

# Задачи поддержки принятия решений (ЗПР)



# Теоретико-игровые модели

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x_1 \in X_1},$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x_n \in X_n}.$$

# Задачи поддержки принятия решений

ЗПР в условиях определенности

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x_1 \in X_1},$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x_n \in X_n}.$$

ЗПР при неконтролируемых параметрах

$$f_i(x, w) \rightarrow \max_{x_i \in X_i}, \forall i \in I_n, w \in W \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2)$$

$$w = (w_1, \dots, w_m), I_n = \{1, \dots, n\}, x = (x_1, \dots, x_n)$$

# Задачи поддержки принятия решений

Принцип осреднения параметров

$$f_i^1(x_1, \dots, x_n) = M_w [f_i(x, w)] \rightarrow \max_{x_i \in X_i}, \forall i \in I_n \quad (3)$$

Принцип гарантированного результата

$$f_i^2(x_1, \dots, x_n) = \left[ \min_{w \in W} f_i(x, w) \right] \rightarrow \max_{x_i \in X_i}, \forall i \in I_n \quad (4)$$

Определение 1. Пусть  $\tilde{X}_i = \{\tilde{x}_i(w), \tilde{x}: W \rightarrow X_i\}$ , тогда вариационным расширением (ВР) задачи (2) будем называть следующую задачу

$$f_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = M_w [f_i(\tilde{x}(w), w)] \rightarrow \max_{\tilde{x}_i \in X_i}, \forall i \in I_n \quad (5)$$

# Пример

*Игра «Государство-Предприниматели»*

Целевая функция центра:

$$f_u(k, x) = x \cdot k \rightarrow \max_{0 \leq k \leq 1}$$

Целевая функция предпринимателей:

$$f_a(k, x) = (1 - k) \cdot x - \varphi(x, \delta) \rightarrow \max_{0 \leq x \leq x_{\max}}$$

$x$  – предпринимательская прибыль ( $0 \leq x \leq x_{\max}$ );

$k$  – доля прибыли, отчисляемая в качестве налогов ( $0 \leq k \leq 1$ );

$\varphi(x, \delta)$  – предпринимательские риски.

# Пример

Вариационное расширение:

$$\hat{f}_y(k, x(\delta)) = M_\delta [x(\delta) \cdot k] \rightarrow \max_{0 \leq k \leq 1}$$

$$\hat{f}_a(k, x(\delta)) = M_\delta [(1-k) \cdot x(\delta) - \varphi(x(\delta), \delta)] \rightarrow \max_{0 \leq x(\delta) \leq \bar{x}}$$

$$\varphi(x(\delta), \delta) = -\delta \ln \left( 1 - \frac{x(\delta)}{x_{\max}} \right),$$

$$0 < \delta < x_{\max}, \quad \delta_H \leq \delta \leq \delta_B,$$

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(x) \geq 0;$$

$$\varphi'_x \geq 0; \quad \varphi'_{x=0} < 1.$$

# Пример игры 2-х лиц с совпадающими интересами при асимметрии информированности

Целевая функция

$$J(x(\cdot)) = \int_W F(w, x(w)) \Phi(w) dw, \quad x = (x_1, x_2), \quad w = (w_1, w_2)$$

$$\int_W E(W|x(w)) \Phi(w) dw \rightarrow \max_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2}, \quad \tilde{X} = \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 = {}^1(\quad, \mathbb{R}^2) \quad (6)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1(w) = x_1(w_2) \\ x_2(w) = x_2(w_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} = 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

# Игры n лиц

Определение 2. Ситуация  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  является равновесной по Нэшу, если для всех  $x_i \in X_i, i \in I_n$  справедливо неравенство:

$$J_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq J_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \forall i \in I_n.$$

Предположим

$$F = \langle A(x, w), (x, w) \rangle, A = A^T = (a_{ij})_{4 \times 4}, W = [a, b] \times [a, b].$$

Тогда задача (6), (7) примет вид:

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1w_1 + \dots + a_{44}w_2^2) \Phi(w) dw \rightarrow \max_{\mathbb{K} \in \mathbb{W}(\cdot, \mathbb{R}^2)}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0.$$



# Задачи поддержки принятия решений при асимметрии информированности

$w=(w_1, w_2, \dots, w_m)$  – случайный вектор с функцией распределения  $\Phi(w)$

множество  $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$  – индексы компонент вектора  $w$

множество  $S_i \subseteq I_m$  – совокупность индексов, определяющих информационную структуру  $i$ -ой решающей функции,

$i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор управления, где  $x_i=x_i(d_i)$ ,  $d_i=(w_j)$ ,  $j \in S_i$ .

