Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§53. Формула бинома Ньютона

Содержание

Введение

- Известно, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Умножив обе части этого тождества на $(a + b)$, получим: $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Аналогично умножив обе части тождества $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ на $(a + b)$, получим:
  $(a + b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3)(a + b) =$
  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Итак,
  $(a + b)^1 = a + b$;
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Проанализируем полученные формулы

- Замечаем, во-первых, что в правой части любой из формул сумма показателей при переменных в каждом одночлене равна показателю двучлена в левой части. *Например*, в последней формуле двучлен возводится в четвертую степень и сумма показателей при a и b в каждом слагаемом в правой части равна 4. Впрочем, это понятно, ведь $(a + b)^4$ — это $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$ и после раскрытия скобок получится многочлен, состоящий из одночленов a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4 с некоторыми коэффициентами.
- Замечаем, во-вторых, что коэффициенты при одночленах в правых частях формул ассоциируются с треугольником Паскаля, о котором мы говорили в § 52. Сравните числа, имеющиеся в первых четырех строках треугольника, с соответствующими коэффициентами при одночленах в каждой из четырех формул. Полное совпадение.

Предположение

- Естественно предположить, что подмеченная закономерность сохранится и в общем случае, т. е. для любого натурального значения n верна следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots +$$

$$+ C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Доказательство формулы

- Рассмотрим произведение ***n*** двучленов ***(a + b)(a + b)(a + b)•…• (a + b)*** и докажем, что коэффициент при одночлене $a^{n-k}b^k$ равен C_n^k.
- В самом деле, чтобы, раскрыв скобки, получить одночлен вида $a^{n-k}b^k$, нужно из ***n*** множителей вида ***(a + b)*** выбрать ***k*** множителей (порядок не важен), откуда берется переменная ***b***; тогда автоматически из оставшихся ***n-k*** множителей будет взята переменная ***a***. Но выбрать ***k*** множителей из ***n*** имеющихся без учета порядка можно C_n^k способами, что и требовалось доказать. •

Биномиальные коэффициенты

- Формулу (1) обычно называют **формулой бинома Ньютона** (бином — двучлен), а коэффициенты

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,\ \ldots,\ C_n^k,\ \ldots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n \ —$$

биномиальными коэффициентами.

Пример

Раскрыть скобки в выражении:

а) $(x + 1)^6$;

б) $(a^2 - 2b)^5$.

Решение:

а) Применим формулу (1), считая, что ***a = x, b= 1, n = 6***. Получим:

$$(x+1)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot 1 + C_6^2 x^4 \cdot 1^2 + C_6^3 x^3 \cdot 1^3 +$$
$$+ C_6^4 x^2 \cdot 1^4 + C_6^5 x \cdot 1^5 + C_6^6 \cdot 1^6.$$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 = 6;\ C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Таким образом, $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

б) Применим формулу (1), считая, что в роли a выступает $2a^2$, а в роли b выступает $-2b$. Получим:

$$(a^2 - 2b)^5 = C_5^0(a^2)^5 + C_5^1(a^2)^4(-2b) + C_5^2(a^2)^3(-2b)^2 +$$
$$+ C_5^3(a^2)^2(-2b)^3 + C_5^4(a^2)(-2b)^4 + C_5^5(-2b)^5.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_5^0 = C_5^5 = 1;\ C_5^1 = C_5^4 = 5;\ C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Таким образом, $(a^2 - 2b)^5 = a^{10} - 10a^8b + 40a^6b^2 - 80a^4b^3 + 80a^2b^4 - 32b^5$.

Свойство биномиальных коэффициентов

- В заключение получим одно любопытное свойство биномиальных коэффициентов. Составим формулу бинома Ньютона для выражения $(x + 1)^n$ (подобно тому, как в рассмотренном примере мы применили формулу бинома Ньютона к выражению $(x + l)^6$). Получим:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

Если в этом тождестве положить $x = 1$, то получим:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Для учителя

Весьма краткий § 53 практически является продолжением § 52, и в первоначальном варианте учебника таковым и был, т. е. стоял в конце § 52. Все же мы решили выделить бином Ньютона в отдельный параграф. Во-первых, иначе § 52 оказался бы излишне объемным и перегруженным техническими деталями, а, во-вторых, бином Ньютона и исторически, и с учебной точки зрения — это материал, требующий для освоения специального внимания, отдельного от знакомства с сочетаниями и размещениями.

Сначала в § 53 выписаны формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^1 = a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3;$

$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

С их помощью обнаруживается связь с только что изученным треугольником Паскаля. Затем приведена собственно формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 +$$
$$+ \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

и кратко приведено ее обоснование, основанное именно на комбинаторном определении чисел C_n^k. По существу, в этом параграфе мы лишь знакомимся с формулой бинома Ньютона.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы