Автор: Ученик 9 «и» класса МБОУ «СОШ №7».
Мансуров Артур
Руководитель: Ионга Ирина Николаевна,
учитель математики,
II квалификационная категория.

Решение систем уравнений

По страницам учебников А.Г. Мордковича
Алгебра 7 и 9

Цель работы:

- По страницам учебников А.Г. Мордковича «Алгебра 7 и 9 классов» проанализировать рассмотренные в них методы решения систем уравнений.
- Исследовать некоторые способы решений систем уравнений за страницами учебника.
- Показать своей работой, что решать системы уравнений очень просто.

Задачи работы:

- выявить основные способы решения систем линейных уравнений, рассматриваемых в учебнике А.Г. Мордковича «Алгебра -7»
- проиллюстрировать примерами каждый способ.
- расширить свои познания о других способах решения систем линейных уравнений.
- ввести понятие систем рациональных уравнений.
- рассмотреть основные методы решения систем рациональных уравнений по учебнику А.Г. Мордковича «Алгебра- 9».
- проиллюстрировать теоретический материал удачными примерами.
- рассмотреть новый вид – симметрические системы.
- разобраться в методах решения этого вида.

Уравнение и его свойства

Определение

- Уравнение – это равенство, содержащее одну или несколько переменных

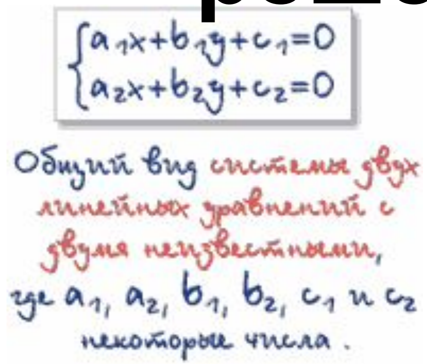
$ax=b$ → Линейное уравнение с одной переменной

$ax+by=c$ → Линейное уравнение с двумя переменными

Свойства уравнений

- если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному
- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному

Система уравнений и её решение



Определения

- Системой уравнений называется некоторое количество уравнений, объединенных фигурной скобкой. Фигурная скобка означает, что все уравнения должны выполняться одновременно
- Каждая пара значений переменных, которая одновременно является решением всех уравнений системы, называется решением системы
- Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство
- Решить систему уравнений - это значит найти все её решения или установить, что их нет

Способы решения систем уравнений

Система линейных уравнений

$$a_1\mathbf{x}+b_1\mathbf{y}=c_1,$$
$$a_2\mathbf{x}+b_2\mathbf{y}=c_2;$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 - заданные числа, а **x** и **y** - неизвестные

Способы решения

- Способ подстановки
- Способ сравнения
- Способ сложения
- Графический способ
- Метод определителей

Способ подстановки (алгоритм)

- Из какого-либо уравнения ***выразить*** одну переменную через другую
- Подставить ***полученное выражение*** для переменной в ***другое*** уравнение и решить его
- Сделать ***подстановку*** найденного значения переменной и вычислить значение второй переменной
- Записать ответ: $x=$…; $y=$… .

Решение системы способом подстановки

Выразим y через x

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3x - 2y - 11 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3(2 - y) - 2y - 11 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ 6 - 3y - 2y - 11 = 0; \end{cases}$$

Подставим

Решим уравнение

$6 - 3y - 2y - 11 = 0;$

$-5y = 5;$

<u>$y = -1;$</u>

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 - (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Подставим

Ответ: (3;-1)

Способ сравнения (алгоритм)

- ***Выразить*** y через x (или x через y) в каждом уравнении
- ***Приравнять*** выражения, полученные для одноимённых переменных
- Решить ***полученное*** уравнение и найти значение одной переменной
- ***Подставить*** значение найденной переменной в одно из выражений для другой переменной и найти её значение
- Записать ответ: x=…; y=… .

