Колебательный контур.
Свободные и вынужденные колебания.
Резонанс.

Колебательный контур

Колебательный контур – это система, состоящая из последовательно соеденненных конденсатора емкости С, катушки индуктивности L и проводника с сопротивлением R (рис.1.)

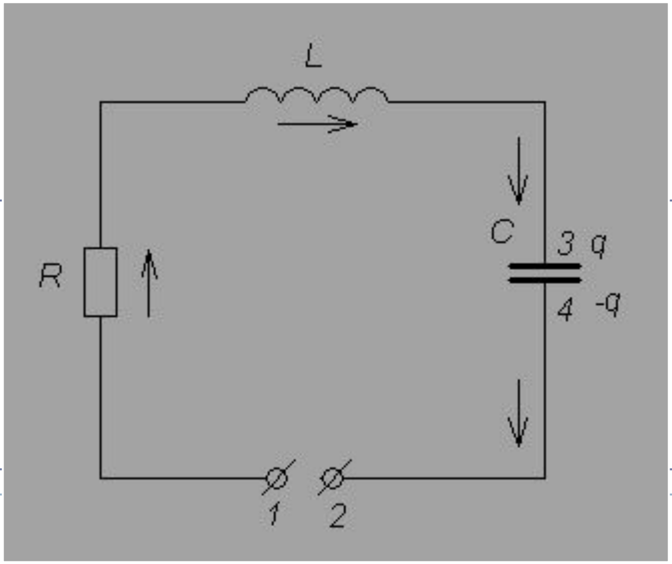


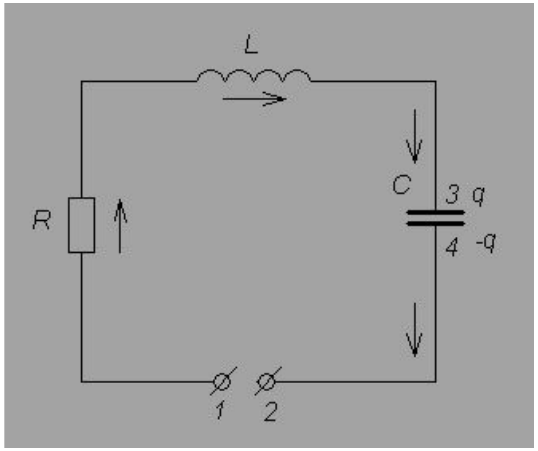
Рис.1.

Уравнение колебательного контура

$$U_R = RI$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

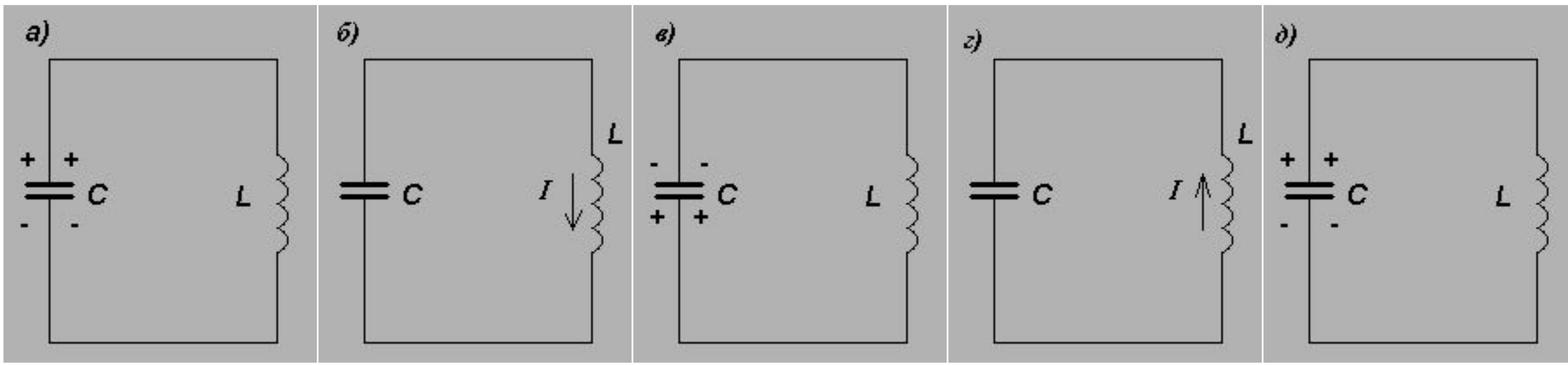


$$\varepsilon = U_R + U_L + U_C$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Незатухающие колебания