Таким образом, задача примет вид:

$$J_i(x) = M[F_i(x(w), w)] \rightarrow \max, i \in I_n \quad (8)$$
$$x_i \in X_i$$

условие разной информированности приводит к отсутствию соответствующей переменной :  $\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = 0, j \notin S_i$ .

# Вариационное расширение

Целевая функция центра: $f_u(k, x) = x \cdot k$	Целевая функция предпринимателей: $f_a(k, x) = (1 - k) \cdot x - \varphi(x, \delta)$
<i>Цели игроков</i>	
Максимизировать целевую функцию путем изменения ставки налога	Максимизировать целевую функцию путем изменения совокупной активности
<i>Информационные гипотезы</i>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Центр знает вероятностное распределение параметра <math>\delta</math>, а предприниматели – его точное значение.</li> <li>2. Компромисс центра и предпринимателей достигается в ситуациях равновесия по Штакельбергу.</li> </ol>	
<i>Решение при <math>\delta_0 &lt; \bar{x} = x_{\max}</math></i>	
$k^* = 1 - \sqrt{\frac{\delta_{cp}}{\bar{x}}}, \delta_{np} = (\delta_0 + \delta) / 2$	$x^*(\delta) = \bar{x} - \frac{\delta}{1 - k^*}$

# Задачи поддержки принятия решений при асимметрии информированности

$$J_i(x(\cdot)) = \int_W F_i(x(w), w) \Phi(w) dw \rightarrow \max_{x_i \in X_i}, i \in I_n,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = 0, j \notin S_i.$$

$$X = \prod_{i \in I_n} X_i, x_i \in X_i, X \subset C^1[W, \mathbb{R}^n], w \in W \subset \mathbb{R}^m$$

Игра в нормальной форме:

$$\Gamma = (I_n, \{X_i\}_{i \in I_n}, \{J_i(x(\cdot))\}_{i \in I_n}) \quad (9)$$

# Необходимые условия оптимальности

Функция Лагранжа:

$$L_i = \int_W \left[ F_i(x(w), w) \Phi(w) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in S_i} \lambda_{ij} \frac{\partial x(d_i)}{\partial w_j} \right] dw.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F_i(x(w), w)}{\partial x_i} \Phi(w) = \sum_{j \in S_i} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial w_j}, i \in I_n.$$

Условие трансверсальности:  $\Lambda(w) \Big|_{\partial W} = 0,$

$$\int_W \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Phi(w) dp_i = 0, \tag{10}$$

$$p_i = \left( w_j \right)_{j \in S_i}, i \in I_n.$$

# Игра двух лиц при асимметрии информированности

$$M \left[ F_1(w_1, w_2, x_1(w), x_2(w)) \right] \rightarrow \max_{x_1},$$

$$M \left[ F_2(w_1, w_2, x_1(w), x_2(w)) \right] \rightarrow \max_{x_2},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0. \quad (11)$$

$$F_1 = \left\langle A(x_1, x_2, w_1, w_2), (x_1, x_2, w_1, w_2) \right\rangle, \quad F_2 = \left\langle B(x_1, x_2, w_1, w_2), (x_1, x_2, w_1, w_2) \right\rangle,$$

$$A = A^T = (a_{ij})_{4 \times 4}, \quad B = B^T = (b_{ij})_{4 \times 4}$$

$$J_1 = \int_W (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1w_1 + \dots + a_{44}w_2^2) \Phi(w) dw \rightarrow \max_{x_1 \in X_1}, \quad (12)$$

$$J_2 = \int_W (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1w_1 + \dots + b_{44}w_2^2) \Phi(w) dw \rightarrow \max_{x_2 \in X_2}.$$

# Игра двух лиц при асимметрии информированности

## Утверждение 1

Пусть компоненты случайного вектора  $w$  есть независимые случайные величины, тогда равновесие по *Нэшу* задачи (12) при условиях (11), и  $a_{11}, b_{22} \leq 0$  достигается на линейных по своим переменным функциях  $x_1^*(w_2)$  и  $x_2^*(w_1)$ , где  $a_{11}$  и  $b_{22}$  элементы матриц  $A$  и  $B$  соответственно.

