Иоганн Себастьян Бах

Токката и фуга ре минор

Токката (фантазия)

- Хроматическая фантазия написана в размере 4/4, имеет 79 тактов, т. е. 79• 4 = 316 четвертных долей.
- состоит из двух ясно различимых по характеру частей, отделенных друг от друга паузой

$$a_1 = a\varphi = 0,316 \cdot 0,618 = 195,3.$$

- первая часть фактически заканчивается на 3-й четверти 49-го такта, т. е. на 195-й (48 • 4 + 3) четверти *a*1 = 195.

$$\frac{316}{195} = \frac{195}{121}, \qquad 195 + 121 = 316.$$

- Хроматическая фантазия разделена на первую и вторую части в золотой пропорции:

Число Фибоначчи

- Но на этом чудеса гениального творения Баха только начинаются. Построив ряд золотого сечения при *a*=316, имеем

316 195,3 120,7 74,6 46,1 28,5 17,6.

Хроматическая фантазия
316
1-я часть
195,3
2-я часть
120,7
120,7
74,6
74,6
46,1
74,6
46,1
46,1
28,5
46,1
28,5
28,5
17,6
Остановка, к которой стремились все предыдущие ходы
Кульминация первой части
Остановка, прерывающая арпеджированные фигурации
Конец первой части
Прерванная каденция
Кульминация второй части
Начало романтических речитативов
Конец второй части

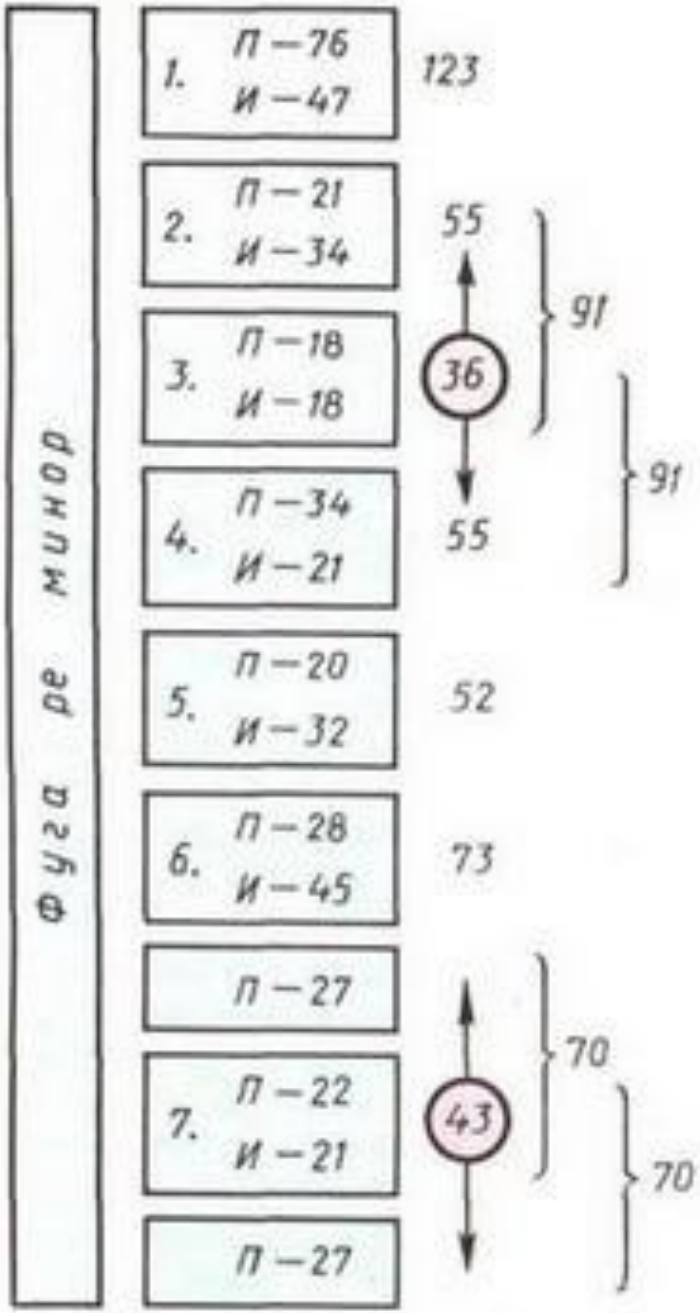
К. Розенов (1861Русский советский музыковед Э. К. Розенов (1861-1935)

Вывод: Хроматическая фантазия, произведение свободного по форме жанра, буквально соткано из золотых пропорций. Пожалуй, эстетическое впечатление от математического анализа Хроматической фантазии имеет не меньшую силу, чем прослушивание бессмертного творения Баха. А взятые вместе - чувственное впечатление и рациональный анализ, безусловно, позволяют еще на один шаг приблизиться к сокровенным тайникам гения.

Фуга

- *Фуга* (от лат. fuga - бег) является наиболее совершенной формой многоголосной музыки (полифонии).
- Фуга строится на многократных проведениях основной музыкальной темы в разных голосах.
- Проведения основной темы обычно перемежаются в фуге с промежуточными вставками, *интермедиями*
- Фуга в отличие от фантазии имеет четко определенный закон построения
- Но тем не менее точность "математического" построения фуги *ре минор* просто поражает!

$123 \cdot \varphi = 76{,}01$	$\frac{123}{76} = \frac{76}{47}$	$76 + 47 = 123$
$123 \cdot \varphi^2 = 46{,}97$		
$55 \cdot \varphi = 33{,}99$	$\frac{55}{34} = \frac{34}{21}$	$34 + 21 = 55$
$55 \cdot \varphi^2 = 21{,}00$		
$91 \cdot \varphi = 56{,}23$	$\frac{91}{55} = \frac{55}{36}$	$55 + 36 = 91$
$91 \cdot \varphi^2 = 34{,}75$		
$52 \cdot \varphi = 32{,}13$	$\frac{52}{32} = \frac{32}{20}$	$32 + 20 = 52$
$52 \cdot \varphi^2 = 19{,}85$		
$73 \cdot \varphi = 45{,}11$	$\frac{73}{45} = \frac{45}{28}$	$45 + 28 = 73$
$73 \cdot \varphi^2 = 27{,}87$		
$70 \cdot \varphi = 43{,}26$	$\frac{70}{43} = \frac{43}{27}$	$43 + 27 = 70$
$70 \cdot \varphi^2 = 26{,}73$		



7 пар"проведение-интермедия" пять пар строго подчиняются закону золотого сечения.

Строение фуги ре минор И. С. Баха:

Целые числа указывают число четвертей в фуге

Дробные - теоретическое значение золотых сечений

Золотые пропорции в более крупных частях фуги отмечены фигурными скобками

Центры симметрии – кружками

П – проведение

И - интермедия.

Вывод:

Простой математический анализ, не выходящий за рамки арифметики, позволяет совершенно иными глазами взглянуть на музыкальное произведение, увидеть его скрытую внутреннюю красоту, которую мы только ощущаем, слушая произведение, и которую мы "видим", проводя его математический анализ.