Если нет сопротивления, то электрические колебания в колебательном контуре будут незатухающими



$а)\ W_р = \dfrac{q_m^2}{2C}$ $б)\ W_м = \dfrac{LI_m^2}{2}$ $в)\ W_р = \dfrac{q_m^2}{2C}$ $г)\ W_м = \dfrac{LI_m^2}{2}$ $д)\ W_р = \dfrac{q_m^2}{2C}$

Полная электромагнитная энергия колебательного контура

Максимальная энергия электрического поля

$$W_e = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{CU_m^2}{2}$$

Максимальная энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{LI_m^2}{2}$$

Полная энергия

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

Где i и q – сила тока и электрический заряд в любой момент времени

Свободные электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания – это периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин (q – электрический заряд, I – сила тока, U – разность потенциалов), происходящие без потребления энергии от внешних источников.

Свободные незатухающие колебания

Уравнение колебательного контура

$$\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\gamma = \frac{R}{L}$$

$$X = \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = x$$

где ω_0 *– собственная частота колебаний системы*

γ *– коэффициен тзатухания*

Если сопротивление R равно нулю:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

свободные незатухающие колебания

Решение этого уравнения:

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \delta)$$

Формула Томпсона

Если какая-либо величина меняется по времени по закону $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ *то она совершает гармонические колебания.*

Промежуток времени, через который значения колеблющихся величин периодически повторяются, называется периодом колебания:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$q_0 -$ *амплитуда колебания*

$\omega_0 t + \delta -$ *фаза колебания*

$\delta -$ *начальная фаза колебания*

Для электрических колебаний собственная частота: $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

- Формула Томпсона

Затухающие электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания в реальном колебательном контуре, представляющем собой последовательное соединение катушки индуктивности L, конденсатора емкости C и электрического сопротивления R – называются затухающими электромагнитными колебаниями

Уравнение изменения заряда q на обкладках конденсатора во времени:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=0$$

Решение уравнения:

$$q=q_0e^{-\gamma t}\sin(\omega_з t+\delta)$$

q_0 – *амплитудное значение заряда в момент времени* $t=0$

$$\gamma=\frac{R}{2L}\ \text{– коэффициент затухания}$$

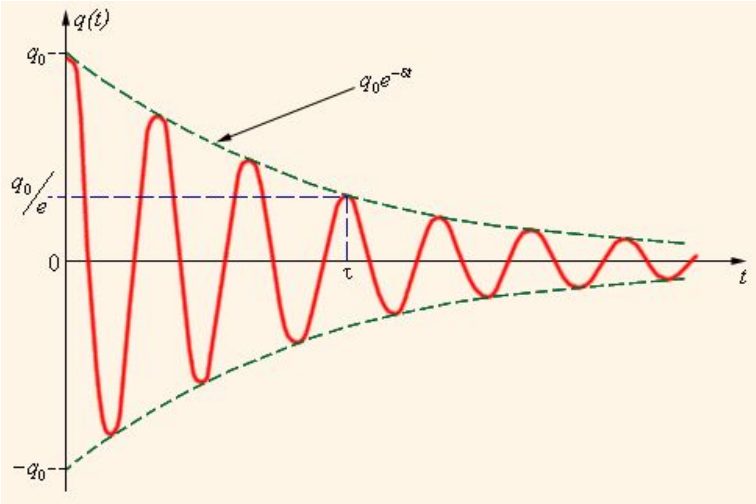
Циклическая частота свободных электромагнитных колебаний в контуре:

$$\omega_з=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

Период затухающих колебаний:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_з}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}$$