# Игра двух лиц при асимметрии информированности

$$\begin{cases} a_{11}x_1(w_2) \int_a^b \Phi(w) dw_1 + a_{12} \int_a^b x_2(w_1) \Phi(w) dw_1 + a_{13} \int_a^b w_1 \Phi(w) dw_1 + a_{14} w_2 \int_a^b \Phi(w) dw_1 = 0, \\ b_{22}x_2(w_1) \int_a^b \Phi(w) dw_2 + b_{12} \int_a^b x_1(w_2) \Phi(w) dw_2 + b_{23} w_1 \int_a^b \Phi(w) dw_2 + b_{24} \int_a^b w_2 \Phi(w) dw_2 = 0. \end{cases}$$

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(t)dt = f(s) \quad (13)$$

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} K_1(t,s) & 0 \\ 0 & K_2(s,t) \end{pmatrix}, K_1(t,s) = \frac{b_{22}\Phi(t,s)}{b_{12} \int_a^b \Phi(t,s)dt}, K_2(t,s) = \frac{a_{11}\Phi(t,s)}{a_{12} \int_a^b \Phi(t,s)ds}, \lambda = \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{22}}$$

$$f(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}, f_1(s) = \frac{-\int_a^b (a_{13}t + a_{14}s)\Phi(t,s)dt}{a_{11} \int_a^b \Phi(t,s)dt}, f_2(s) = \frac{-\int_a^b (b_{23}t + b_{24}s)\Phi(t,s)ds}{b_{22} \int_a^b \Phi(t,s)ds}, x(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}$$

# Игра двух лиц при асимметрии информированности

## Утверждение 2

Решение задачи (12) при условиях (11), в концепции равновесия *Нэша* существует и единственно, если выполняются условия:

$$a_{11}, b_{22} \leq 0, (b - a) \max_{(t,s)} \left( \left| \frac{a_{12} \Phi(t,s)}{b} \right|, \left| \frac{b_{12} \Phi(t,s)}{b} \right| \right) < 1$$
$$\left( \left| \frac{a_{12} \Phi(t,s)}{a_{11} \int_a^b \Phi(t,s) dt} \right|, \left| \frac{b_{12} \Phi(t,s)}{b_{22} \int_a^b \Phi(t,s) ds} \right| \right) < 1$$



# Задача стимулирования в активных системах

- Обозначим  $y_i \in A_i$  – действие  $i$ -го АЭ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  – множество активных элементов.
- $z = Q(y)$ , где  $z$  – результат деятельности АЭ, входящих в систему.
- Пусть индивидуальные затраты  $i$ -го АЭ будут  $c = c_i(y)$
- Функцию стимулирования для  $i$ -го АЭ обозначим

$$\sigma_i : A' \times A_0 \rightarrow \mathfrak{R}, \sigma_i = \sigma_i(y, Q(y))$$

тогда, целевая функция  $i$ -го АЭ примет вид:

$$f_i(y, \sigma_i) = \sigma_i(y, Q(y)) - c_i(y), i \in I$$

- Целевая функция центра будет выражаться как разность между результатом деятельности системы и суммарными затратами на стимулирование:

$$\Phi(y, \sigma) = H(y, Q(y)) - \sum_{i=1}^n \sigma_i(y, Q(y))$$

# Задача стимулирования в активных системах

## Ограничения

1.  $\forall i \in I A_i \in \mathbb{R}_+$
2. а) функция  $c = c_i(y)$  непрерывна по всем переменным;  
б)  $c_i(y)$  не убывает по  $\dot{y}_i$   
в)  $\forall y \in A' c_i(y) \geq 0$   
г)  $\forall y_{-i} \in A_{-i} c_i(0; y_{-i}) = 0$
3. Функции стимулирования кусочно-непрерывные и принимают неотрицательные значения.
4. Целевая функция центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при не нулевых действиях агентов.

