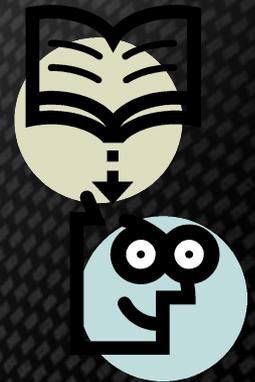


Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Выполнила: студентка
Адутова А.Р.

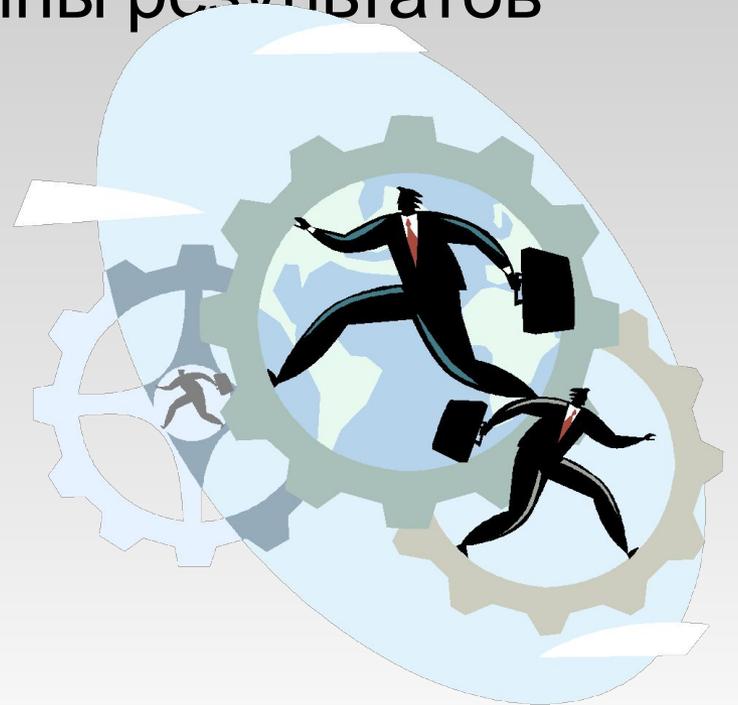
Группы 3ТБб-02-21оп

Проверил: преподаватель
Шестаков Н.И.



На практике мы всегда имеем дело с ограниченным числом измерений, и задача, которая всегда стоит перед оператором, состоит в том, как оценить точность измерений, т.е. найти его меру приближения к истинному значению на основании группы результатов наблюдения.

- В результате отдельных измерений мы получаем некоторые строго фиксированные результаты (точки) измеряемой величины. Их значения являются случайными с некоторым распределением.



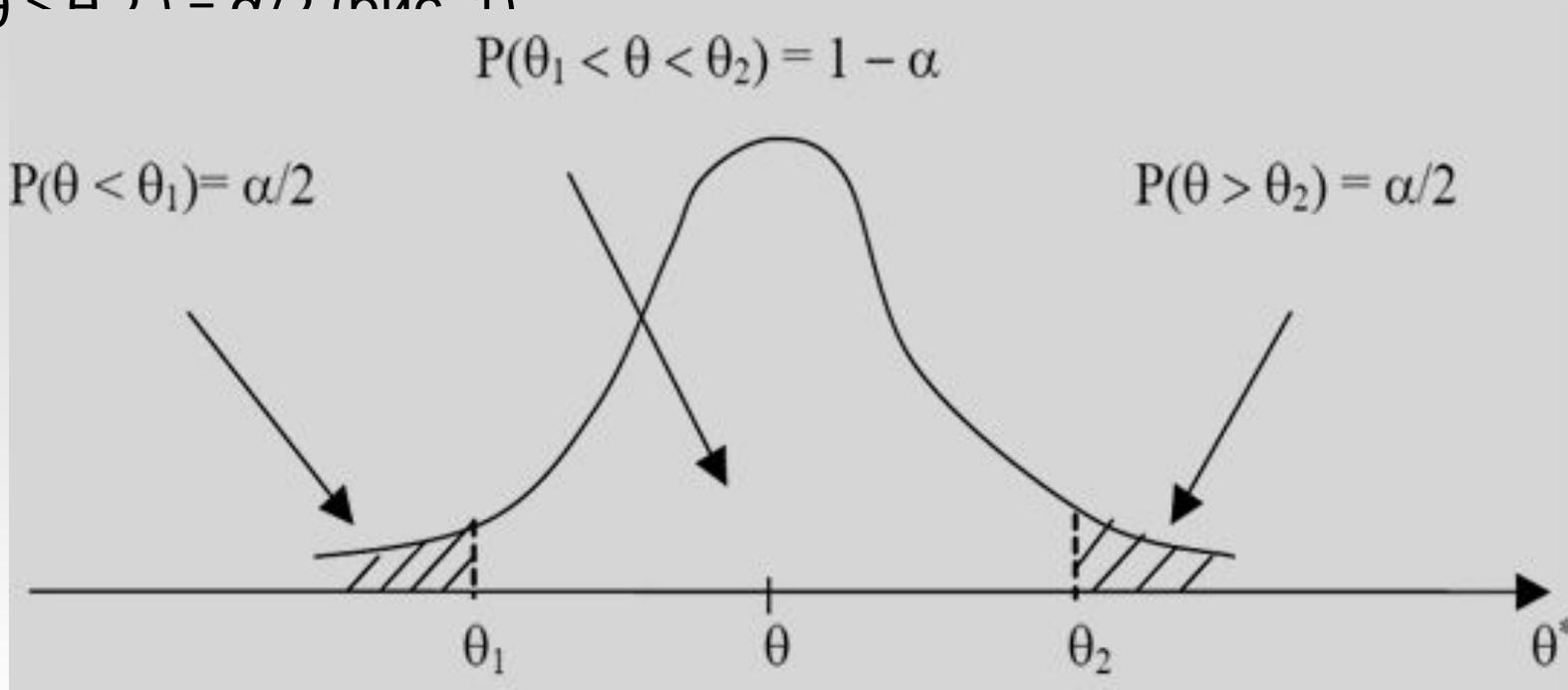
Понятие о доверительных интервалах.

После получения точечной оценки θ^* желательно иметь данные о надежности такой оценки. Особенно важно иметь сведения о точности оценок для небольших выборок. Поэтому точечная оценка может быть дополнена интервальной оценкой — интервалом (θ_1, θ_2) , внутри которого с наперед заданной вероятностью γ находится точное значение оцениваемого параметра θ .

Зачастую для определения доверительного интервала заранее выбирают число $\alpha = 1 - \gamma$, $0 < \alpha < 1$, называемое уровнем значимости, и находят два числа θ_1 и θ_2 , зависящих от точечной оценки θ^* , такие, что

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha = \gamma. \quad (1)$$

В этом случае говорят, что интервал (θ_1, θ_2) покрывает неизвестный параметр θ с вероятностью $(1 - \alpha)$, или в $100(1 - \alpha)\%$ случаев. Границы интервала θ_1 и θ_2 называются доверительными, и они обычно находятся из условия $P(\theta < \theta_1) = P(\theta > \theta_2) = \alpha/2$ (рис. 1)



- Длина доверительного интервала, характеризующая точность интервальной оценки, зависит от объема выборки n и надежности γ (уровня значимости $\gamma = 1 - \alpha$). При увеличении величины n длина доверительного интервала уменьшается, а с приближением надежности γ к единице — увеличивается. Выбор α (или $\gamma = 1 - \alpha$) определяется конкретными условиями. Обычно используется $\alpha = 0,1$; $0,05$; $0,01$, что соответствует 90, 95, 99%-м доверительным интервалам.



