

# ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2011

ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПб АППО

С 6

## ЗАДАНИЕ С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1)  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную запись числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $\frac{b}{a}$ .

- ▣ **ТРЕБОВАНИЯ:** Уметь строить и исследовать простейшие математические модели
- ▣ **СОДЕРЖАНИЕ:** Числа, корни и степени, основы тригонометрии, логарифмы, преобразования выражений

### ▣ **ПРИМЕРНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ**

БАЗОВЫЙ: -

ПРОФИЛЬНЫЙ : 40 мин

## Задача С6

Найдите все тройки натуральных чисел  $k, m$  и  $n$ , удовлетворяющие уравнению  $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$  ( $1! = 1$ ;  $2! = 1 \cdot 2 = 2$ ;  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ).

### Решение

1. Так как  $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$ , то  $n < m$  и  $k < m$ .
2. Пусть  $k \leq n$ , тогда  $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$ , откуда  $4 \geq n + 1$  и  $k \leq n \leq 3$ .
3. Пусть  $k > n$ , тогда  $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$ , откуда  $4 \geq k + 1$  и  $n < k \leq 3$ .
4. Далее конечным перебором значений  $1 \leq n \leq 3$ ,  $1 \leq k \leq 3$

находим все			
решения.			
$n$	$k$	$m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$	$m$
3	3	$m! = 24$	4
3	2	$m! = 20$	Нет решений
3	1	$m! = 18$	Нет решений
2	3	$m! = 20$	Нет решений
2	2	$m! = 8$	Нет решений
2	1	$m! = 6$	3
1	3	$m! = 14$	Нет решений
1	2	$m! = 6$	3
1	1	$m! = 4$	Нет решений

## Критерии оценивания выполнения задания С6

### Баллы

Обоснованно получен верный ответ. 4

Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы.

3

Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована.

2

Приведен хотя бы один из правильных наборов, и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство. 1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. 0



$m!$  должно быть больше  $n!$ , чтобы выполнялось условие  $2k! = m! - 2n!$

Предположим, что  $k=2, m=3, n=1$ . Проверяем

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \\ 3! - 2 \cdot 1! = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow 2 \cdot 2! = 3! - 2 \cdot 1! \text{ наше} \\ \text{предположение верно} \end{array} \right.$$

При увеличении значений чисел разница между ними будет увеличиваться, а значит равенство не будет выполняться. Тогда единственным ответом будет  $k=2, m=3, n=1$

Ответ:  $k=2; m=3; n=1$

**1 балл** 1 балл гарантирован, так как одна верная тройка чисел

указана и проверка произведена. Дальнейшие «эвристические» соображения просто неверны.

$$2k! = m! - 2n!$$

$$k! + n! = \frac{m!}{2} \Rightarrow m > k; m > n, \text{ т.к. } m, n, k \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

наименьшее значение  $m=2$ ; при  $m=2 \cdot \frac{m!}{2} = 1$ , а  
минимальное значение  $k! + n! = 2$

$$\text{при } m=3 \quad k=1 \quad n=2 \text{ или } k=2 \quad n=1$$

$$\text{при } m=4 \quad \frac{m!}{2} = 12 \quad n! + k! = 12 \Rightarrow n=3 \quad k=3$$

при  $m=5 \quad \frac{m!}{2} = 60$ , а наибольшая сумма  $n! + k!$  при  
данном  $m$  будет 58

при  $m=6 \quad \frac{m!}{2} = 360$ , а наибольшая сумма  $n! + k!$

при данном  $m$  будет ~~360~~ 240

при  $m=7 \quad \frac{m!}{2} = 2730$ , а наибольшая сумма  $n! + k!$

при данном  $m$  будет 1560 и т.д.

Т.е. при увеличении  $m$  разрыв между  $\frac{m!}{2}$  и  $k! + n!$   
будет увеличиваться. Отсюда далее решения нет.

Ответ:  $m=3, k=1, n=2$ ;  $m=3, k=2, n=1$ ;  $m=4, n=3, k=3$ .