# Задача стимулирования в активных системах с разной информированностью АЭ

- Обозначим  $u_i(x) \in A_i$  – действие  $i$ -го АЭ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  – множество АЭ
- $z = Q(u)$ , где  $z$  – результат деятельности АЭ, входящих в систему.
- Пусть индивидуальные затраты  $i$ -го АЭ будут  $c_i(u(x))$   
Для оценки затрат будем использовать усредненное значение:

$$\bar{c}_i = M[c_i(u(x))]$$

где  $M[.]$  – математическое ожидание.

- Функцию стимулирования для  $i$ -го АЭ обозначим  $\sigma_i(u(x), z)$

$$\bar{\sigma}_i = M[\sigma_i(u(x), z)]$$

тогда, целевая функция  $i$ -го АЭ примет вид:

$$f_i(u, \sigma_i) = \int \bar{\sigma}_i(u(x), z(u(x))) - c_i(u(x)) \Phi(x) dx$$

- Целевая функция центра будет выражаться как разность между результатом деятельности системы и суммарными затратами на стимулирование:

$$\Phi(u(\cdot), \sigma(\cdot)) = \int_x H(u(x), Q(u(x))) - \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i(u(\cdot), z(u(x))) \Phi(x) dx$$

# Задача стимулирования в активных системах с разной информированностью АЭ

## Ограничения

1.  $\forall i \in I \quad A_i = [0; A_i^+] \subseteq \mathfrak{R}_+^1 \quad A_0 = [0; A_0^+] \subseteq \mathfrak{R}_+^1$
2.  $\frac{\partial u_i(d_i)}{\partial x_j} = 0, \forall i \in I$  где  $d_i = (x_j)_{j \in I_i}$
3. а) функция  $c_i(u(x))$  является неубывающей по  $u_i(x)$  если  $c_i(u_1(x), \dots, u_{i-1}(x), u_i(x) + h(x), u_{i+1}(x), \dots, u_n(x)) \geq c_i(u(x))$  и выполнено неравенство  $u_i(x) + h(x) \geq u_i(x)$ ;  
 б) затраты  $i$ -го АЭ не убывают по  $u_i(x) \quad \forall i \in I$ ;  
 в)  $\forall j \in I \quad c_i(u_j(x)) \dot{\geq} 0$   
 г)  $\forall y_{-i} \in A_{-i} \quad c_i(0; u_{-i}(x)) \dot{\geq} 0$
3. Функционалы стимулирования кусочно-непрерывные и принимают неотрицательные значения.
4. Целевая функция центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при не нулевых действиях агентов.

Пусть ситуация равновесия в игре

$$\begin{cases} f_1(u, v) \rightarrow \max, \\ u \in U \subset R^n \\ f_2(u, v) \rightarrow \max. \\ v \in V \subset R^n \end{cases}$$

, тогда является ситуацией равновесия для игры

$$\begin{cases} J_1 = \int_X f_1(u(x), v(x)) \Phi(x) dx \rightarrow \max, \\ u \in U(x) \subset C^1[X] \\ J_2 = \int_X f_2(u(x), v(x)) \Phi(x) dx \rightarrow \max, \\ v \in V(x) \subset C^1[X] \end{cases}$$

# Задача стимулирования в случае квадратичной структуры

- Выпишем функции Лагранжа  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \iint \lambda_0^1 ((a_{11} - A)u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2) \Phi(x, y) - P_1 \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

$$L_2 = \iint \lambda_0^2 ((b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + (b_{22} - B)v^2) \Phi(x, y) - P_2 \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy$$

где  $p_1, p_2$  – множители Лагранжа.  $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1$

- Уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} F_{1u} - \frac{\partial}{\partial x}(p_1) = 0, \\ F_{2v} - \frac{\partial}{\partial y}(p_2) = 0. \end{cases}$$