Общая схема построения доверительного интервала:

1. Из генеральной совокупности с известным распределением $f(x, \theta)$ случайной величины X извлекается выборка объема n , по которой находится точечная оценка θ^* параметра θ .
2. Строится случайная величина $Y(\theta)$, связанная с параметром θ и имеющая известную плотность вероятности $f(y, \theta)$.
3. Задается уровень значимости α .
4. Используя плотность вероятности случайной величины $P(c_1 < Y(\theta) < c_2 = \int_{c_1}^{c_2} f(y, \theta) dy) = 1 - \alpha$ такие, что

(2)

$$P(Y(\theta) < c_1) = \alpha/2; \quad P(Y(\theta) > c_2) = \alpha/2.$$

- Интервальная оценка также носит случайный характер, так как она напрямую связана с результатами выборки. Однако она позволяет сделать следующий вывод. Если построен доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ покрывает неизвестный параметр, и его границы рассчитываются по K выборкам одинакового объема n , то в $(1-\alpha)K$ случаях построенные интервалы накроют истинное значение исследуемого параметра.



Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.

Пример 1. На основе продолжительных наблюдений за весом X пакетов орешков, заполняемых автоматически, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов $\sigma = 10$ г. Взвешено 25 пакетов, при этом их средний вес составил $\bar{x} = 244$ г. В каком интервале с надежностью 95 % лежит истинное значение среднего веса пакетов?

Логично считать, что случайная величина X имеет нормальный закон распределения: $X \sim N(m, 10)$. Для определения 95%-го доверительного интервала найдем критическую точку $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0,025}$ из приложения 1 по соотношению

$$\Phi(u_{0,025}) = \frac{0,95}{2} = 0,475 \rightarrow u_{0,025} = 1,96.$$

Тогда по формуле (3) построим доверительный интервал:

$$\left(244 - 1,96 * \frac{10}{5}; 244 + 1,96 * \frac{10}{5} \right) = (240,8; 247,92).$$

Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии.

Пример 2.

Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака, если известны: $\sigma = \overline{x_B} = 5,4$; $n = 10$; $\gamma = 0,95$.

Решение.

$$2\Phi(t) = 0,95, \Phi(t) = 0,5 * 0,95 = 0,475.$$

Найдя $t = 1,96$, получим

$$\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 * 5,4}{\sqrt{10}} = 3,24.$$

Доверительный интервал

$$(\overline{x_B} - \delta; \overline{x_B} + \delta) = (5,4 - 3,24; 5,4 + 3,24) = (2,16; 8,64).$$

Генеральная совокупность.



- Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений или реализаций исследуемой случайной величины при данном реальном комплексе условий.
- Выборкой называют часть генеральной совокупности, отобранную для изучения.
- Изучение всей генеральной совокупности во многих случаях либо невозможно, либо нецелесообразно в силу больших материальных затрат, поэтому на практике часто приходится иметь дело с выборками небольшого объема $n < 10-20$. В этом случае используемый обычно метод построения интервальной оценки для генеральной средней и генеральной доли неприменим в силу двух обстоятельств:
 - 1) необоснованным становится вывод о нормальном законе распределения выборочных средней \bar{x} и доли w , так как он основан на центральной предельной теореме при больших n ;
 - 2) необоснованной становится замена неизвестных генеральной дисперсии σ^2 и доли p их точечными оценками s^2 (или \bar{w}) или w , так как в силу закона больших чисел (состоятельности оценок) эта замена возможна лишь при больших n .

Построение доверительного интервала для генеральной средней по малой выборке.

Задача построения доверительного интервала для генеральной средней может быть решена, если в генеральной совокупности рассматриваемый признак имеет нормальное распределение.

