Основы логики

Алгебра высказываний

Автор:

Сергеев

Евгений Викторович

МОУ СОШ №4 г. Миньяра

Челябинской области

sergeev73@mail.ru

http://shk4-minyar.ucoz.ru

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний была разработана для того, чтобы определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание

Логические переменные

Логические переменные – простые высказывания, содержащие только одну мысль.

Обозначаются буквами латинского алфавита: A, B, C…

Логические переменные могут принимать лишь два значения: «ИСТИНА» (1) или «ЛОЖЬ» (0)

Логические переменные

Например, два простых высказывания:

***А* = «2 × 2 = 4»** истина (1)

***В* = «2 × 2 = 5»** ложь (0)

являются логическими переменными А и В

В алгебре высказываний *высказывания* обозначаются именами *логических переменных*, которые могут принимать лишь два значения:

«ИСТИНА» (1) или «ЛОЖЬ» (0)

В алгебре высказываний над *логическими переменными* (над высказываниями) можно производить определенные *логические операции*, в результате которых получаются новые высказывания

Составные высказывания

Высказывания, состоящие из нескольких простых суждений и содержащие в себе более, чем одну простую мысль, называются ***логическими функциями***

Обозначаются F(A,B,C…)

Также могут принимать значения «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ» в зависимости от того, какие значения имеют входящие в их состав логические переменные и от действий над ними

Логические операции

- ***Конъюнкция***
(логическое умножение, «И»)
- ***Дизъюнкция***
(логическое сложение, «ИЛИ»)
- ***Инверсия***
(логическое отрицание, «НЕ»)
- ***Импликация***
(логическое следование, «Если ***А***, то ***В***»)
- ***Эквивалентность***
(логическое равенство, «***А*** тогда и только тогда, когда ***В***»)

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «И» называется *операцией логического умножения*, или *конъюнкцией*

Логическая функция, полученная в результате ***конъюнкции*****, *истинна тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него логические переменные***

Конъюнкция. Определите истинность логической функции

1) ***«2 × 2 = 5»*** И ***«3 × 3 = 10»***
2) ***«2 × 2 = 5»*** И ***«3 × 3 = 9»***
3) ***«2 × 2 = 4»*** И ***«3 × 3 = 10»***
4) ***«2 × 2 = 4»*** И ***«3 × 3 = 9»***

Истинна только функция (4)

Запись конъюнкции на формальном языке алгебры высказываний

F(A,B) = A & B

или

F(A,B) = A $\wedge$ B

Также может встретиться запись, типа:

F(A,B) = A * B

или

F(A,B) = A and B

Значение логической функции определяется по ее таблице истинности

Таблица истинности показывает какие значения принимает логическая функция при всех возможных значениях логических переменных

Таблица истинности для конъюнкции

A	B	A ∧ B
2 × 2 = 5	3 × 3 = 10	ЛОЖЬ
2 × 2 = 5	3 × 3 = 9	ЛОЖЬ
2 × 2 = 4	3 × 3 = 10	ЛОЖЬ
2 × 2 = 4	3 × 3 = 9	ИСТИНА

Таблица истинности для конъюнкции

A	B	A $\wedge$ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «ИЛИ» называется *операцией логического сложения*, или *дизъюнкцией*

Логическая функция, полученная в результате *дизъюнкции*, *истинна тогда, когда истинна хотя бы одна из входящих в него логических переменных*

Дизъюнкция. Определите истинность логической функции

1) «2 × 2 = 5» ИЛИ «3 × 3 = 10»
2) «2 × 2 = 5» ИЛИ «3 × 3 = 9»
3) «2 × 2 = 4» ИЛИ «3 × 3 = 10»
4) «2 × 2 = 4» ИЛИ «3 × 3 = 9»

Ложна только функция (1), остальные истинны

Запись дизъюнкции на формальном языке алгебры высказываний

$F(A,B) = A \lor B$

Также может встретиться запись, типа:

