

НЕРАВЕНСТВА



ВВЕДЕНИЕ

Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. В моём реферате рассмотрены часто встречающиеся типы неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Архимед указал границы числа π :
 $223/71 < \pi < 22/7$.
- В «Математике собрания» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что если $a/b > c/d$ (a, b, c, d – положительные числа), то $ad > bc$.
- Знаки $<$ и $>$ ввёл английский математик Т. Гарриот (1560-1621), знаки \leq и \geq французский математик П. Буге (1698-1758).

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a=b$, $a<b$, $a>b$.
- Число a больше числа b , если разность $a-b$ - положительное число; число a меньше числа b , если разность $a-b$ - отрицательное число.

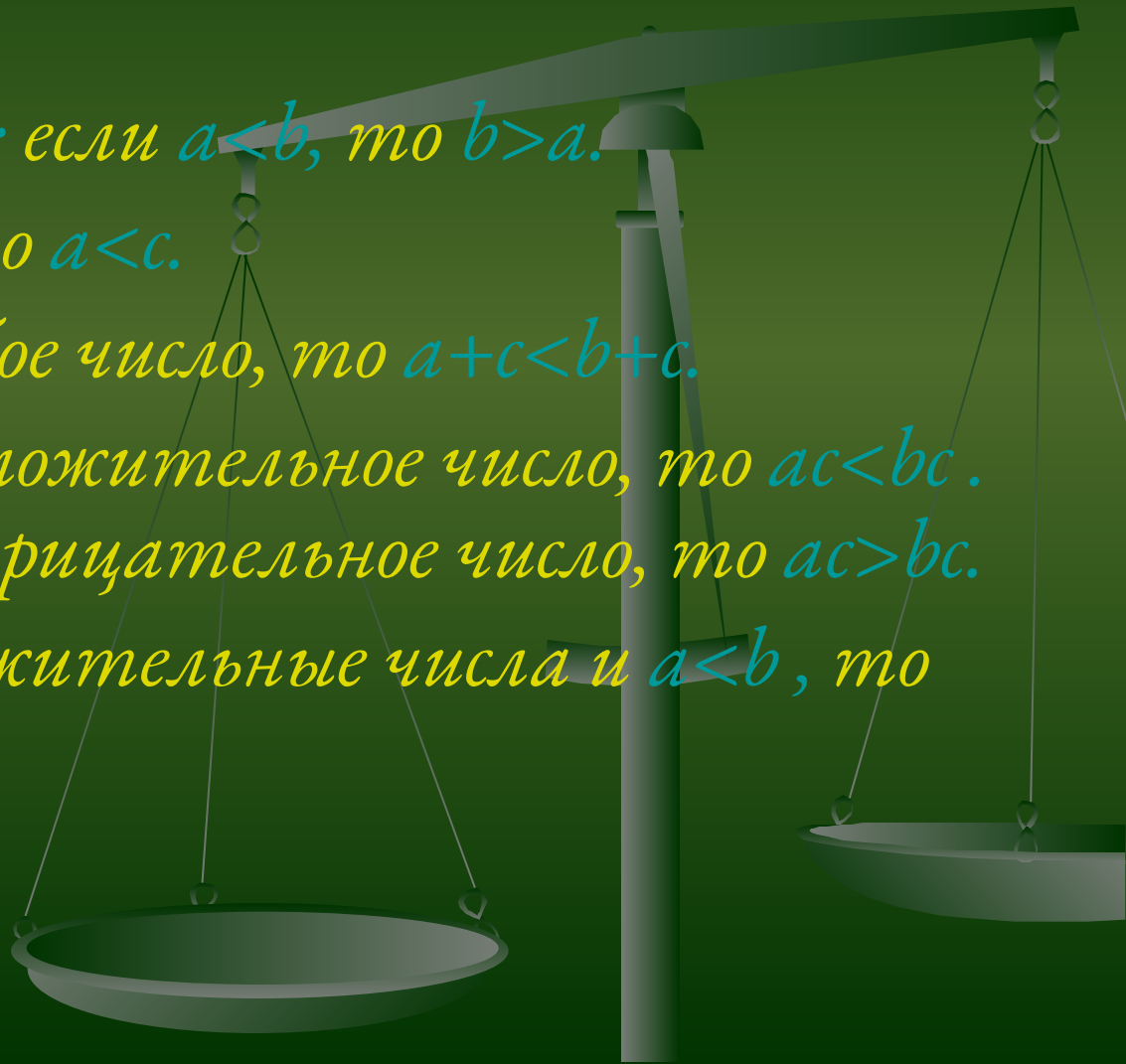


ПРИМЕРЫ

- Сравним $5/8$ и $4/7$. Приведём их к общему знаменателю: $5/8=35/56$; $4/7=32/56$. Так как $35>32$, то $5/8>4/7$.
- Докажем, что при любых значениях a верно неравенство $(a-3)(a-5)<(a-4)(a-4)$. Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её: $(a-3)(a-5)-(a-4)(a-4)=-1$. При любом a верно данное неравенство.

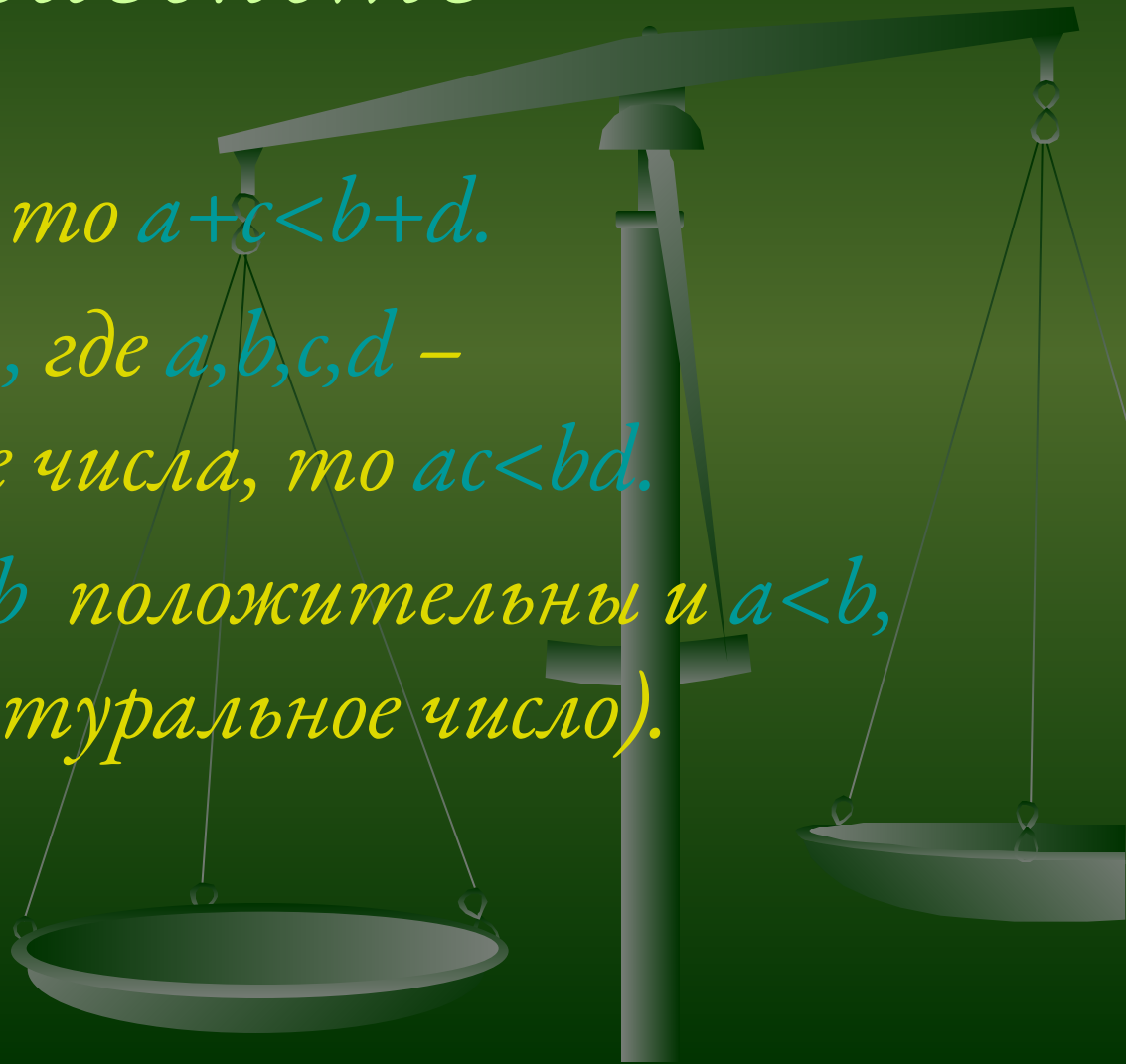
СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

- Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.
- Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
- Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.
- Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$.
Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.
- Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $1/a > 1/b$.



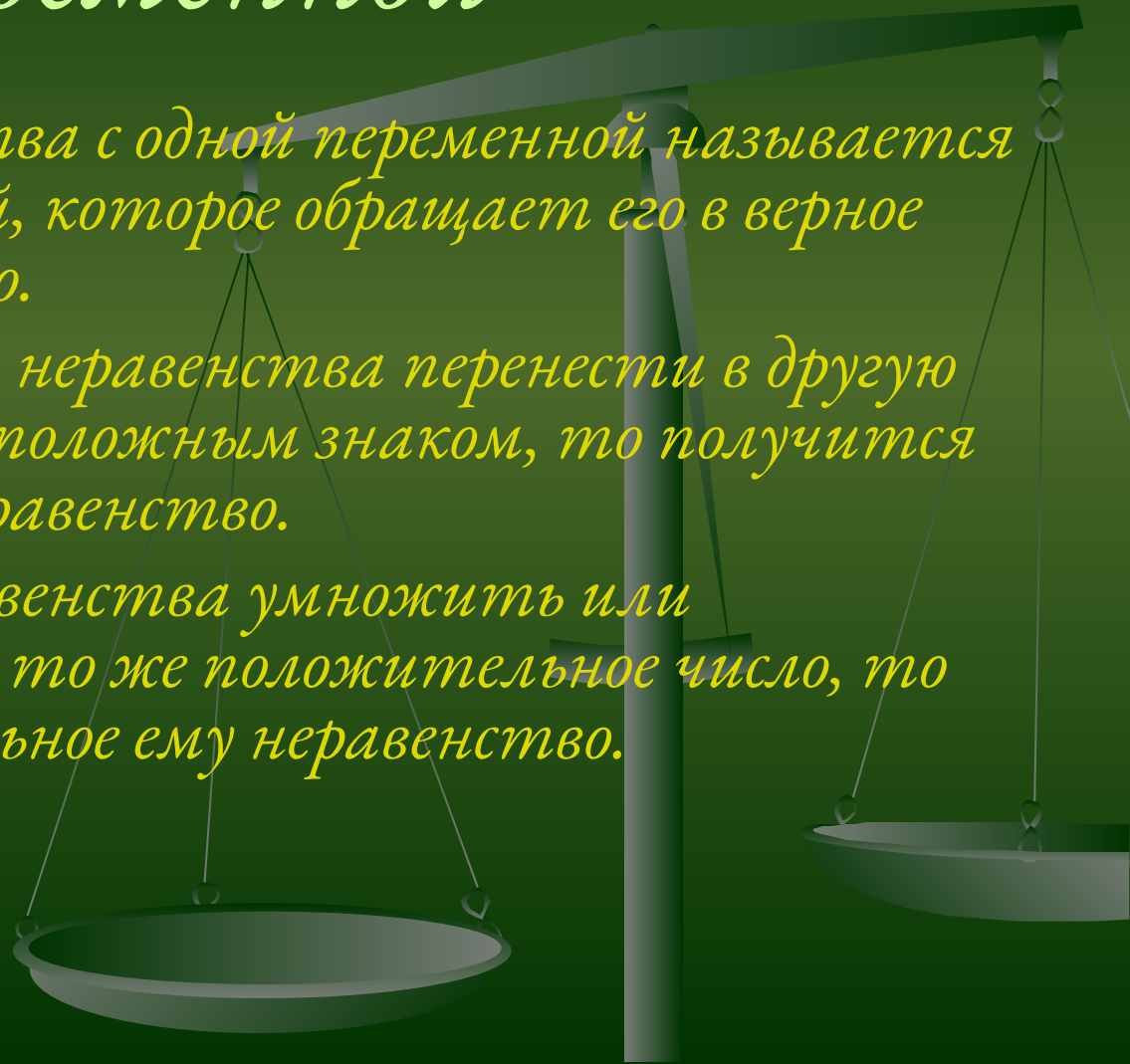
Сложение и умножение числовых неравенств

- Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.
- Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c, d – положительные числа, то $ac < bd$.
- Если числа a и b положительны и $a < b$, то $a^n < b^n$ (n – натуральное число).