Теорема. Если признак (случайная величина) X имеет нормальный закон распределения с параметрами $M(x) = x_0$, $\chi_x^2 = \chi^2$, т.е. $N(\bar{x}_0, \chi^2)$, то выборочная средняя \bar{x} при любом n имеет нормальный закон распределения $N\left(\bar{x}_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим, что:

$$M(t) = M\left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} [M(\bar{x}) - M(\bar{x}_0)] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0,$$

$$\sigma_t^2 = D(t) = D\left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2 [D(\bar{x}) - D(\bar{x}_0)] = \frac{n}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{n} + 0\right) = 1.$$

- Пример 5. Для контроля срока службы электроламп из большой партии было отобрано 17 электроламп. В результате испытаний оказалось, что средний срок службы отобранных ламп равен 980 ч, а среднее квадратическое отклонение их срока службы — 18 ч. Необходимо определить: а) вероятность того, что средний срок службы ламп во всей партии отличается от среднего срока службы отобранных для испытаний ламп не более чем на 8 ч (по абсолютной величине); б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключен средний срок службы ламп во всей партии.

▪ Решение.

Имеем по условию $n = 20$, $\bar{x} = 980(\text{ч})$, $S = 18 \text{ ч}$.

а) Зная предельную ошибку малой выборки $\Delta_{\text{м.в.}} = 8 \text{ (ч)}$, найдем $t_{\gamma, n-1}$ из соотношения (9):

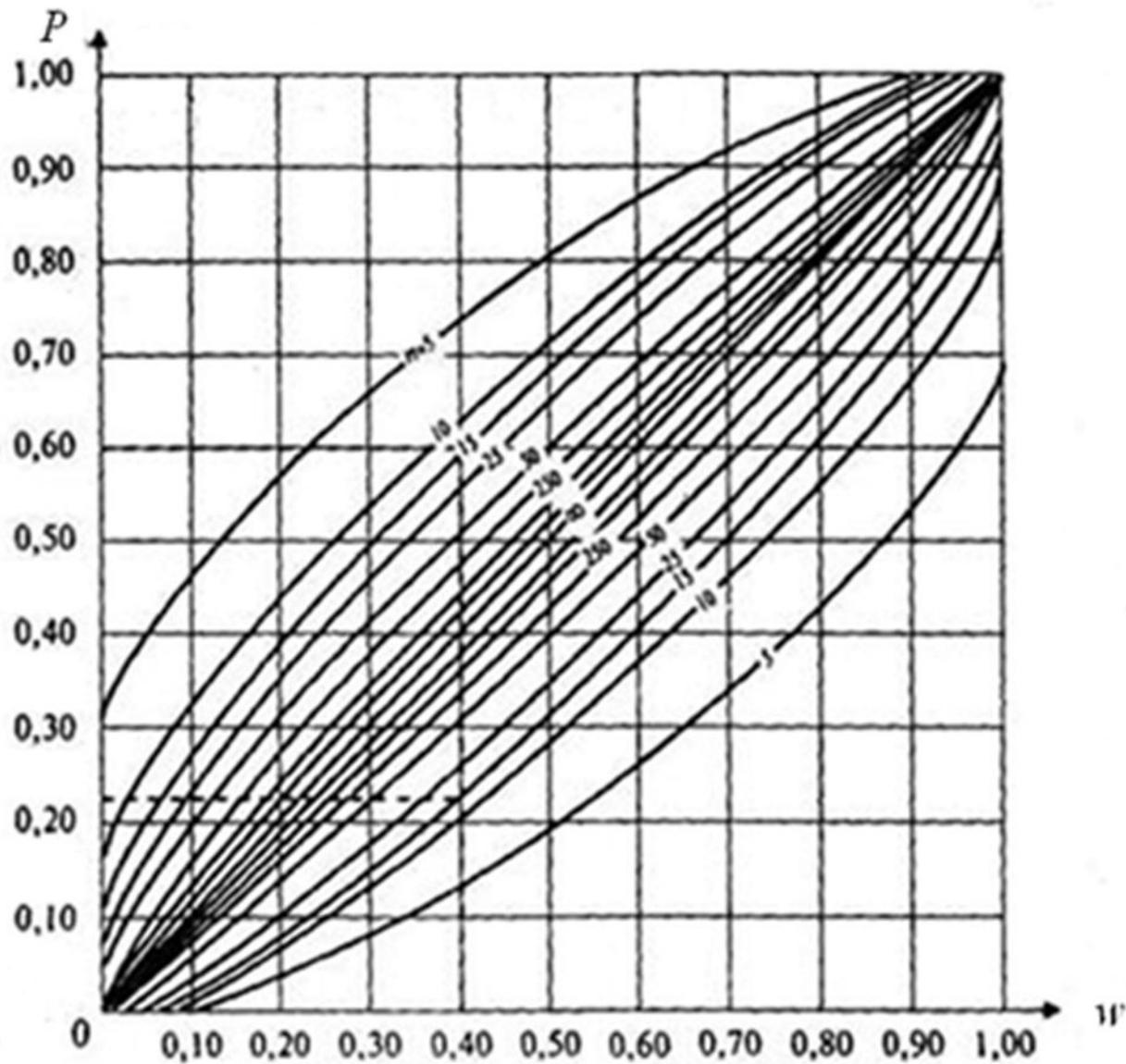
$$t_{\gamma, n-1} = \frac{\Delta_{\text{м.в.}}}{S} \sqrt{n-1} = \frac{8}{18} \sqrt{17-1} = 1.78.$$

