(1;3;2)$
Если $m = 4$, то $k! + n! = 12$, $\Rightarrow k! = n! = 3!$
(очевидно другие не подходят.) Тройка $(3;4;3)$,
Ответ: $\{(3;4;3); (2;3;1); (1;3;2)$

3 балла
Обидный случай. Решение оригинальное, т. е. отличное от «образца». Все три ответа верны и найдены разумным конечным перебором.
В рассуждении про невозможность случая $m \geq 5$ *ВСЮДУ, т. е. пять раз подряд,* почему-то пропущены значки факториалов (т. е. формально все эти рассуждения неверны), а вместо «более, чем в 5 раз» должно стоять «не менее
чем в 5 раз».

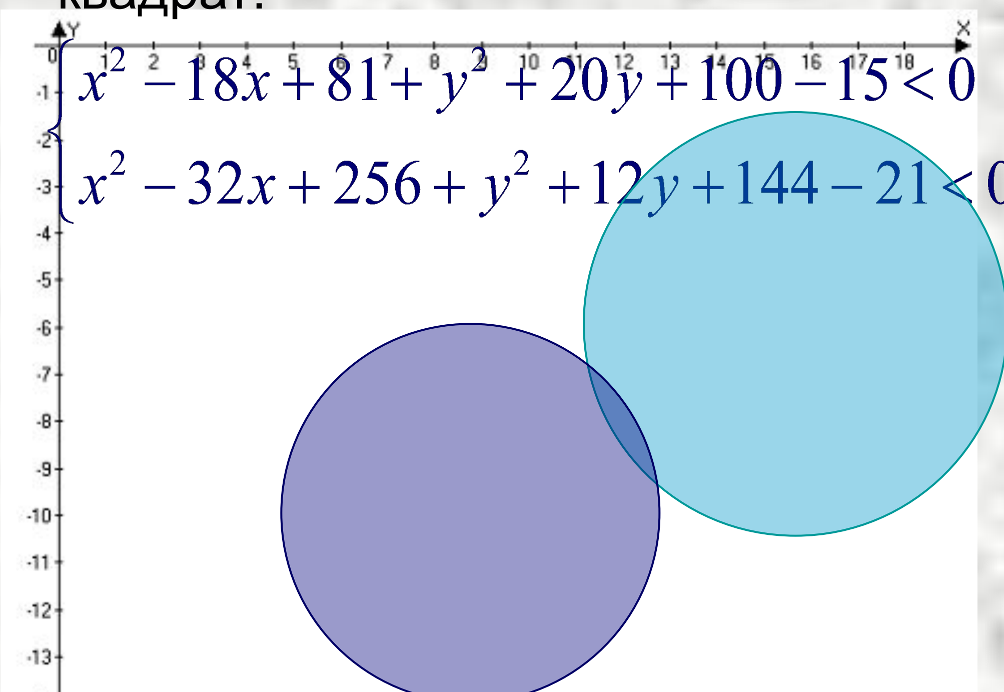
С 6

Найдите все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие системе неравенств
$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166 \\ 32x-y^2>x^2+12y+271 \end{cases}$$

Решение.

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:

$$\begin{cases} x^2-18x+81+y^2+20y+100-15<0 \\ x^2-32x+256+y^2+12y+144-21<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15 \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21 \end{cases}$$



Первое неравенство системы задает множество точек лежащих внутри окружности с центром (9;-10) и R= $\sqrt{15}$, так как радиус окружности меньше 4, то справедливы неравенства **x<13** и **y<-6.**

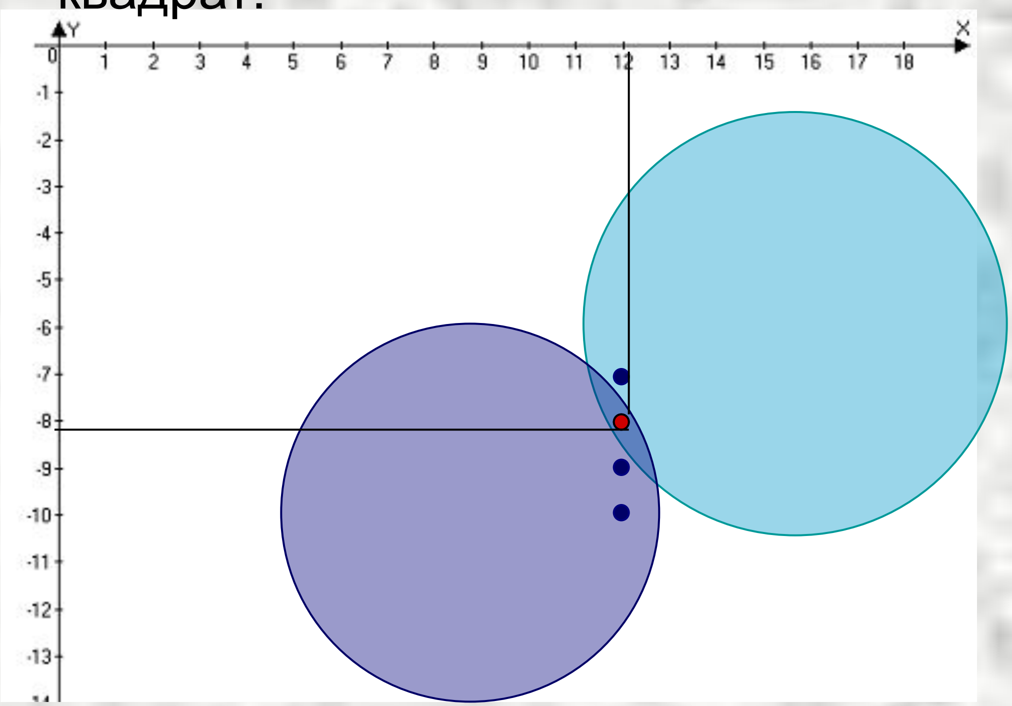
Второе неравенство системы представляет множество точек лежащих внутри окружности с центром (16;-6) и R= $\sqrt{21}$, так как радиус окружности меньше 5, то справедливы неравенства **x>11** и **y>-11**

С 6

Найдите все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$

Решение.

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:



По условию ищем точки с целыми координатами, значит достаточно проверить на принадлежность системе неравенств точки

(12;-7), (12;-8), (12;-9), (12;-10).

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяет единственная точка (12; -8).

Ответ: (12; -8)

x>11 и y>-11 x<13 и y<-6.