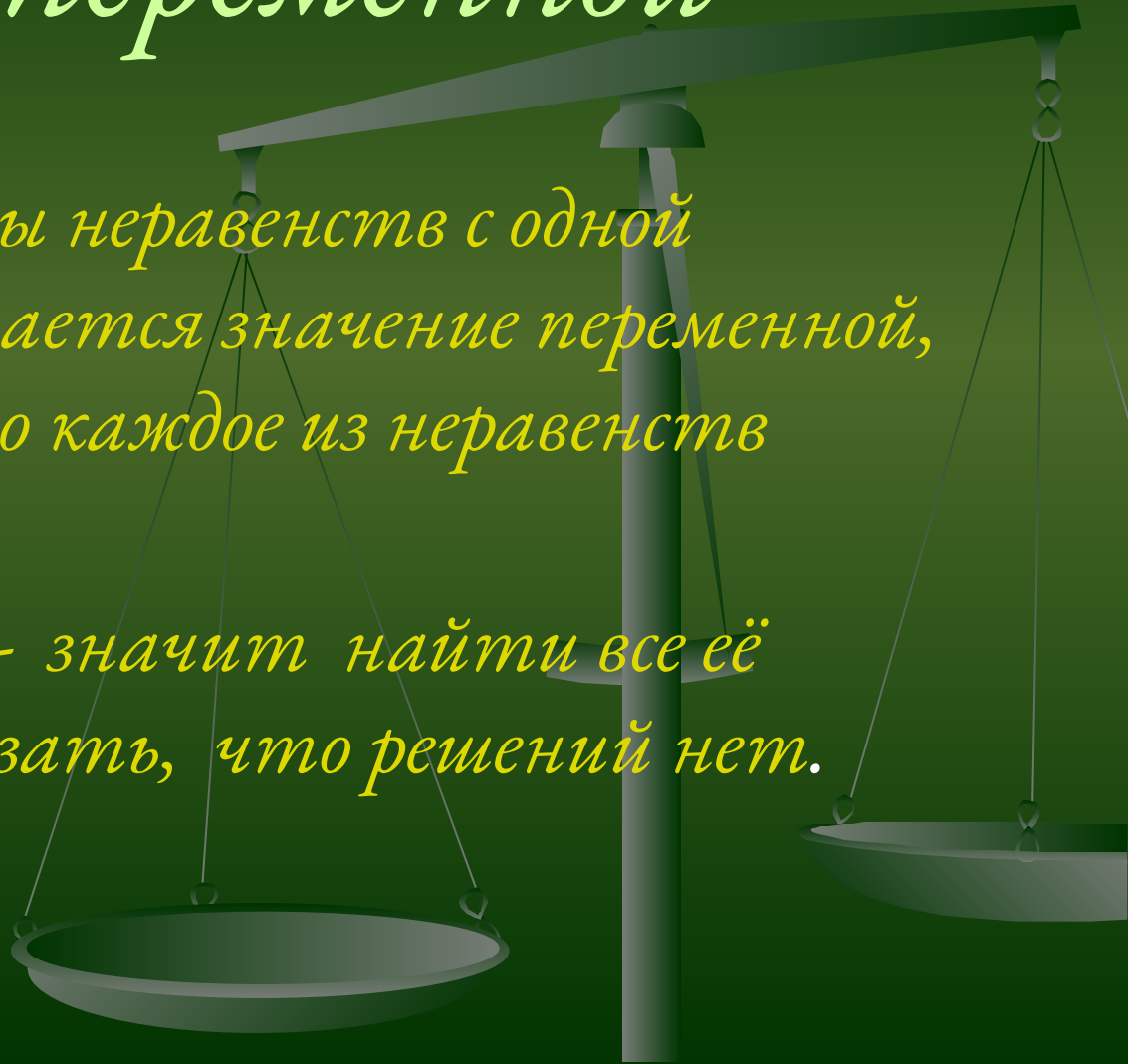
Решение неравенств с одной переменной

- Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.
- Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.



Решение систем неравенств с одной переменной

- *Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.*
- *Решить систему - значит найти все её решения или доказать, что решений нет.*

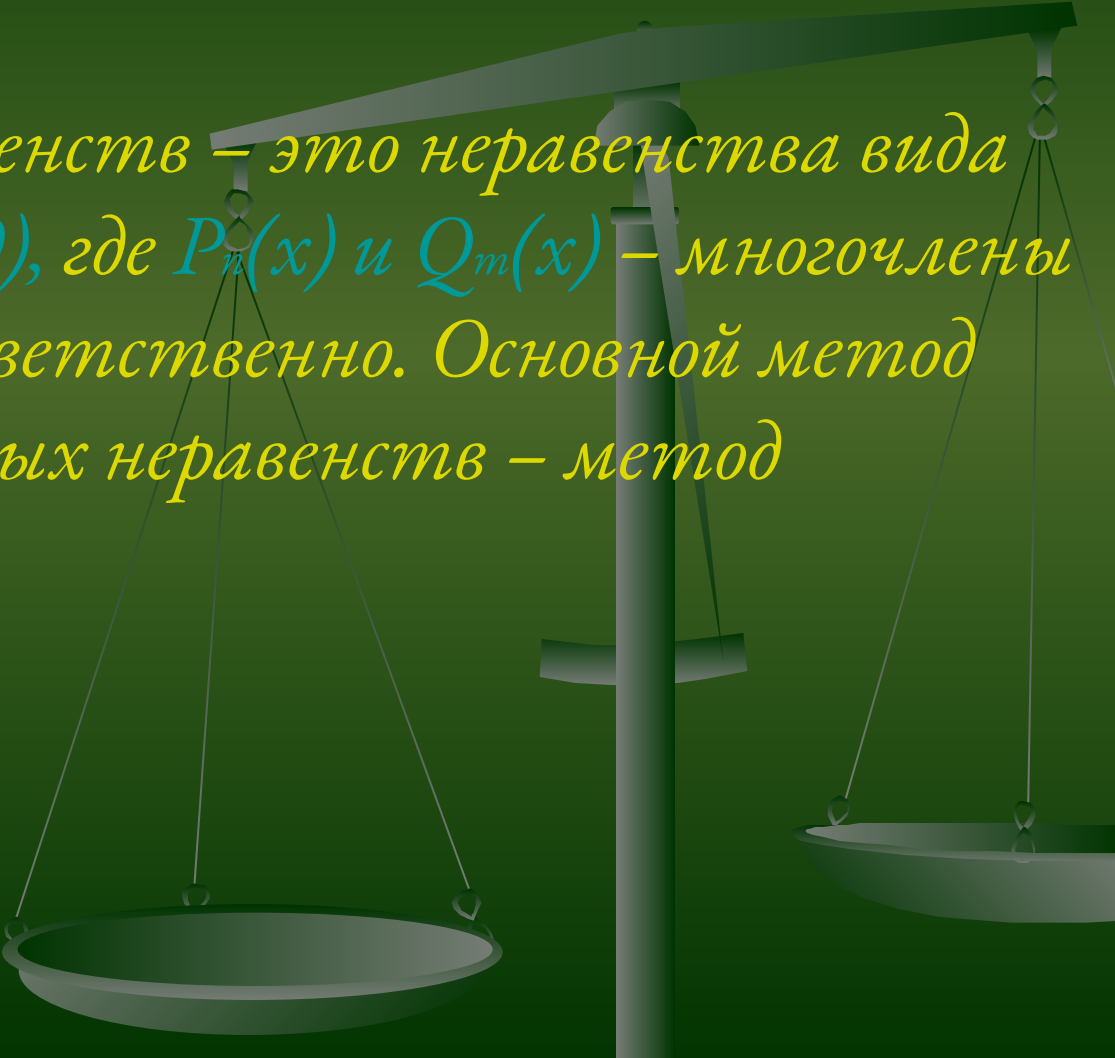


ПРИМЕРЫ

- Решим неравенство $16x > 13x + 45$. Перенесем слагаемое $13x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства: $16x - 13x > 45$. Приведём подобные члены: $3x > 45$. Умножим обе части на $1/3$: $x > 15$.
- Решим неравенство $x/3 - x/2 < 2$. Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т.е. на 6. Получим: $6x/3 - 6x/2 < 12$; $2x - 3x < 12$. Отсюда $-x < 12$; $x > -12$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рациональные неравенств – это неравенства вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 (\geq, <, \leq 0)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно. Основной метод решения рациональных неравенств – метод интервалов.



ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Множество решений неравенства $(x^2 - 7x + 12)/(2x^2 + 4x + 5) > 0$ имеет вид

1) $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$ 2) $(-\infty; 3)$ 3) $(3; 4)$ 4) $(4; \infty)$ 5) $(-\infty; 4)$.

РЕШЕНИЕ. Так как дискриминант знаменателя $D_1 = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2$ отрицателен и старший коэффициент положителен, то $2x^2 + 4x + 5 > 0$ для любого значения x . Тогда заданное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 7x + 12 > 0$ или $(x - 3)(x - 4) > 0$.

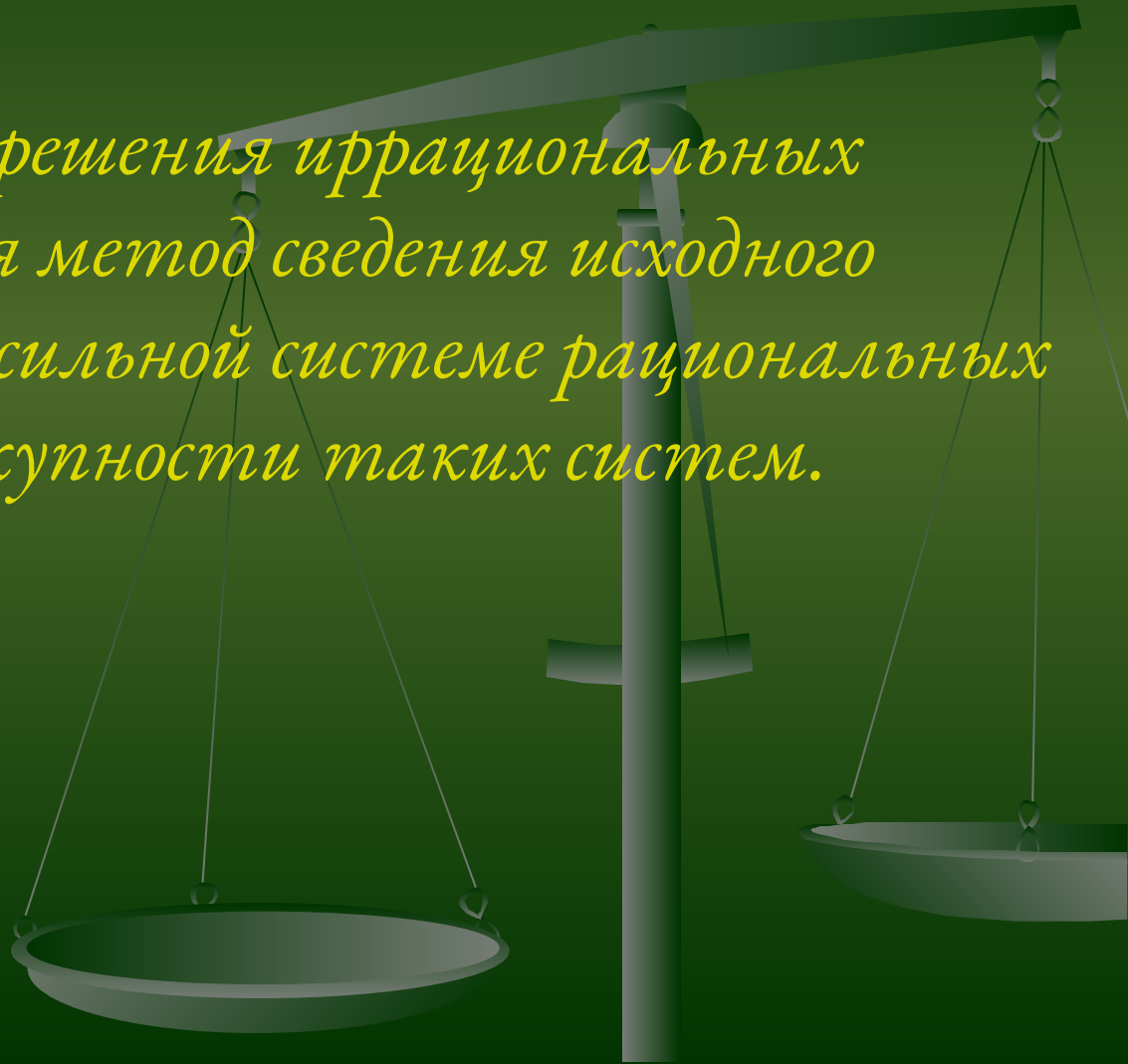
Отметим корни и знаки квадратного трёхчлена $x^2 - 7x + 12$ на соответствующих промежутках числовой оси.

Решением неравенства является множество $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$.

ОТВЕТ: 1.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.



ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Решить неравенство

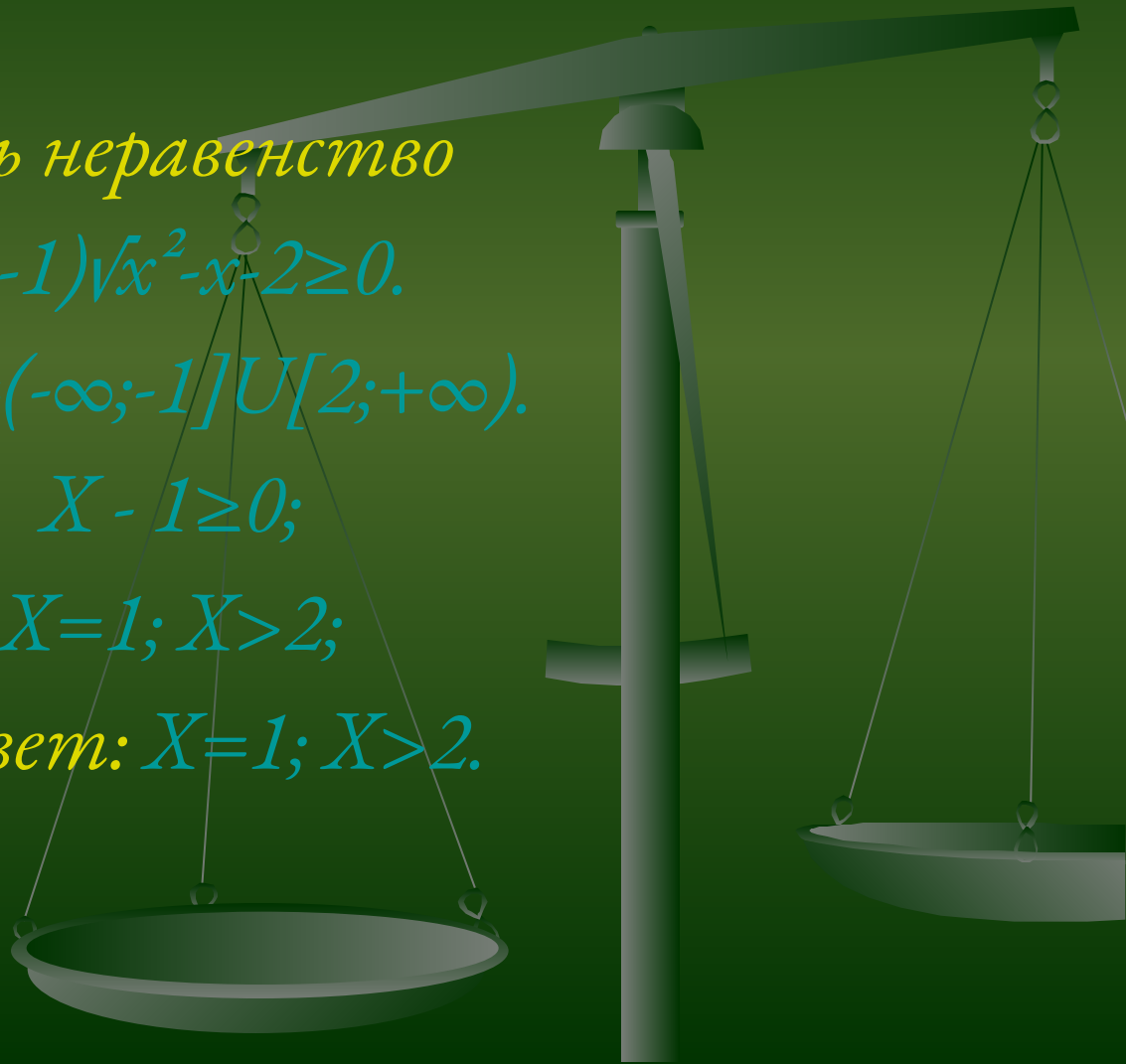
$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0.$$