**2 балла** 2 балла гарантированы, так как все три верные  
тройки  
чисел указаны и проверка произведена. Дальнейшие  
«эвристические»  
соображения верны (т. е. контрпримера не существует), но  
не обоснованы

$$C6. \quad 2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n! \quad k, m, n \in \mathbb{N}. \quad k, m, n = ?$$

Решение.

$$2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n! \Leftrightarrow 2(k! + n!) = m! \Rightarrow m \geq 2$$

$$1) \text{ При } m=2: k! + n! = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \emptyset \\ n \in \emptyset \end{cases} \text{ - невозможно, т.к.} \\ \text{даже при } k=1 \text{ и } n=1 \\ k! + n! = 2$$

$$2) \text{ При } m=3: k! + n! = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1, n=2 \\ k=2, n=1 \end{cases}$$

$$3) m=4 \Rightarrow k! + n! = 12 \Leftrightarrow k=3, n=3$$

$$4) m=5 \Rightarrow k! + n! = 60 \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \emptyset \\ n \in \emptyset \end{cases} \text{ - невозможно, т.к. } 4! = 24, 3! = 6 \\ 5! = 120, 6! = 720$$

$$5) m=6 \Rightarrow k! + n! = 360 \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \emptyset \\ n \in \emptyset \end{cases} \text{ - невозможно, т.к. } 5! = 120, 6! = 720 \\ \text{нет таких } x \text{ и } y \in \mathbb{N}, \\ \text{что } x! + y! = 360$$

6) при  $m \geq 5$  ситуация будет аналогична 5) и 4).  
Значит, все возможные тройки чисел, при которых выполняется равенство:

$$k=1; m=3; n=2$$

$$k=2; m=3; n=1$$

$$k=3; m=3; n=3$$

Ответ:  $(1; 3; 2); (2; 3; 1); (3; 3; 3)$ .

**2 балла** Ситуация схожа с предыдущим примером, правда несколько хуже: вместо «далее будет увеличиваться» тут просто констатируется «аналогично», и

при этом неясно о какой именно аналогии идет речь. Кроме того, регулярное

▶  $k \in \emptyset$  («нас так учили?») неприятно раздражает. Но меньше 2 баллов поставить нельзя: все ответы приведены.

$$2k! = m! - 2n!$$

$$2(k! + n!) = m!$$

Пусть  $m \neq$  - константа.

либо  $k, n < m$ ,  $k < m$ , Пусть  $k \geq n$ ,

либо  $m \geq k+1$ . Докажем, что при

$m \geq 5$  решений нет. Пусть  $m \geq 5$   $k$  меньше

$m$  более, чем в 5 раз. Тогда и факториал

быть равно меньше  $m$  более, чем в 5 раз,

их сумма меньше или равна  $m$  в 2 более

чем в 2,5 раза, а умноженная на 2 меньше

в 1,25 раз. Поэтому  $m \leq 4$ . Рассмотрим

случаи. Если  $m=1$  - то корней очевидно нет

Если  $m=2$ , то  $k! + n! = 2$ . ~~Тройка (1; 2; 1)~~

Если  $m=3$ , то  $k! + n! = 3$ ,  $\Rightarrow k! = 2, n! = 1$

или  $k! = 1; n! = 2$ . Тройка (2; 3; 1); (1; 3; 2)

Если  $m=4$ , то  $k! + n! = 12$ ,  $\Rightarrow k! = n! = 3!$

(очевидно другие не подходят.) Тройка (3; 4; 3),

Ответ:  $\{(3; 4; 3); (2; 3; 1); (1; 3; 2)\}$

3 балла

Обидный случай.

Решение

оригинальное, т. е.

отличное от

«образца». Все три

ответа верны и

найлены разумным

конечным

перебором.

В рассуждении про

невозможность

случая  $m \geq 5$

ВСЮДУ, т. е. пять

раз подряд,

почему-то

пропущены значки

факториалов (т. е.

формально все эти

рассуждения

неверны), а вместо

«более, чем в 5 раз»

должно стоять «не

менее

чем в 5 раз».