Теперь искомая доверительная вероятность $P(|\bar{x} - \bar{x}_0| \leq 8) = \theta(1.78, 16) = 0.906$

, а $\theta(1.78, 16)$ находится по таблице значений при числе степеней свободы $\nu = 16$.

Итак, вероятность того, что расхождение средних сроков службы электроламп в выборке и во всей партии не превысит 8 ч (по абсолютной величине), равна 0,906.

б) Учитывая что $\theta(t, \nu) = 0.95$ и $t_{0.95; 10} = 2.12$ по (11) найдем предельную ошибку



малой выбо

$980 - 9.5 \leq$

средний сре

Пос

Опре

$$\sum_{m=\tilde{m}}^n$$

где

рвал

0,95

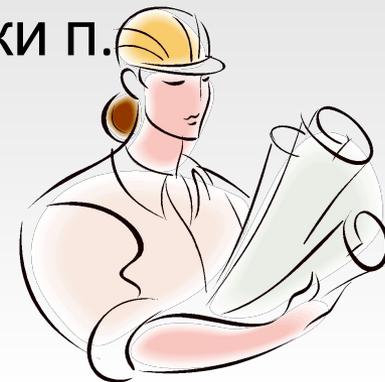
IX

- Пример 6. Опрос случайно отобранных 15 жителей города показал, что 6 из них будут поддерживать действующего мэра на предстоящих выборах. Найти границы, в которых с надёжностью 0,9 заключена доля граждан города, которые будут поддерживать на предстоящих выборах действующего мэра.

Решение.

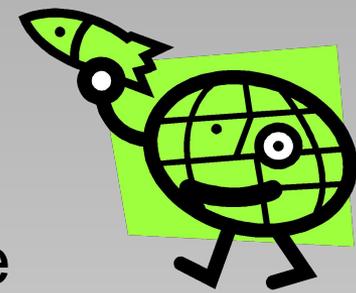
Выборочная доля жителей, поддерживающих мэра, $w = t/p = 6/15 = 0,4$. По рисунку 3 для $\gamma = 0,9$ находим при $w = 0,4$ и для $n = 15$ по нижнему графику $p_1 = 0,23$, а по верхнему — $p_2 = 0,60$, т.е. доля жителей города, поддерживающих мэра, с надёжностью 0,9 заключена в границах от 0,23 до 0,60.

Очевидно, что более точный ответ на вопрос задачи может быть получен при увеличении объёма выборки n .





Заключение



- В данной работе рассмотрено понятие доверительного интервала и его разновидности в метрологии.
- Провести бесконечное число измерений для получения верного результата в реальной жизни невозможно, поэтому важно дать объективное представление результатов ограниченного числа измерений, чему и призван помочь изучаемый подход.
- Цель любого оценивания состоит в получении наиболее точного значения исследуемой характеристики. Доверительный интервал позволяет с определенной точностью получить распределение параметра, что дает хорошее