$$D(f)=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty).$$

$$X-1\geq 0;$$

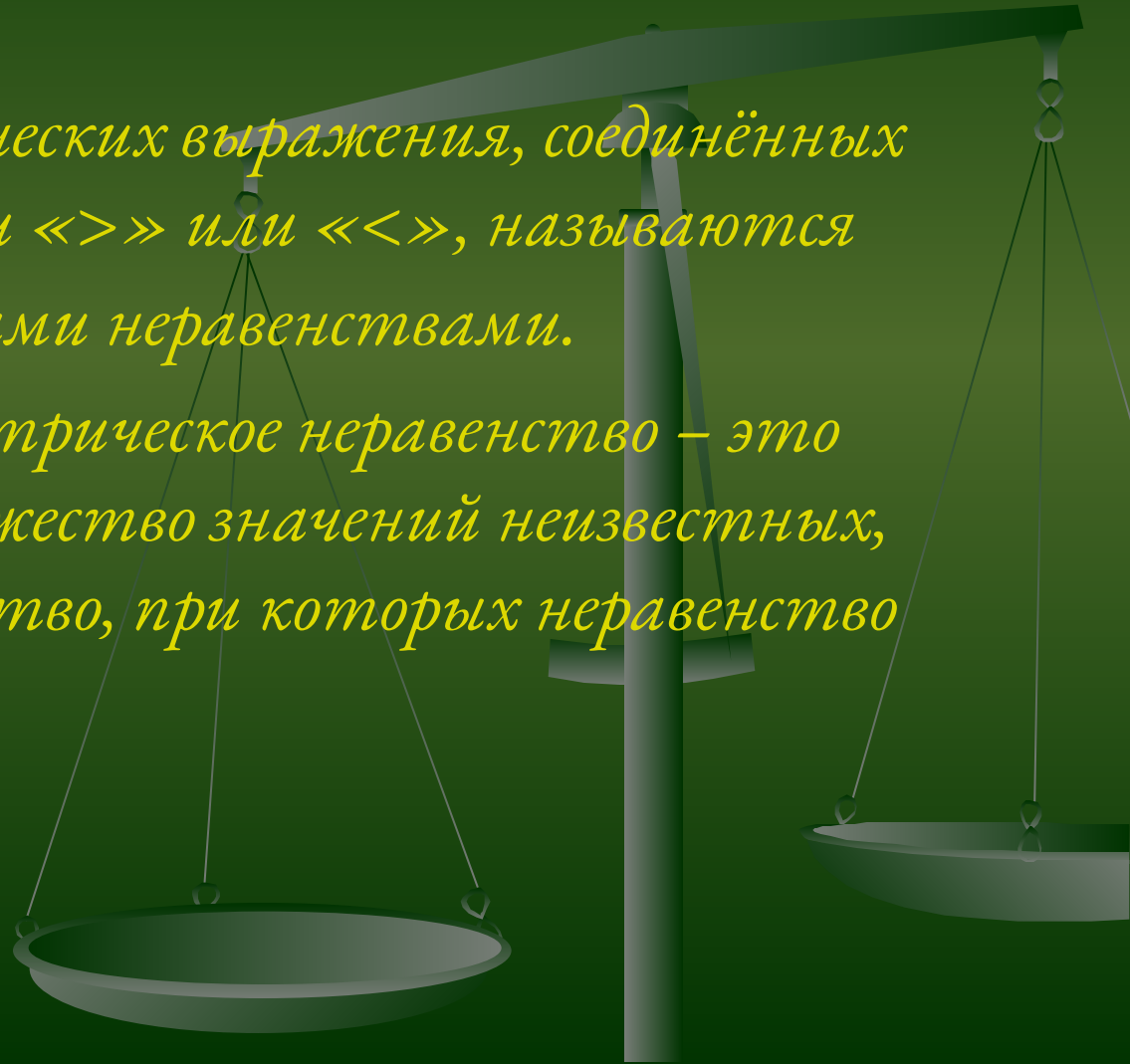
$$X=1; X>2;$$

Ответ: $X=1; X>2.$

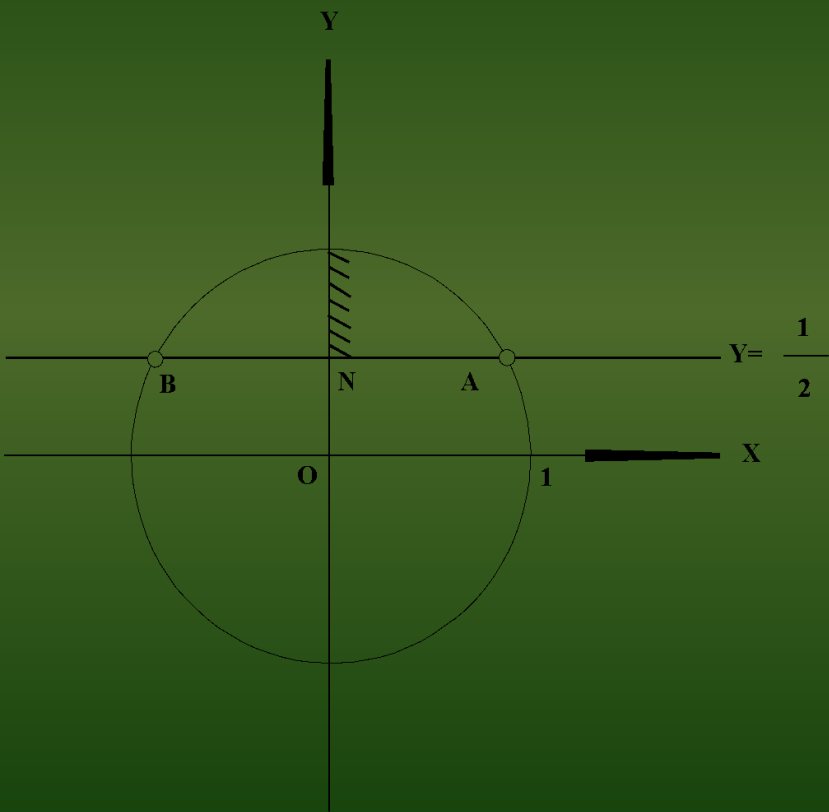


ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

- *Два тригонометрических выражения, соединённых между собой знаками «>» или «<», называются тригонометрическими неравенствами.*
- *Решить тригонометрическое неравенство – это значит найти множество значений неизвестных, входящих в неравенство, при которых неравенство выполняется.*



ПРИМЕРЫ



Решим неравенство $\sin x > 1/2$. Все значения y на промежутке NM больше $1/2$. NM стягивает дугу AB с началом в точке $A(\pi/6; 1/2)$ и с концом в точке $B(5\pi/6; 1/2)$.