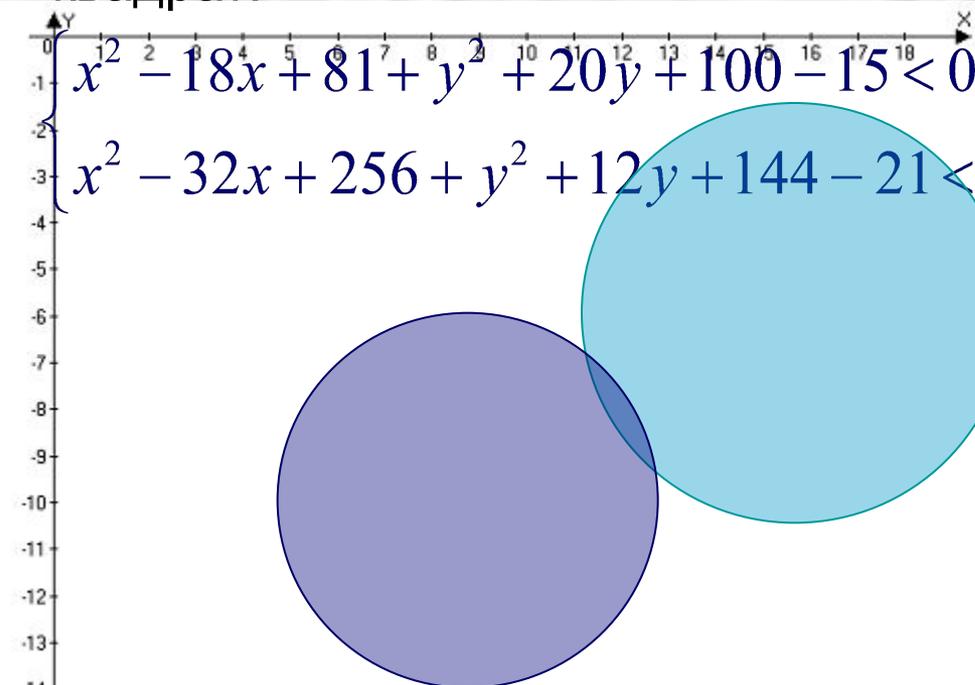
С  
6

Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

**Решение.**

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:



$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15 \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21 \end{cases}$$

Первое неравенство задает область, состоящую из точек лежащих внутри окружности с центром  $(9; -10)$  и  $\sqrt{15}$  так как радиус окружности меньше 5, справедливо неравенство

$$x > 11 \text{ и } y > -11 \quad x < 13 \text{ и } y < -6.$$

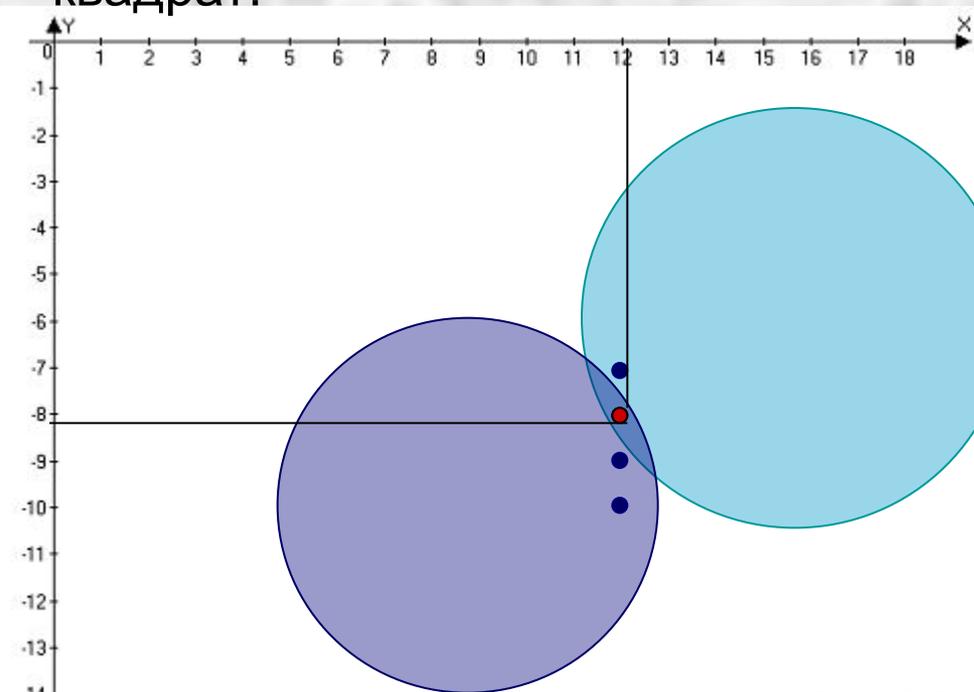
С  
6

Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

**Решение.**

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:



По условию ищем точки с целыми координатами, значит достаточно проверить на принадлежность системе неравенств точки

$(12; -7)$ ,  $(12; -8)$ ,  $(12; -9)$ ,  $(12; -10)$ .

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяет единственная точка  $(12; -8)$ .

**Ответ:**  $x=12, y=-8$  и  $x < 13$  и  $y < -6$ .