- Условие трансверсальности:  $P_1|_{bx} = 0, P_2|_{by} = 0$
- Отсюда система уравнений Эйлера путем несложных преобразований сводится к интегральному уравнению Фредгольма:

$$\varphi(y) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(x) dx = 0$$

где

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & K_1(x, y) \\ K_2(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1(x, y) = \frac{(b_{11} - B)\Phi(x, y)}{b_{12} \int_a^b \Phi(x, y) dy}, \quad K_2(x, y) = \frac{(a_{22} - A)\Phi(x, y)}{a_{12} \int_a^b \Phi(x, y) dy}$$

$$\vec{\varphi}(y) = \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{a_{12}}{a_{22} - A} \frac{b_{11} - B}{b_{12}}$$

# Пример задачи стимулирования второго рода

- Рассмотрим задачу стимулирования второго рода в АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат:

$$c_1(u, v) = \frac{(u + \alpha v)^2}{2\bar{r}_1},$$

$$c_2(u, v) = \frac{(v + \alpha u)^2}{2\bar{r}_2},$$

где  $\alpha$  — некоторый параметр,  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  — оценка квалификации АЭ.

- Пусть функция дохода центра  $H(u, v) = u + v$
- Фонд заработной платы ограничен величиной  $R$  (глобальное ограничение)
- Центр использует систему стимулирования:

$$\sigma_K(u^*, v^*, u, v) = \begin{cases} c(u^*, v^*), & (u^*, v^*) = (u, v), \\ 0, & (u^*, v^*) \neq (u, v) \end{cases}$$

- Задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(u, v) = H(u, v) - c_1(u, v) - c_2(u, v) \rightarrow \max_{u, v}, \\ c_1(u, v) + c_2(u, v) \leq R \end{cases}$$

# Пример задачи стимулирования второго рода

Задачу (6) решим с помощью метода множителей Лагранжа.

- Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(u, v, \alpha, \lambda) = \lambda_0 \left( u + v - \frac{(u + \alpha v)^2}{2\bar{r}_1} - \frac{(v + \alpha u)^2}{2\bar{r}_2} \right) + \lambda \left( \frac{(u + \alpha v)^2}{2\bar{r}_1} + \frac{(v + \alpha u)^2}{2\bar{r}_2} - R \right)$$

где  $\lambda \geq 0$  – множитель Лагранжа,  $\lambda_0 = 1$ .

- Необходимые условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \frac{\partial L}{\partial v} = 0, \\ \lambda \left( \frac{(u + \alpha v)^2}{2\bar{r}_1} + \frac{(v + \alpha u)^2}{2\bar{r}_2} - R \right) = 0 \end{cases}$$

1.  $\lambda = 1$  решения не существует

2.  $\lambda = 0$  решение существует и имеет вид:

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{\bar{r}_1 - \alpha\bar{r}_2}{(1 + \alpha)^2(1 - \alpha)}, \\ v_1^* = \frac{\bar{r}_2 - \alpha\bar{r}_1}{(1 + \alpha)^2(1 - \alpha)}. \end{cases}$$

3.  $\lambda \neq 1$  и  $\lambda \neq 0$  решение будет следующим:

$$\begin{cases} u_2^* = \frac{\sqrt{2R}}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2} \frac{\bar{r}_1 - \alpha\bar{r}_2}{1 - \alpha^2}, \\ v_2^* = \frac{\sqrt{2R}}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2} \frac{\bar{r}_2 - \alpha\bar{r}_1}{1 - \alpha^2}, \\ \lambda = 1 - \frac{1}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2R}}. \end{cases}$$



# Пример задачи стимулирования второго рода

- Матрица вторых производных:

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}\right) & (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2}\right) \\ (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2}\right) & (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}\right) \end{pmatrix}$$

- Выпишем главные миноры матрицы :

$$M_{11} = (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}\right) < 0$$

$$M_{22} = (\lambda - 1)^2 \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\bar{r}_1 \bar{r}_2} \geq 0$$

- В обоих точках достигается максимум функции, найдем значения данной функции в точках (10) и (11) и сравним их:

$$\Phi(u_1^*, v_1^*) = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2(\alpha + 1)^2}$$

$$\Phi(u_2^*, v_2^*) = \frac{\sqrt{2R}}{\alpha + 1} - \frac{R}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}$$

Абсолютный максимум достигается в первой точке.