Решение системы способом сравнения

$\begin{cases} y - 2x = 4, \\ 7x - y = 1; \end{cases}$

Выразим у через х

$\begin{cases} y = 2x + 4, \\ 7x - 1 = y; \end{cases}$

Приравняе
м
выражения
для у

$7x - 1 = 2x + 4,$

$7x - 2x = 4 + 1,$

$5x = 5,$

$x = 1.$

Решим
уравнен
ие

$\begin{cases} y = 2x + 4, \\ x = 1; \end{cases}$

Подстав
им

$\begin{cases} y = 2 \cdot 1 + 4, \\ x = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6, \\ x = 1. \end{cases}$

Ответ: (1; 6)

Способ сложения (алгоритм)

- ***Уравнять*** модули коэффициентов при какой-нибудь переменной
- ***Сложить*** почленно уравнения системы
- Составить ***новую*** систему: одно уравнение новое, другое - одно из старых
- Решить ***новое*** уравнение и найти значение одной переменной
- ***Подставить*** значение найденной переменной в старое уравнение и найти значение другой переменной
- Записать ответ: $x=$…; $y=$… .

Решение системы способом сложения

Уравняем модули коэффи-циентов перед у

$$\begin{cases} 4x-7y=30, \ |\cdot(-1) \\ 4x-5y=90; \end{cases}$$

Сложим уравне-ния почленно

$$+\begin{cases} -4x+7y=-30, \\ 4x-5y=90; \end{cases}$$

Решим уравнение

$$\begin{cases} 2y = 60, \\ 4x-5y=90; \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} y=30, \\ 4x=90+150; \end{cases}$$

Решим уравнение

$$\begin{cases} y=30, \\ 4x=150+90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=30, \\ 4x=240; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=30, \\ x=240:4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=30, \\ x=60. \end{cases}$$

Ответ: (60; 30)

Графический способ (алгоритм)

- Выразить у через х в каждом уравнении
- Построить в одной системе координат график каждого уравнения
- Определить координаты точки пересечения
- Записать ответ: х=…; у=… , или (х; у)

Решение системы графическим способом

Вырази м у через х

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ y + x = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ y = 10 - x; \end{cases}$$