Следовательно, решением неравенства будут все значения на $(\pi/6; 5\pi/6)$ с прибавлением $2\pi n$, т.е. $\pi/6 + 2\pi n < x < 5\pi/6 + 2\pi n$, n принадлежит Z .

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используется определение модуля:

$f(x)$, если $f(x) \geq 0$,

$|f(x)| =$

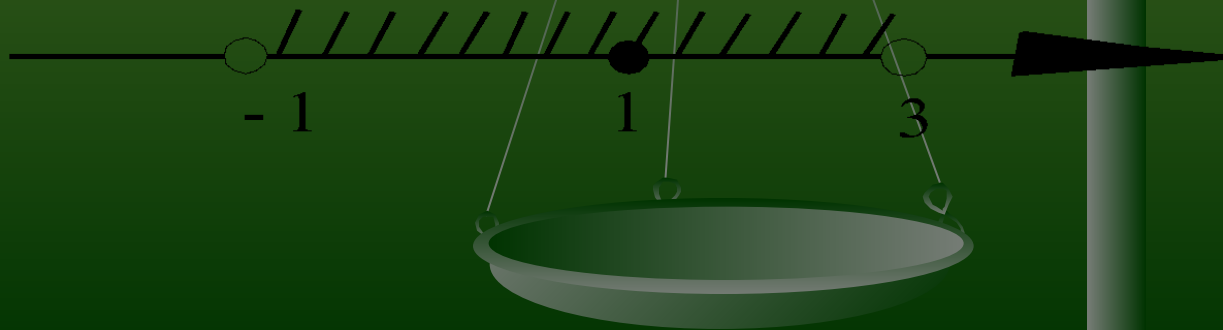
$-f(x)$, если $f(x) < 0$.



ПРИМЕРЫ

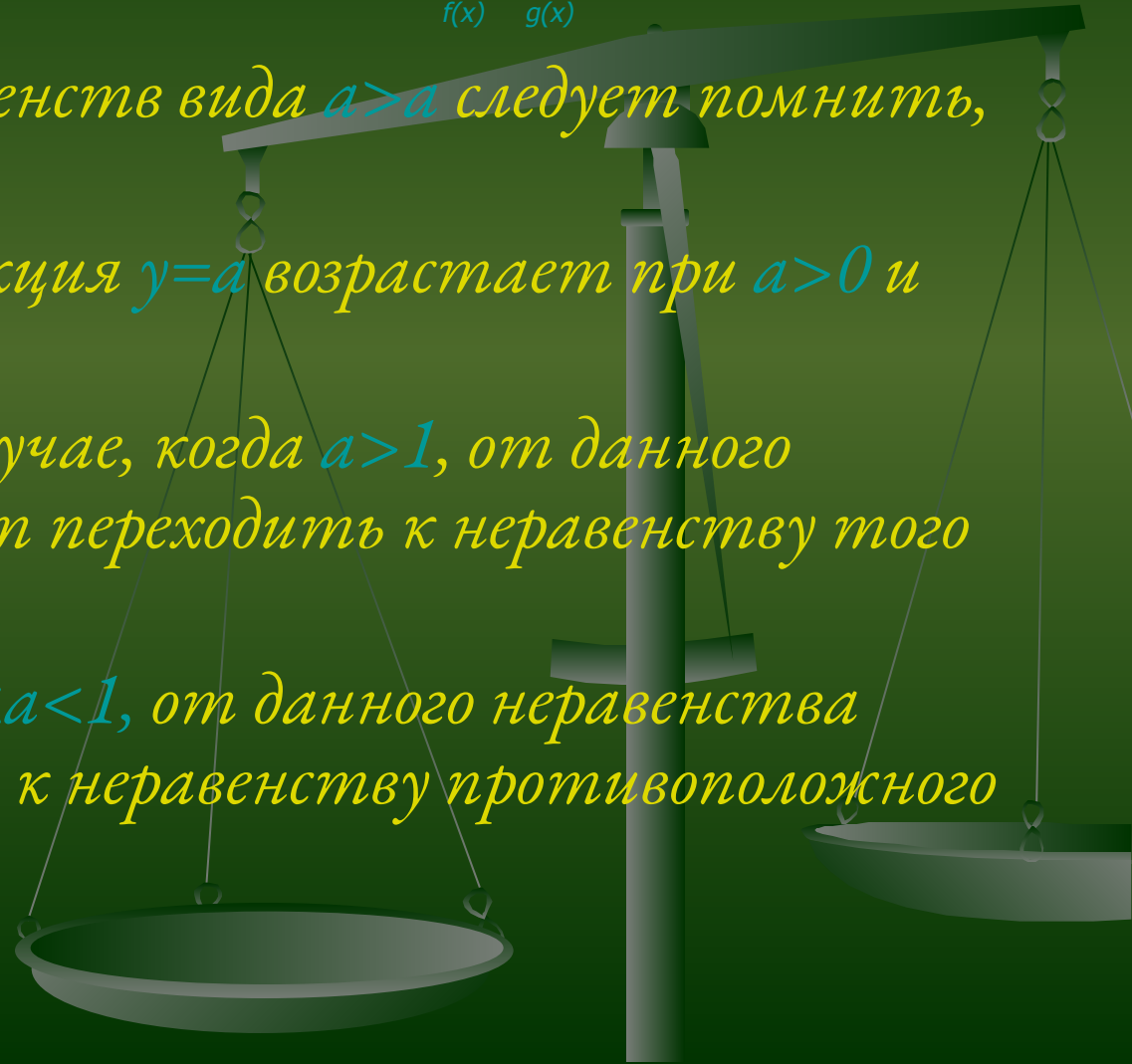
Пример. Решить неравенство $|x - 1| < 2$.

С помощью координатной прямой устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал $(-1; 3)$.



ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида $a^x > a^g$ следует помнить, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Значит, в случае, когда $a > 1$, от данного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, от данного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.



ПРИМЕРЫ

Пример. Решить неравенство $3x+7 < 2x-1$

$$2 < 2.$$

Решение. Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла: $3x+7 < 2x-1$.

$$3x - 2x < -1 - 7;$$

$$x < -8;$$

Ответ: $x < -8$.

НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ.

Неравенство

$$(a, b, c, \dots, k, x) > (a, b, c, \dots, k, x),$$

где a, b, c, \dots, k – параметры, а x действительная переменная величина, называется неравенством с одним неизвестным, содержащим параметры.



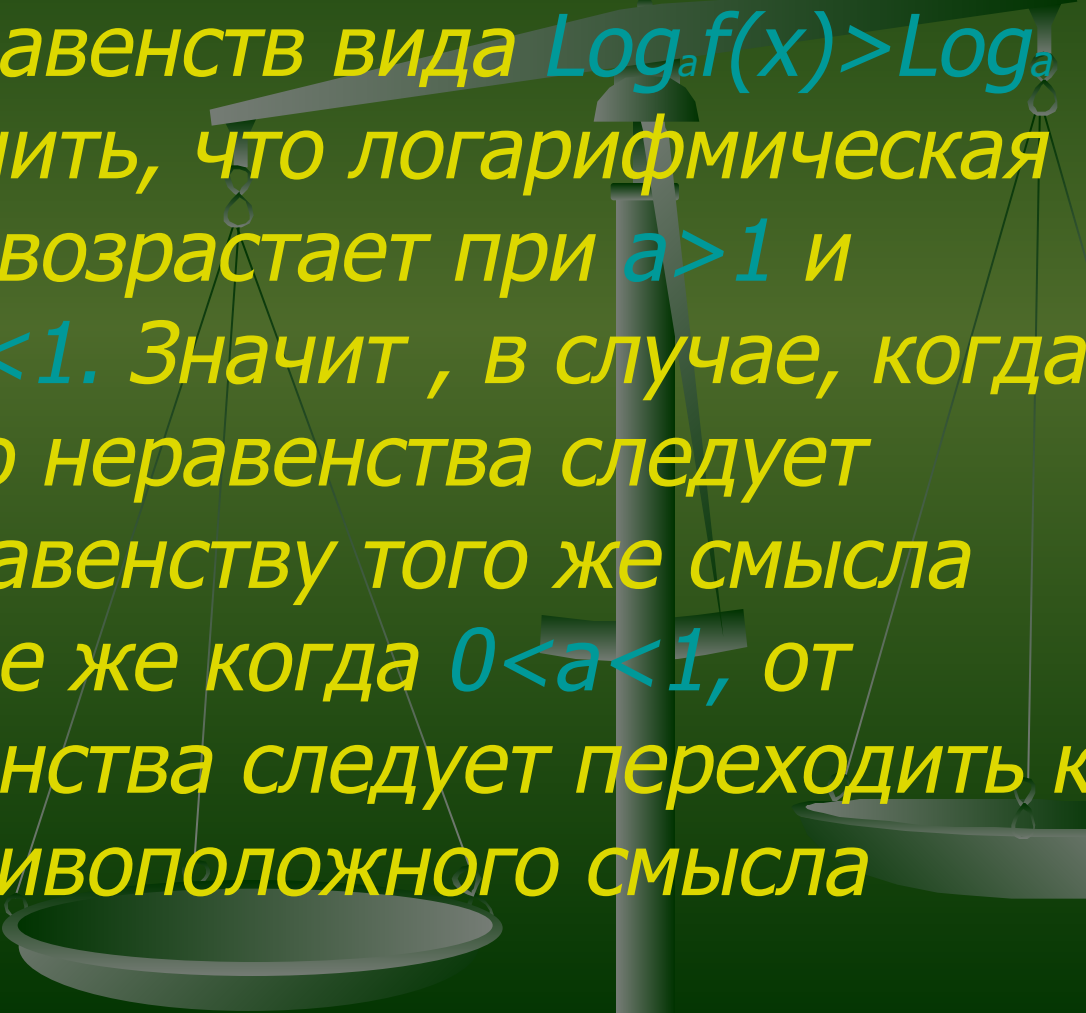
ПРИМЕРЫ

Пример. Найти значение параметра a , при котором наименьшее решение неравенства $(ax - 10)/x \geq 1$ равно -2 .

Решение. $(ax - 10)/x - 1 \geq 0 \Rightarrow ((a - 1)x - 10)/x \geq 0$
 $\Rightarrow (a - 1)(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$. Пусть $a - 1 > 0$. Тогда последнее неравенство пишется в виде $(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$. Его решением является объединение множеств $(-\infty; 0) \cup [10/(a - 1); +\infty]$, которое не содержит наименьшего отрицательного числа. Следовательно, $a - 1 < 0$ и тогда решением неравенства будет множество $[10/(a - 1); 0)$.
 $10/(a - 1) = -2; a - 1 = 5; a = -4$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида $\text{Log}_a f(x) > \text{Log}_a g(x)$ следует помнить, что логарифмическая функция $y = \text{Log}_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Значит, в случае, когда $a > 1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же когда $0 < a < 1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.



ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Решить неравенство $\text{Log}_{1/3}(2x+59) > -2$.

РЕШЕНИЕ. Так как $-2 = \text{Log}_{1/3} 9$, то данное неравенство можно переписать в виде $\text{Log}_{1/3}(2x+59) > \text{Log}_{1/3} 9$.

Далее имеем:

$$2x+59 > 0,$$

$$2x+59 < 9;$$

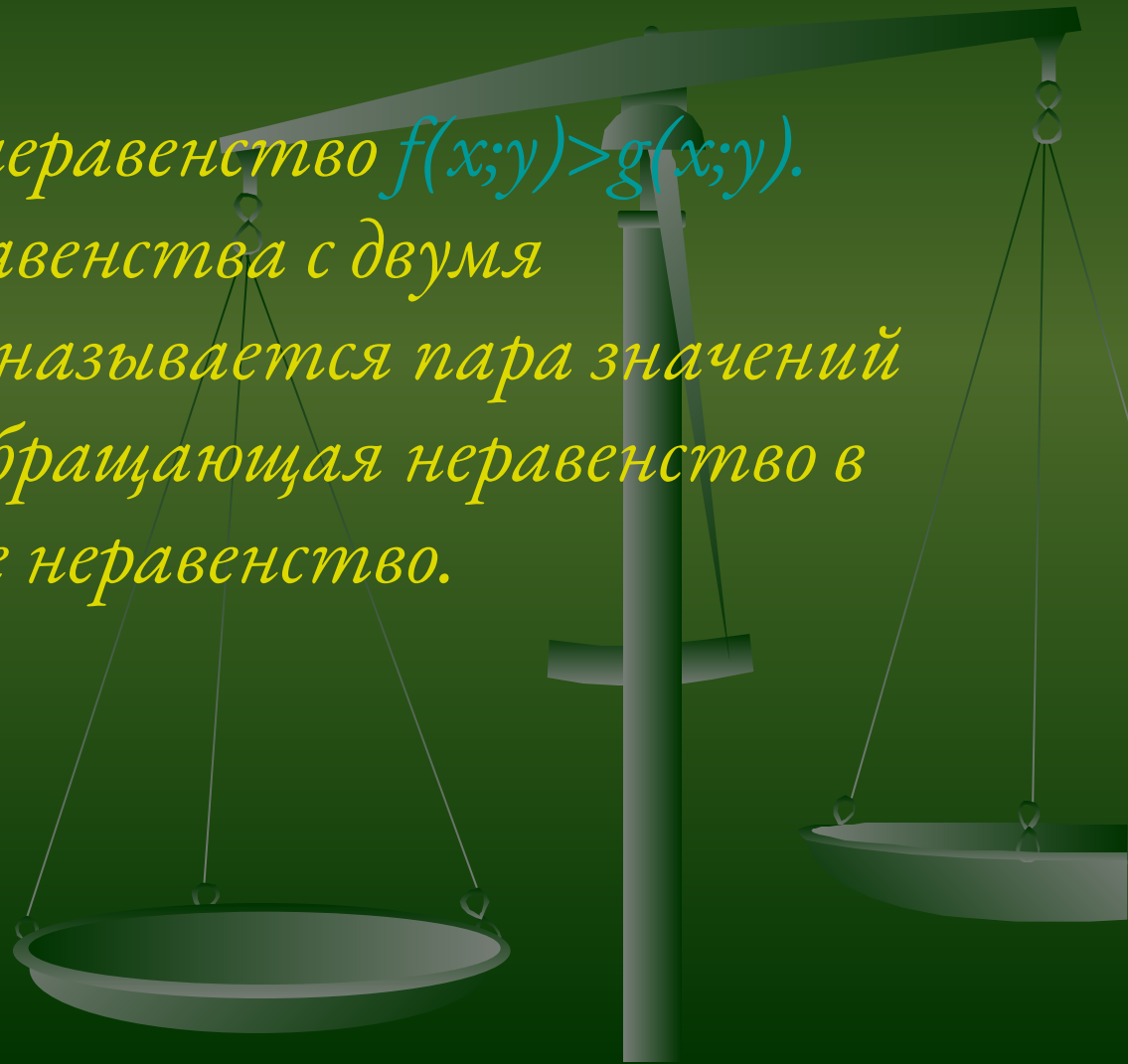
откуда $-29,5 < x < -25$.

$$x > -29,5,$$

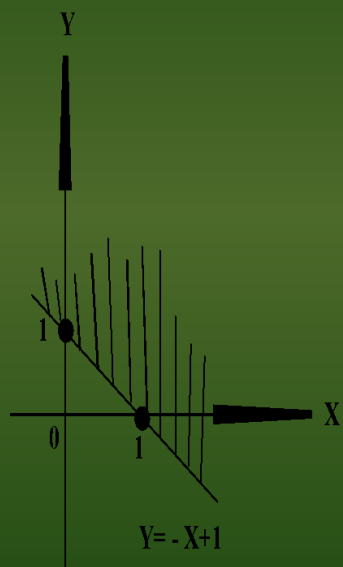
$$x < -25;$$

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Рассмотрим неравенство $f(x;y) > g(x;y)$.
Решением неравенства с двумя
переменными называется пара значений
переменных, обращающая неравенство в
верное числовое неравенство.*

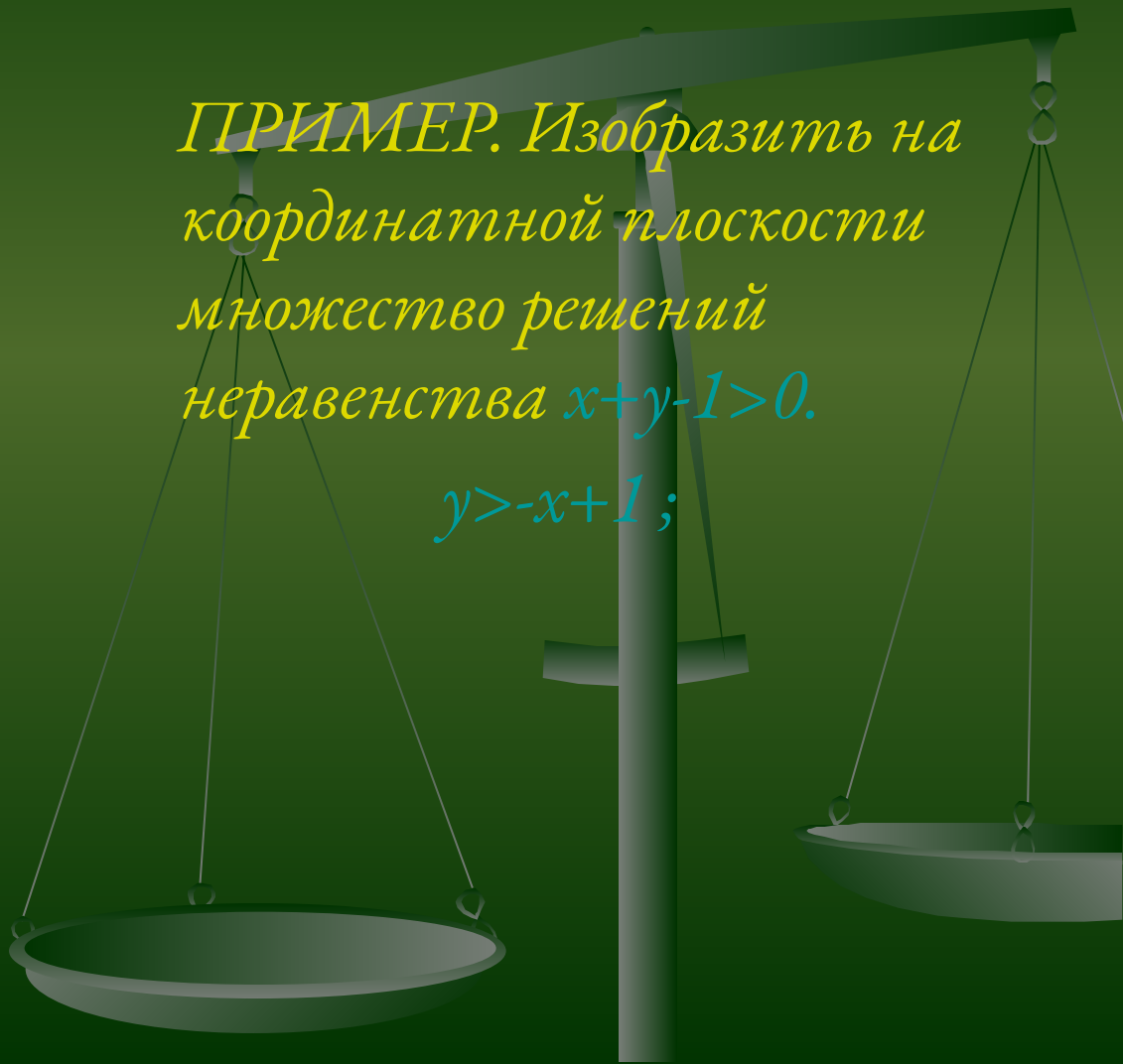


ПРИМЕРЫ



ПРИМЕР. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x + y - 1 > 0$.

$$y > -x + 1;$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

*ТРИ МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ
НЕРАВЕНСТВ:*

- 1) Метод оценки знака разности;*
- 2) Синтетический метод;*
- 3) Метод от противного.*

