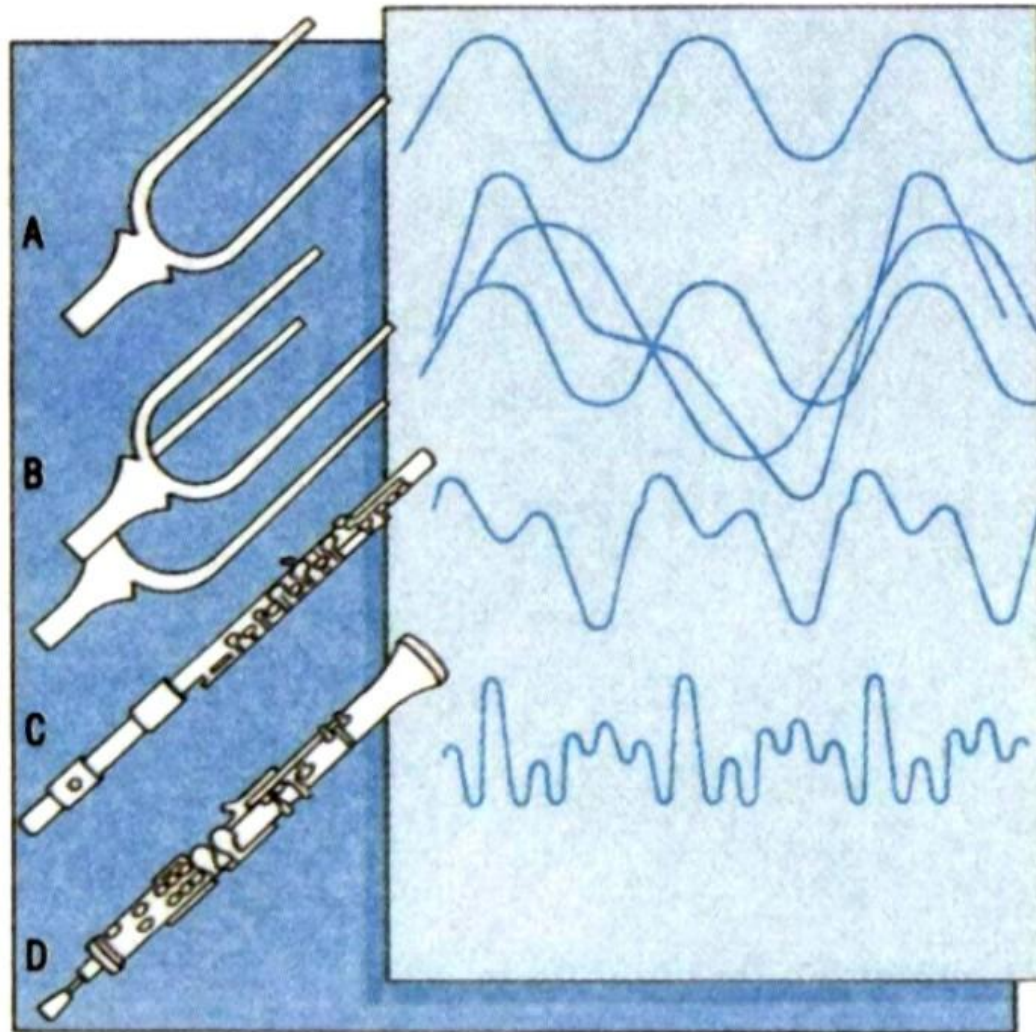


Лекция 33. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ



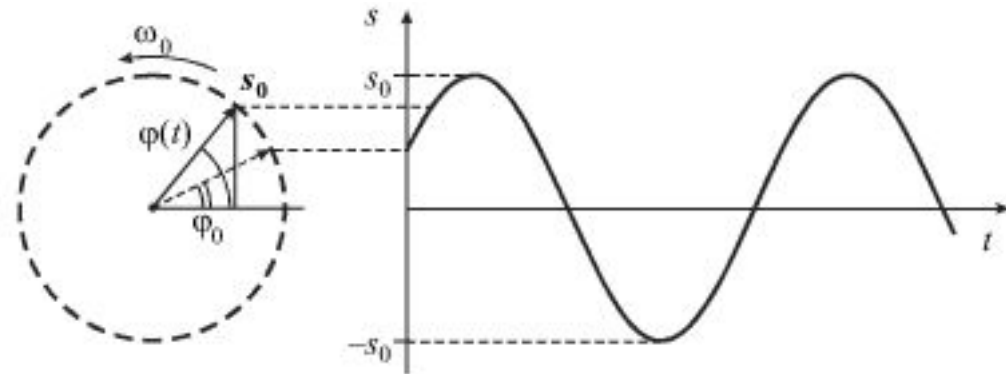
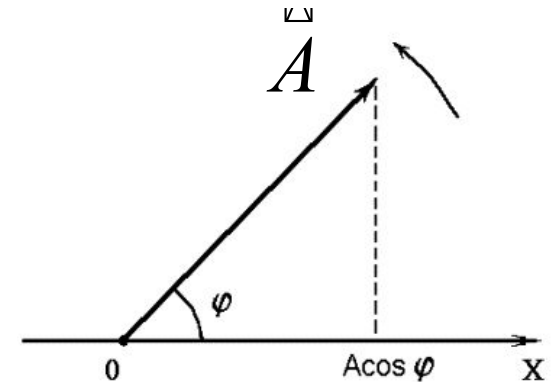
1. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (I)

Сложение гармонических колебаний одного направления облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Такой способ называется векторной диаграммой. Из точки O , взятой на оси x отложим вектор длины A , образующий с осью угол φ .

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 , то координата конца вектора будет изменяться по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось x будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора A , циклической частотой ω_0 , и начальной фазой φ_0 , равной углу, образуемому вектором с осью x в начальный момент времени.



2. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (II)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.

Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений исходных колебаний x_1, x_2 :

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Представим оба колебания с

помощью векторов \vec{A} и \vec{B} . Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор \vec{C} . Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов \vec{A} и \vec{B} :

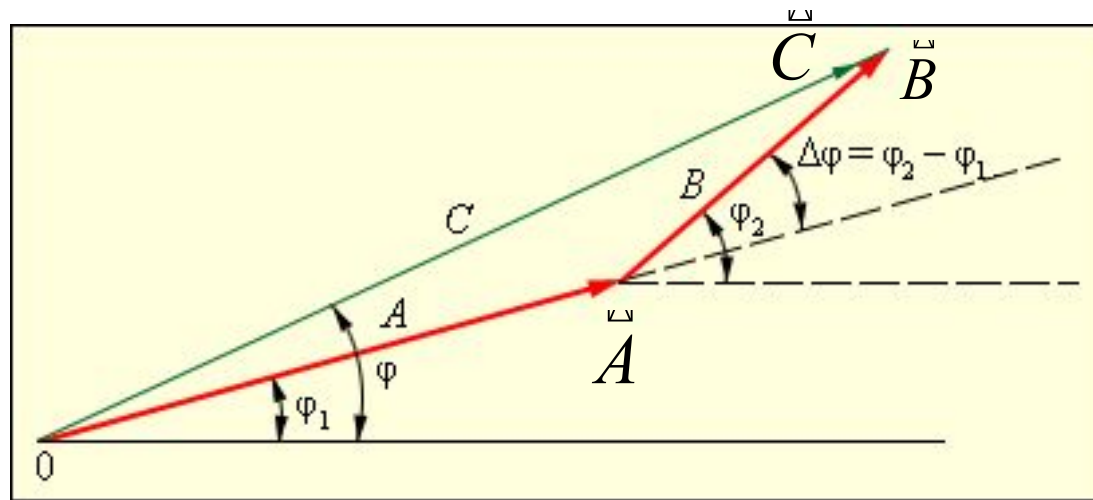
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = C \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вектор \vec{C} задает результирующее колебание с той же частотой ω_0 и амплитудой C , которую определим по теореме косинусов:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из рисунка понятно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2}{A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2}.$$



3. БИЕНИЯ (I)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления с близкими частотами.

