`Первообразная и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Исторические сведения

Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод Разыскания площадей , объемов и центров тяжести.

В зародышевой форме такой метод применялся ещё Архимедом . Систе-Матическое развитие он получил в 17-м веке в работах Кавальери ,Торриче-лли, Фермам,Паскаля. В 1659 г. И.Барроу установил связь мемжду задачей о разыскании площади и задачей о разыскании касательной. Ньютон и Лейб-Ниц в 70-х годах 17-го века отвлекли эту связь от упомянутых частных геомет-Рических задач. Тем мсамым была установлена связь между интегральным и Дифференциальным исчислением.

Эта связь была использована Ньютоном , Лейбницем и их учениками для Развития техники интегрирования. Своего нынешнего состояния методы интег-Рирования в основном достигли в работах Л.Эйлера. Труды М.В.Остроградско-Го и П.Л.Чебышева завершили развитие этих методов.

Понятие об интеграле.

Пусть линия MN дана уравнением $y = f(x)$ И надо найти площадь F «криволинейной трапеции aABb. Разделим отрезок ab на n частей $ax_1,\ x_1x_2\ ,\dots,\ x_{n-1}b$ (равных или неравных) и построим ступенчатую фигуру, показанную штриховкой на черт.1

Её площадь , её площадь равна

$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \ \dots\ + y_{n-1}(b - x_{n-1}).$ (1)

Если ввести обозначения

$x_1 - a = dx_0\ ,\ x_2 - x_1 = dx_1\ ,\ \dots\ ,\ b - x_{n-1} = dx_{n-1}\ ,$

То формула (1) примет вид

$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \ \dots + y_{n-1} dx_{n-1}\ .$ (3)

Искомая площадь есть предел суммы (3) при бесконечно большом n.

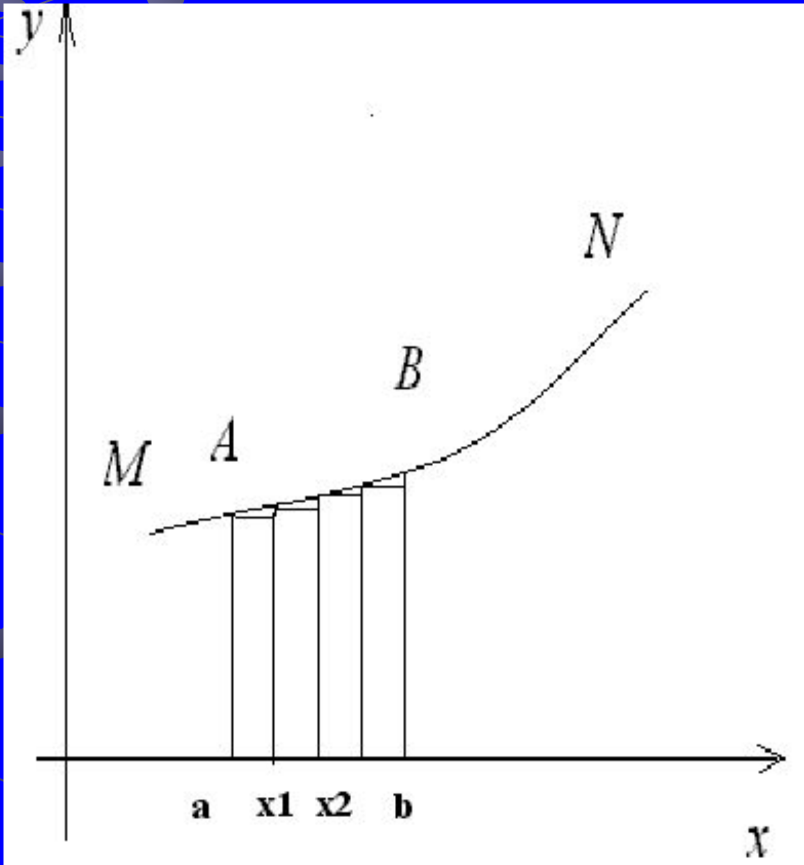
Лейбниц ввёл для этого предела обозначение $\int ydx\ ,$ (4)

В котором $\int$ (курсивное s) – начальная буква слова summa (сумма),

Е выражение ydx указывает типичную форму отдельных слагае-
Мых .

Выражение $\int ydx$ Лейбниц стал называть интегралом – от латинско-
Го слова integralis – целостный . Ж.Б.Фурье усовершенствовал обоз-
Начение Лейбница , придав ему вид

$\int_a^b ydx$ Здесь явно указаны начальное и конечное значе-
ния x .



Связь между интегрированием и дифференцированием.

Будем считать *a* постоянной , а *b* – переменной величиной.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ будет функцией от *b* .

Дифференциал этой функции равен dx

$$d\int_a^b f(x)dx = f(b)db$$

Первообразная функция.

Пусть функция $f(x)$ есть производная от функции $F(x)$,

т.с. $f(x)dx$ Есть дифференциал функции $F(x)$:

$$f(x)dx = dF(x)$$

Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$

Пример нахождения первообразной.

Функция $3x^2$ есть первообразная от x^3

Т.С. $3x^2\,dx$ Есть дифференциал функции x^3

$$3x^2\,dx = d(x^3)$$

Функция x^3 является первообразной для функции $3x^2$

Неопределённый интеграл.

$\int f(x)dx$

Неопределённым интегралом данного выражения $f(x)dx$

Называется наиболее общий вид его первообразной функции. Неопределённый интеграл выражения $f(x)dx$

обозначается $\int f(x)dx$

Выражение $f(x)dx$ называется подинтегральным выражением,

Функция $f(x)$ -подинтегральной функцией , переменная x –перемен-
Ной интегрирования. Разыскание неопределённого интеграла данной
Функции называется интегрированием.

Пример нахождения неопределённого интеграла.

Наиболее общий вид первообразной функции для выражения

$2xdx$ есть $x^2 + C$. Эта функция является

Неопределённым интегралом выражения $2xdx$:

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

Где $C = const$.

Неопределённые интегралов от тригонометрических функций.

1) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

5) $\int tgxdx = -\ln \cos x + C$

6) $\int ctgxdx = \ln \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg \; x + C$

Неопределённые интегралы от некоторых функций.

1)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

2)
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

3)
$$\int e^x dx = e^x + C$$

4)
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

5)
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

6)
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C$$