$F(A,B) = A + B$

или

$F(A,B) = A$ or B

Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	A ∨ B
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 10$	ЛОЖЬ
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 9$	ИСТИНА
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 10$	ИСТИНА
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	ИСТИНА

Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Присоединение частицы «НЕ» к высказыванию называется *операцией логического отрицания*, или *инверсией*

Логическое отрицание (*инверсия*) делает истинное высказывание ложным, а ложное – истинным

[логическая отрицательная единица, перевертыш]

Инверсия

Пусть

$$\boldsymbol{A = «2 \times 2 = 4»}$$

– истинное высказывание, тогда

$$\boldsymbol{F(A) = «2 \times 2 \neq 4»}$$

– ложное высказывание

Запись инверсии на формальном языке алгебры высказываний

$$F(A) = \neg A$$

или

$$F(A) = \bar{A}$$

Также может встретиться запись, типа:

$$F(A) = \text{not } A$$

Таблица истинности для инверсии

A	¬A
0	1
1	0

Таблицы истинности основных логических функций

Логическое сложение

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическое умножение

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое отрицание

A	¬A
0	1
1	0

Дополнительные логические функции

Импликацию и **эквивалентность** можно выразить через ***конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание,*** поэтому их называют дополнительными логическими функциями:

Импликация:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ или

$A \supset B = \neg A \vee B$ или

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$

Эквивалентность:

$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ или

$A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ или

$A \equiv B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Импликация

Объединение двух высказываний, из которых первое является условием, а второе – следствием из него, называется *импликацией* (логическим следованием)

Импликация

Импликация ложна тогда и только тогда, когда условие истинно, а следствие ложно

Пример:

Если выучишь материал, то сдашь зачет

Это высказывание ложно только тогда, когда ***материал выучен***, а ***зачет не сдан***, т.к. сдать зачет можно и случайно, например если попался единственный знакомый вопрос или удалось воспользоваться шпаргалкой

Таблица истинности для импликации

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

Эквивалентность **– это логическая операция, объединяющая два простых высказывания в одно составное и которое является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.**

Таблица истинности для эквивалентности

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Основные законы алгебры высказываний

Переместительный

Дизъюнкция:

$$X \vee Y \equiv Y \vee X$$

Конъюнкция:

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$$

Основные законы алгебры высказываний

Сочетательный

Дизъюнкция:

$$X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$$

Конъюнкция:

$$X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$$

Основные законы алгебры высказываний

Распределительный

Дизъюнкция:

$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv X \wedge Y \vee X \wedge Z$$

Конъюнкция:

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

Правила де Моргана

Дизъюнкция:

$$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$$

Конъюнкция:

$$\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$$

Основные законы алгебры высказываний

Идемпотенции

Дизъюнкция:

$$X \lor X \equiv X$$

Конъюнкция:

$$X \land X \equiv X$$

Основные законы алгебры высказываний

Поглощения

Дизъюнкция:

$$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$$

Конъюнкция:

$$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$$

Основные законы алгебры высказываний

Склеивания

Дизъюнкция:

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \equiv Y$$

Конъюнкция:

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y) \equiv Y$$

Основные законы алгебры высказываний

Переменная со своей инверсией

Дизъюнкция:

$$X \vee \neg X \equiv 1$$

Конъюнкция:

$$X \wedge \neg X \equiv 0$$

Основные законы алгебры высказываний

Операция с константами

Дизъюнкция:

$$X \vee 0 \equiv X, \quad X \vee 1 \equiv 1$$

Конъюнкция:

$$X \wedge 0 \equiv 0, \quad X \wedge 1 \equiv X$$

Основные законы алгебры высказываний

Двойного отрицания

$$\neg(\neg X) \equiv X$$

Порядок действий

1. Действия в скобках
2. Отрицание
3. Конъюнкция
4. Дизъюнкция
5. Импликация
6. Эквивалентность