Зависимость заряда от времени при затухающем колебании



Вынужденные электромагнитные колебания

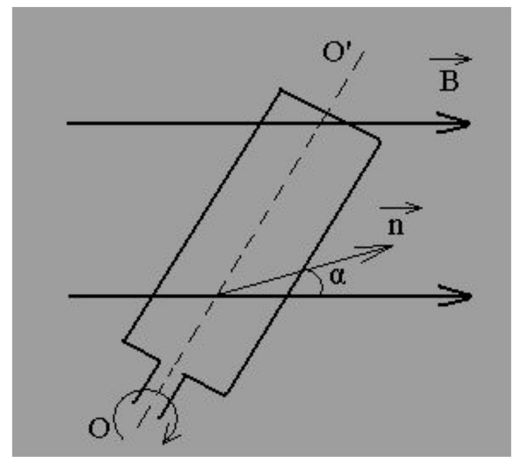
Незатухающие колебания в цепи под действием внешней, периодически изменяющейся ЭДС – называются вынужденными электромагнитными колебаниями

$$e = E_m \sin \omega t$$

e – мгновенное значение ЭДС индукции в (данный момент времени)

E_m – амплитудное значение ЭДС

ω – циклическая частота переменной ЭДС



Магнитный поток Ф сквозь плоскость рамки:

$$\Phi = BS\cos\alpha$$

α – угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки и напряжением вектора магнитной индукции $\vec{B}$

По закону электромагнитной индукции:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ *– скорость изменения магнитной индукции*

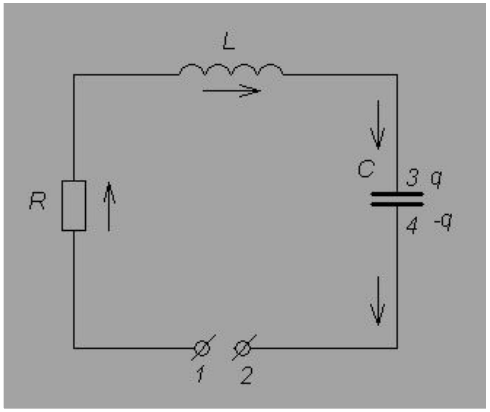
$$e = BS\omega\sin\omega t = E_m \sin\omega t$$

$E_m = BS\omega$ – амплитуда ЭДС индукции

Полное сопротивление колебательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

где $X = X_L - X_C$ − реактивное сопротивление колебательного контура



$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Из закона Ома для участка цепи переменного тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения (отношение реактивного сопротивления к активному):

$$tg\,\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тока в колебательном контуре, которое происходит при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой колебательного контура – называется резонансом.

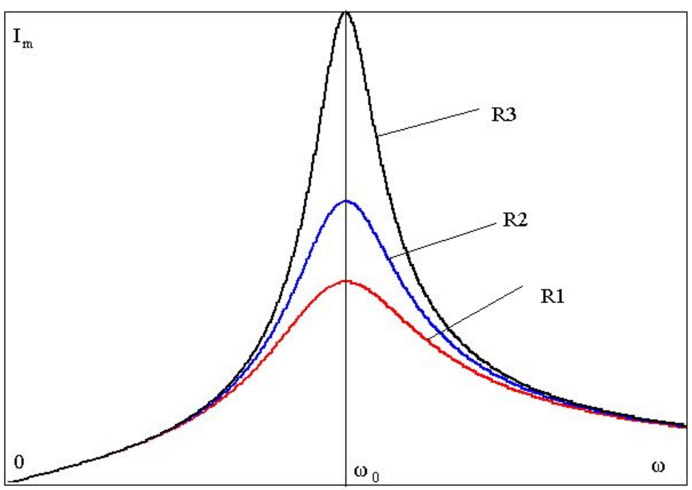
Если Um = const , то амплитуда вынужденных колебаний силы тока зависит от ω :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

R *не зависит от* $\omega \Rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C}$ *справедливо если* $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

ω_0 – *собственная частота колебаний*

ω – *резонансная частота (частота переменного тока, прикоторой сила тока максимальна)*



резонансное напряжение U – $I_{mC} = U_{mL} = I_m \omega L = \frac{I_m}{\omega C}$

$$I_m = \frac{U_m}{|X|} = U_m \left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right| = |I_{mC} - I_{mL}|$$

I_{mC}, I_{mL} – *амплитудные значения силы токов*

U_m – *амплитудное значение приложенного U*

Если $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I_{mC} = I_{mL},\ I_m = 0,\ R \to \infty$

Условие резонанса токов:

$$\omega \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$