# Пример задачи стимулирования второго рода при разноразной информированности активных элементов

- Рассмотрим задачу стимулирования второго рода в АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат:

$$\bar{c}_1(u, v) = \int_x \frac{(u(x) + \alpha v(x))^2}{2r_1(x)} P(x) dx,$$

$$\bar{c}_2(u, v) = \int_x \frac{(v(x) + \alpha u(x))^2}{2r_2(x)} P(x) dx$$

, где  $\alpha$  – некоторый параметр,  $\bar{r}_1(x), \bar{r}_2(x)$  – оценка квалификации АЭ,

$$\bar{r}_1(x) = \int r_1(x) P(x) dx, \quad \bar{r}_2(x) = \int r_2(x) P(x) dx$$

- Пусть функция дохода центра  $H(u, v) = u(x) + v(x)$
- Фонд заработной платы ограничен величиной  $R$  (глобальное ограничение)
- Центр использует систему стимулирования:

$$\sigma_K(u^*, v^*, u, v) = \begin{cases} c(u^*, v^*), & (u^*, v^*) = (u, v), \\ 0, & (u^*, v^*) \neq (u, v) \end{cases}$$

- Задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(u, v) = H(u, v) - \bar{c}_1(u, v) - \bar{c}_2(u, v) \rightarrow \max_x, \\ \bar{c}_1(u, v) + \bar{c}_2(u, v) \leq R \end{cases}$$

- Разная информированность АЭ:  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$

# Пример задачи стимулирования второго рода при разной информированности активных элементов

- Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$L(u, v, \lambda) = \int_x \Psi(u, v, \lambda) P(x) dx = \int_x (\lambda_0 ((u(x) + v(x)) - \bar{c}_1(u, v) - \bar{c}_2(u, v)) + P_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + P_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \lambda (\bar{c}_1(u, v) + \bar{c}_2(u, v) - R)) P(x) dx,$$

где  $\lambda \geq 0$  – множитель Лагранжа,  $\lambda_0 = 1$ .

- Необходимые условия:

$$\begin{cases} \int_x \frac{\partial \Psi}{\partial u} dx_1 = 0, \\ \int_x \frac{\partial \Psi}{\partial v} dx_2 = 0, \end{cases}$$

- Обозначим:  $K_1(x_1, x_2) = \left( \frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)} \right) P(x)$        $\varphi_1(x_1, x_2) = \int_x \left( \frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)} \right) P(x) dx_1$

$$K_2(x_1, x_2) = \left( \frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)} \right) P(x) \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \int_x \left( \frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)} \right) P(x) dx_2$$

- Отсюда система () путем несложных преобразований сводится к интегральному уравнению:

$$U(x) - \delta \int_x K(x, y) U(y) dy = f$$

где  $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ ,  $U(y) = \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix}$ ,  $K(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K_1(x, y)}{\varphi_1(x)} \\ \frac{K_2(x, y)}{\varphi_2(x)} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} \end{pmatrix}$

# Пример задачи стимулирования второго рода при разной информированности активных элементов

Применим метод моментов для решения интегрального уравнения

Фредгольма: 
$$U(x) - \delta \int_x K(x,y)U(y)dy = f$$

Пусть в качестве линейно независимой системы возьмем следующую:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x \\ 1, x, x^2 \end{cases}$$

Возьмем  $A=2$ ,  $B=1$ ,  $m=n=\alpha=\frac{1}{2}$  и отрезок  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

Рассмотрим систему  $\sum_{j=1}^3 c_j (\alpha_{ij} - \delta\beta_{ij}) = \delta\gamma_i \quad (i=1,2,3)$ ,

где  $a_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$ ,  $\beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds$ ,  $\gamma_i(x) = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)f(s)ds$ .

Откуда решение уравнения ( ) имеет вид:

$$\bar{U}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} + \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i^1(x) \\ \frac{1}{1-\lambda} + \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i^2(x) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{U}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.23 + 4.43 \cos(2\pi x_2) - 7.29 \sin(2\pi x_2) \\ -0.54 + 4.43x_1 - 7.29x_1^2 \end{bmatrix}$$