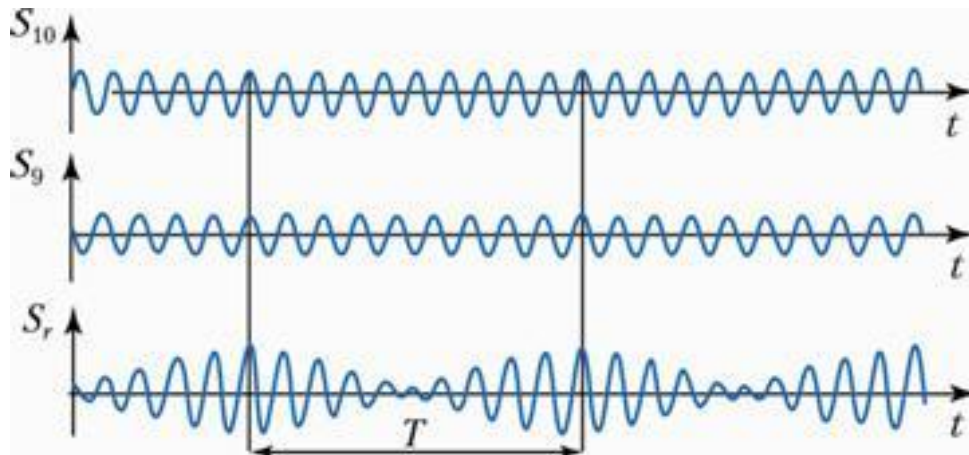
Пусть ω – циклическая частота первого колебания, тогда $\omega + \Delta\omega$ – частота второго колебания, причем $\Delta\omega \ll \omega$ (близкие частоты).

Для простоты будем полагать, что амплитуды колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид:

$$x_1 = a \cos(\omega t), \quad x_2 = a \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

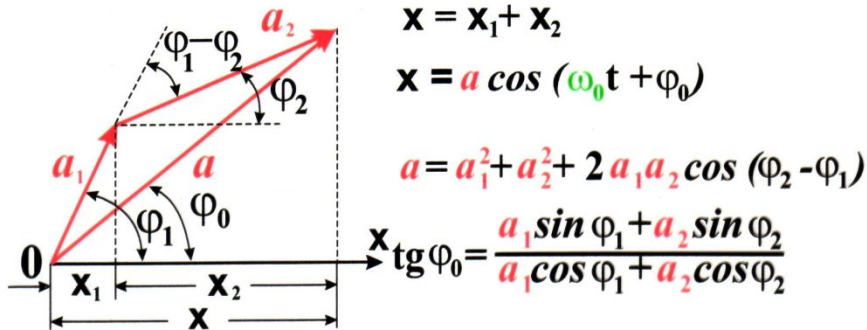
$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \\ &= 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx \\ &\approx 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega t). \end{aligned}$$



4. БИЕНИЯ (II)

Сложение гармонических одинаково направленных колебаний

Векторная диаграмма

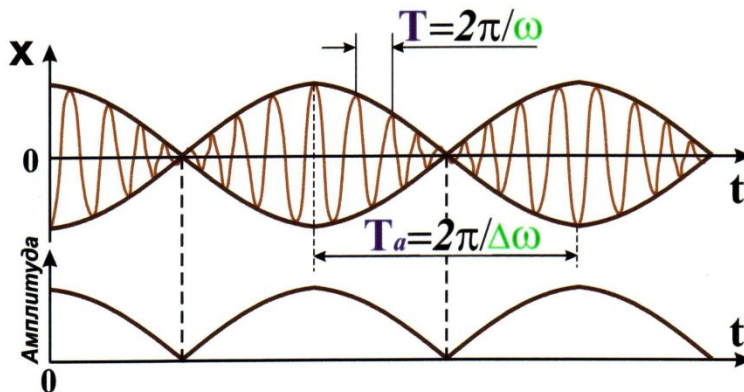


Биения

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega) t,$$

$$(\Delta\omega \ll \omega), \quad x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

$$A(t) = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$



Первый множитель в формуле

$$x = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t)$$

изменяется значительно медленнее, чем второе, так как $\Delta\omega \ll \omega$. Это позволяет рассматривать результирующее колебание как гармоническое с высокой частотой ω , амплитуда которого пульсирует с низкой частотой $\Delta\omega$.

Такое колебание называется биениями.

Амплитуда биений определяется модулем выражения, стоящего перед гармонической функцией высокой частоты

$$A(t) = \left| 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right|.$$

Амплитуда колеблется с частотой $\Delta\omega$ – частотой биений.

5. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях **одной частоты**. Пусть колебания вдоль оси x происходят с **нулевой начальной фазой**, а вдоль оси y со **сдвигом по фазе на $\Delta\varphi$** . Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \cos(\omega t + \Delta\varphi) = b \cos(\omega t) \cos \Delta\varphi - b \sin(\omega t) \sin \Delta\varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время t . Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для y , получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \Delta\varphi \mp \sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Уединяя иррациональность и возводя в квадрат, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi,$$

которое представляет собой **уравнение эллипса**. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

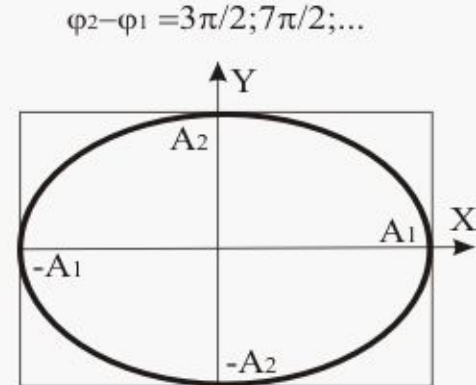
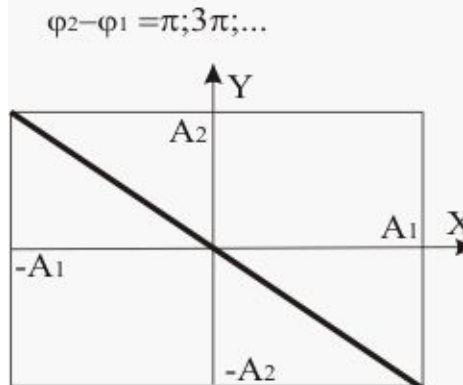
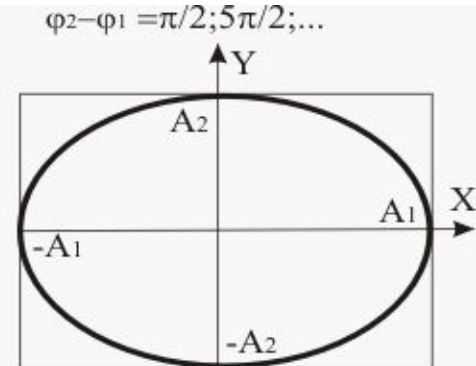
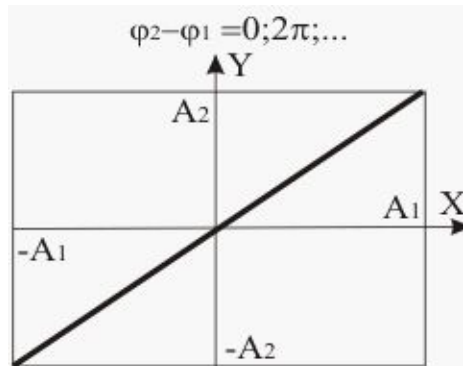
6. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

1. Пусть $\Delta \varphi = 0$. В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi$$

принимает вид $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow$
 Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с амплитудой $\sqrt{a^2 + b^2}$.
 $y = \frac{b}{a}x$



2. Пусть $\Delta \varphi = \pm \pi$. В этом случае $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x$.

Траектория является прямой, лежащей во 2-м и 4-м квадрантах.

7. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При $\varphi = \pm \pi/2$ общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $\varphi = +\pi/2$ движение по часовой стрелке

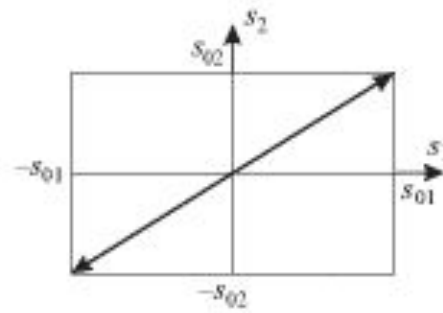
$$x = a \cos(\omega t);$$

$$y = -b \sin(\omega t);$$

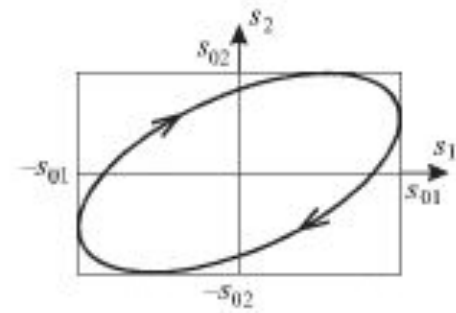
При $\varphi = -\pi/2$ движение против часовой стрелки.