Построим график первого уравнения

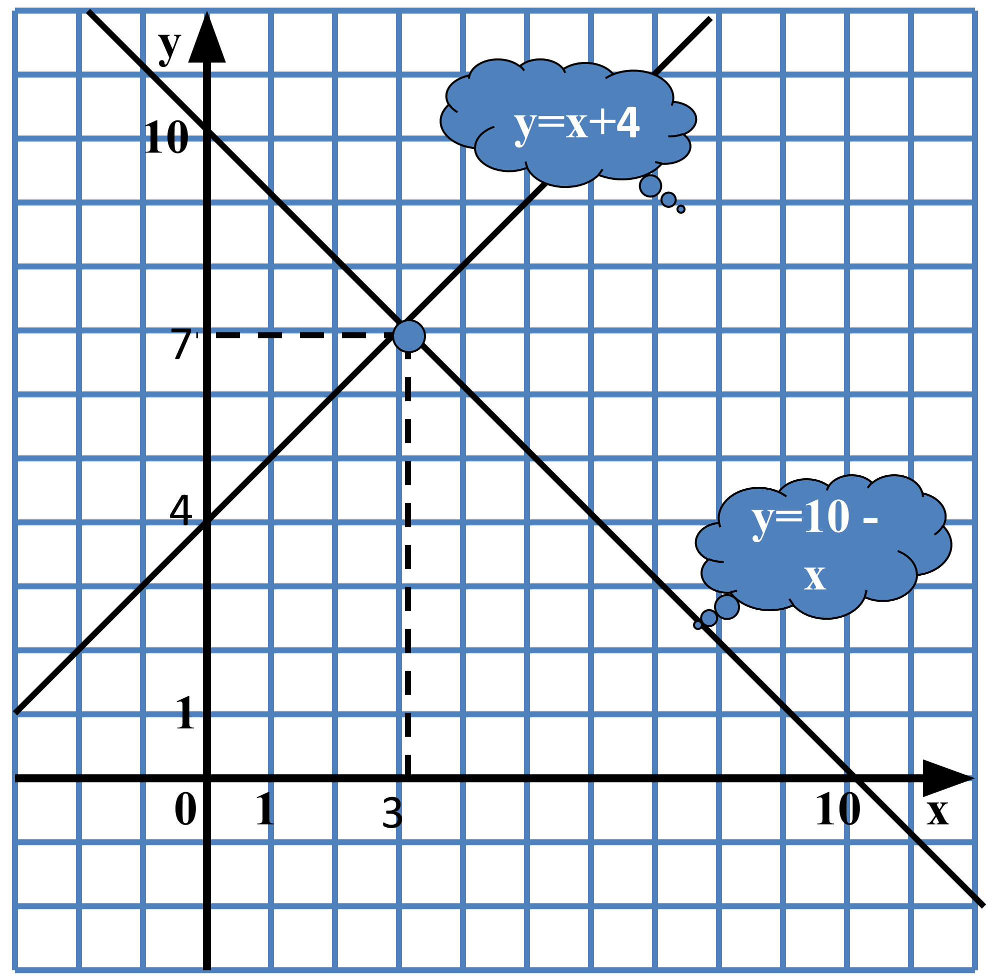
$y = x + 4$

x	0	-4
y	4	0

Построим график второго уравнения

$y = 10 - x$

x	0	10
y	10	0



Ответ: (3; 7)

Метод определителей (алгоритм)

- Составить табличку (матрицу) коэффициентов при неизвестных и вычислить определитель Δ.
- Найти - определитель Δ_x, получаемый из Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов.
- Найти - определитель Δ_y, получаемый из Δ заменой второго столбца на столбец свободных членов.
- Найти значение переменной x по формуле Δ_x / Δ.
- Найти значение переменной y по формуле Δ_y / Δ.
- Записать ответ: x=…; y=… .

Решение системы методом определителей

$$\begin{cases} 4x+7y=30, \\ 4x+5y=90; \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных Δ

определи-
тель Δ_x, заменив
в определи-
теле Δ **первый столбец**
на **столбец**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot5 - 7\cdot4 = 20 - 28 = -8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 30 & 7 \\ 90 & 5 \end{vmatrix} = 30\cdot5 - 7\cdot90 = 150 - 630 = -480$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 30 \\ 4 & 90 \end{vmatrix} = 4\cdot90 - 30\cdot4 = 360 - 120 = 240$$

Составим определи-
тель Δy, заменив в
определителе Δ
второй столбец
на **столбец**
свободных
членов

Найдем
x и y

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-480}{-8} = 60; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{240}{-8} = -30.$$

Ответ: x=3; y= -10 или (3;-10)

Системы рациональных уравнений

- Рациональным уравнением с двумя переменными x и y называют уравнения вида $p(x, y) = 0$, где $p(x, y)$ – рациональное выражение.
- Системы рациональных уравнений, изучаемые в 9-ом классе, так же можно решать выше предложенными способами.

Примеры решения систем рациональных уравнений (метод подстановки)

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$$

Выразим

$$\begin{cases} x = y + 1, \\ 2y^2 + 2y - 40 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим два значения y : y, = 4 и y_2 = -5 . Из первого уравнения, получим $\boldsymbol{x_1}$ = 5 , x_2 = -4 .

Ответ: (5;4),(-4;-5).

Алгоритм метода введения новой переменной

- Замени одно или два выражения в уравнениях системы новыми переменными так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.
- Реши полученную систему уравнений методом, наиболее подходящим для этой системы уравнений.
- Сделай обратную замену, для того, чтобы найти значения первоначальных переменных.
- Запиши ответ в виде пар значений (x,y), которые были найдены на третьем шаге.

Пример решения систем рациональных уравнений (метод введеня новых пере...)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

Обозначим и получим

$$\frac{1}{x+y} = a\,, \quad \frac{1}{x-y} = b$$

Решим

$$\begin{cases} a+b=2, \\ 3a+4b=7, \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 1, \\ \dfrac{1}{x-y} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Ответ: (1;0)

Возвратные уравнения

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

называется **возвратным,**

если его коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, равны, то есть если

$a_{n-1} = a_k$, при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Симметрические системы уравнений

- Система с n неизвестными называется симметрической, если она не меняется при перестановки неизвестных.
- Симметрическая система двух уравнений с двумя неизвестными x и y решается подстановкой

$u = x + y$, $v = xy$ (Заметим, что встречающиеся выражения в симметрических системах выражаются через u и v).

Примеры решения симметрических систем уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Пусть $x + y = u$, $xy = v$.

Выразим у через u и v

$$\begin{cases} u^2 - v = 13, \\ u = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - v = 13, \\ u = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 3, \\ u = 4 \end{cases}$$

Произведем Обратную замену

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ (4 - y)\,y = 3 \end{cases}$$

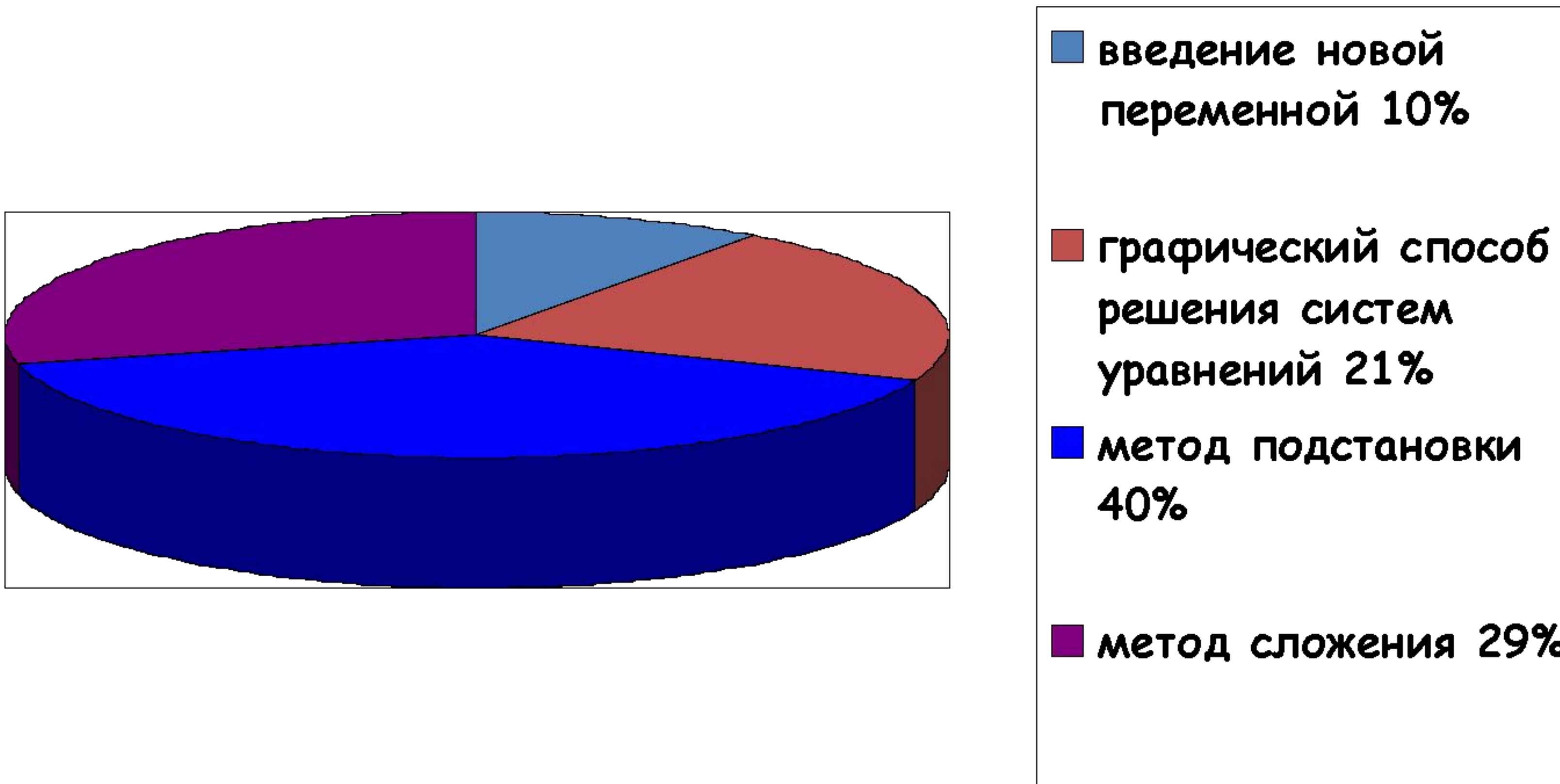
Решим уравнение

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ y_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - y, \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 3); (3; 1).

Приверженность к способам решения систем уравнений в 9 «И» классе МОУ «СОШ №7»



Заключение

В процессе написания работы мы:

- проанализировали и познакомились с разными видами систем алгебраических уравнений.
- обобщили научные сведения по теме «Системы уравнений».
- разобрались и научились решать системы рациональных уравнений способом введения новых переменных.
- рассмотрели основную теорию, связанную с симметрическими системами уравнений.
- научились решать симметрические системы уравнений.

(Большое спасибо!)