$$x = a \cos(\omega t);$$

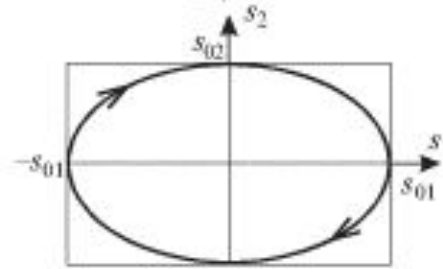
$$y = b \sin(\omega t);$$



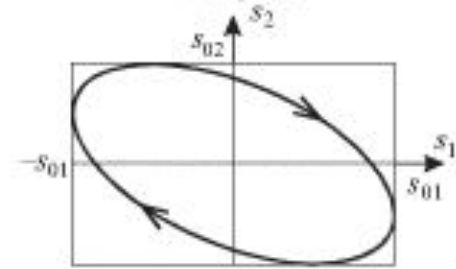
$\Delta\varphi = 0$



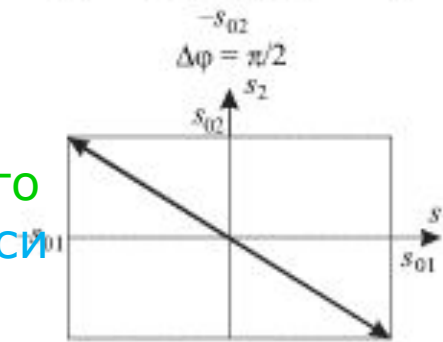
$0 < \Delta\varphi < \pi/2$



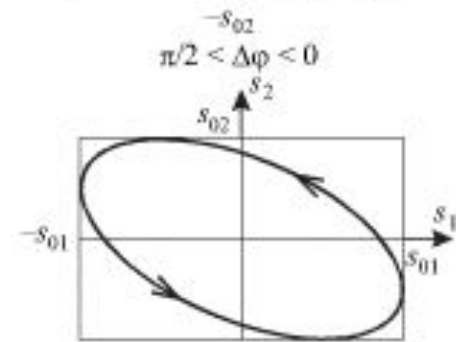
$\Delta\varphi = \pi/2$



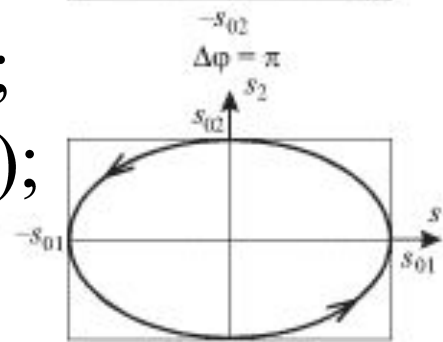
$\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$



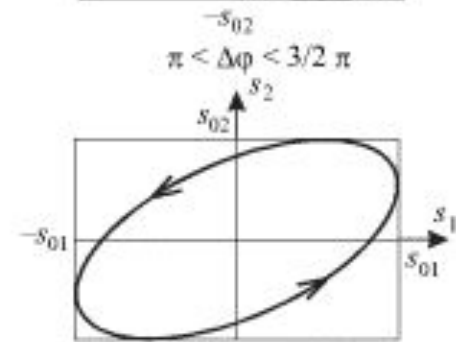
$\Delta\varphi = \pi$



$\pi < \Delta\varphi < 3/2 \pi$



$\Delta\varphi = 3/2 \pi$



$3/2 \pi < \Delta\varphi < 2\pi$

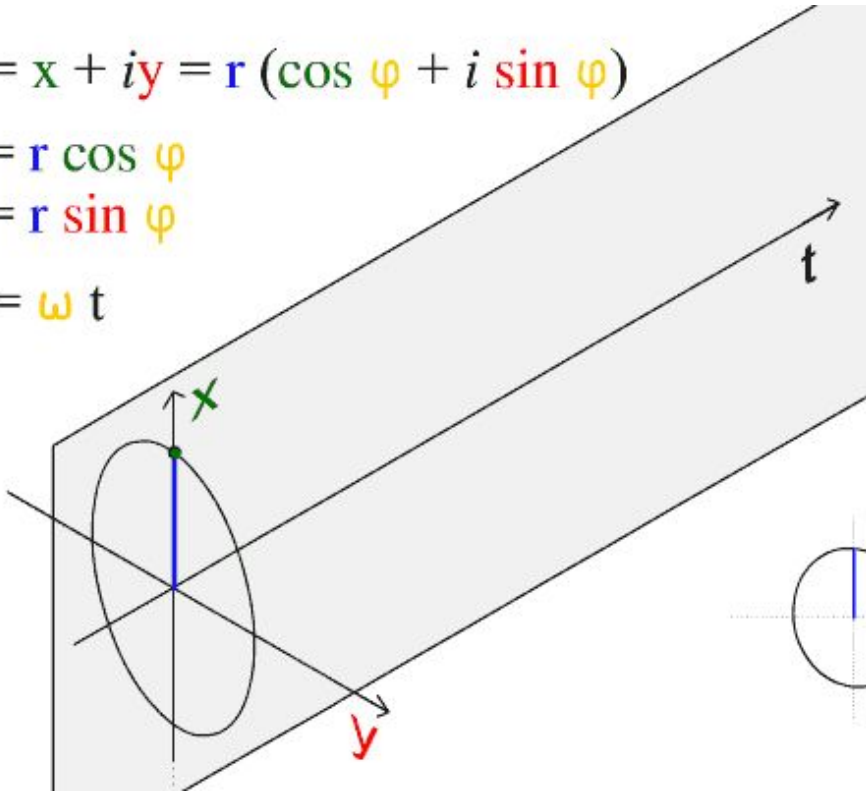
8. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \omega t$$



Знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» – движению по часовой стрелке.

Если $\varphi = \pm \pi/2$, $a = b = r$, то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

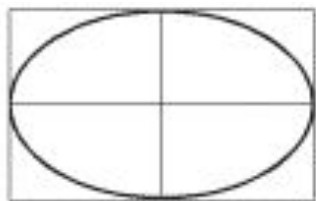
принимает вид $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$.

При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

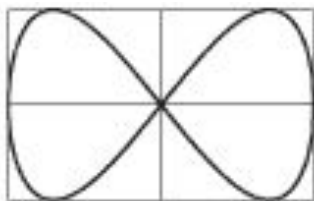
Это означает что равномерное движение по окружности радиуса r с угловой скоростью ω может быть представлена как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = r \cos(\omega t); \quad y = \pm r \sin(\omega t).$$

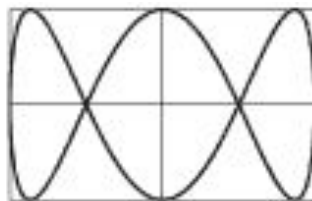
9. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ



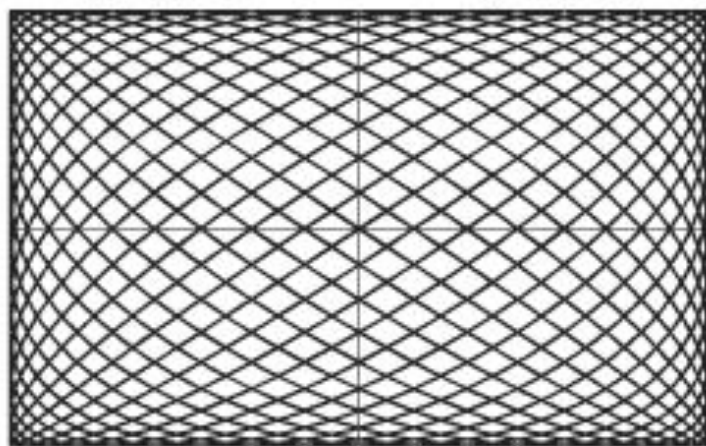
$m = 1, n = 1$



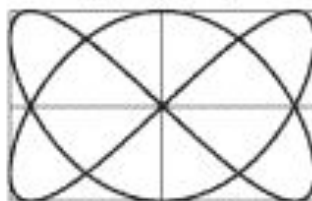
$m = 1, n = 2$



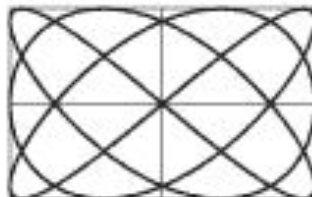
$m = 1, n = 3$



$m = 19, n = 20$



$m = 2, n = 3$



$m = 3, n = 4$

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний **неодинаковы**, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**. Наиболее **простой вид** имеют фигуры Лиссажу для случая, если **отношение частот** – это **простая рациональная дробь**.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси x можно представить в виде $\omega_x = m\omega$, а вдоль оси y – $\omega_y = n\omega$, где m и n – натуральные числа. За то время, пока вдоль оси x точка успеет переместиться из одного крайнего положения в другое m раз, вдоль оси y она совершит n таких перемещений.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.