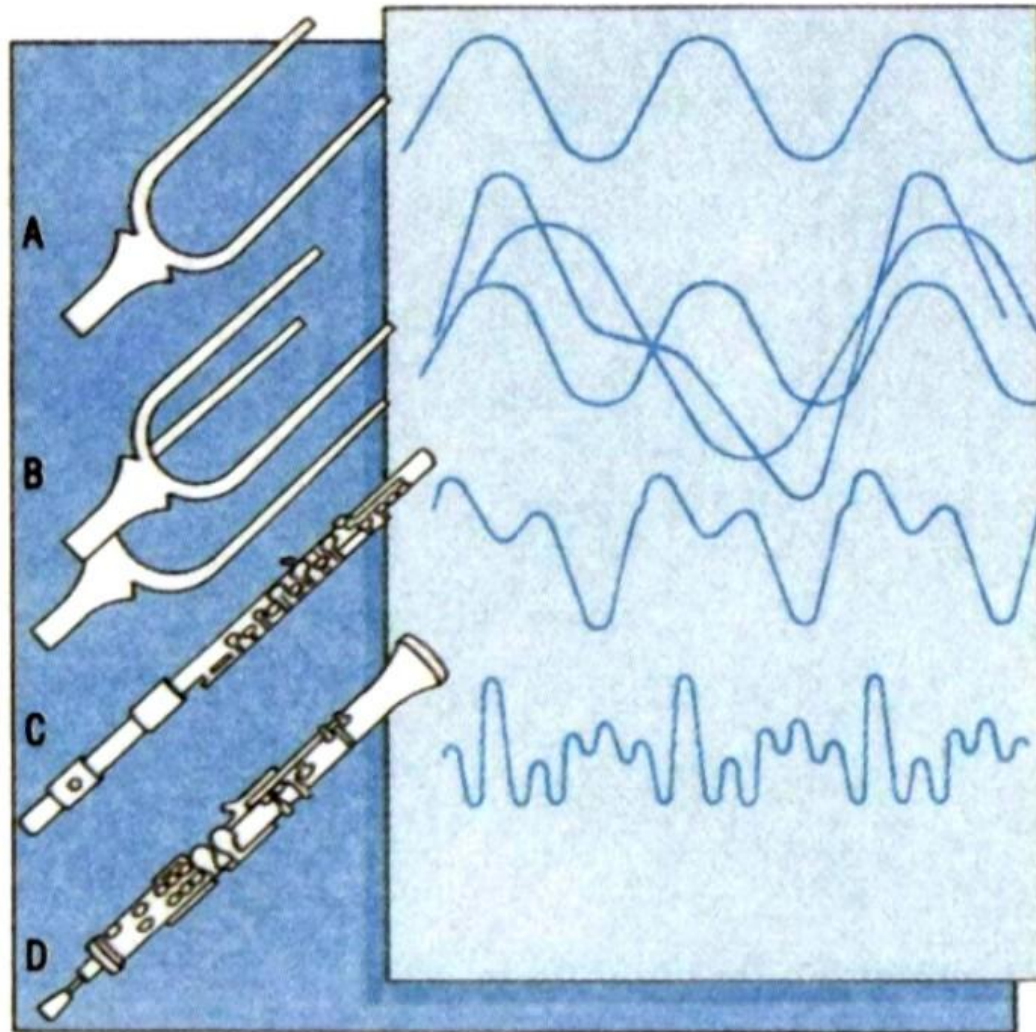


# Лекция 33. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

---



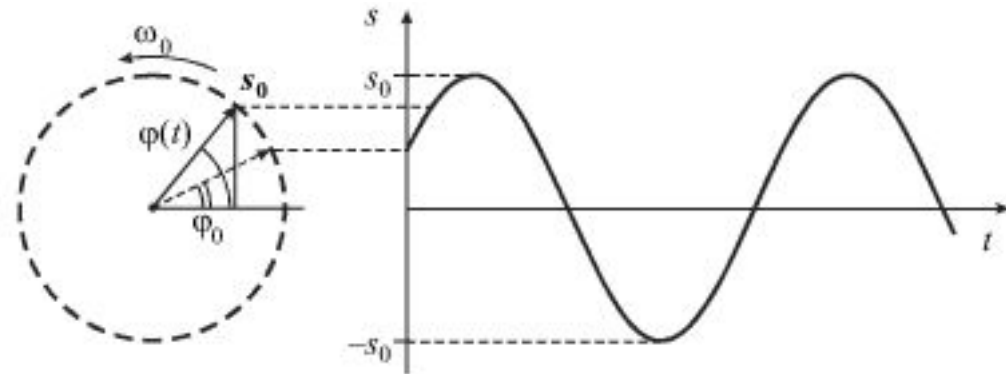
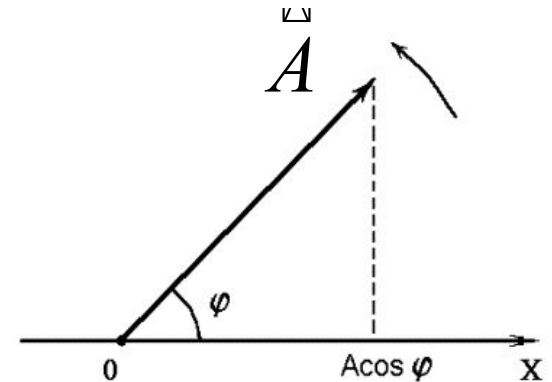
# 1. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (I)

Сложение гармонических колебаний одного направления облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Такой способ называется векторной диаграммой. Из точки  $O$ , взятой на оси  $x$  отложим вектор длины  $A$ , образующий с осью угол  $\varphi$ .

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , то координата конца вектора будет изменяться по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось  $x$  будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора  $A$ , циклической частотой  $\omega_0$ , и начальной фазой  $\varphi_0$ , равной углу, образуемому вектором с осью  $x$  в начальный момент времени.



## 2. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА (II)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.

Смещение  $x$  колеблющегося тела будет суммой смещений исходных колебаний  $x_1, x_2$ :

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Представим оба колебания с

помощью векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ . Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $\vec{C}$ . Проекция этого вектора на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ :

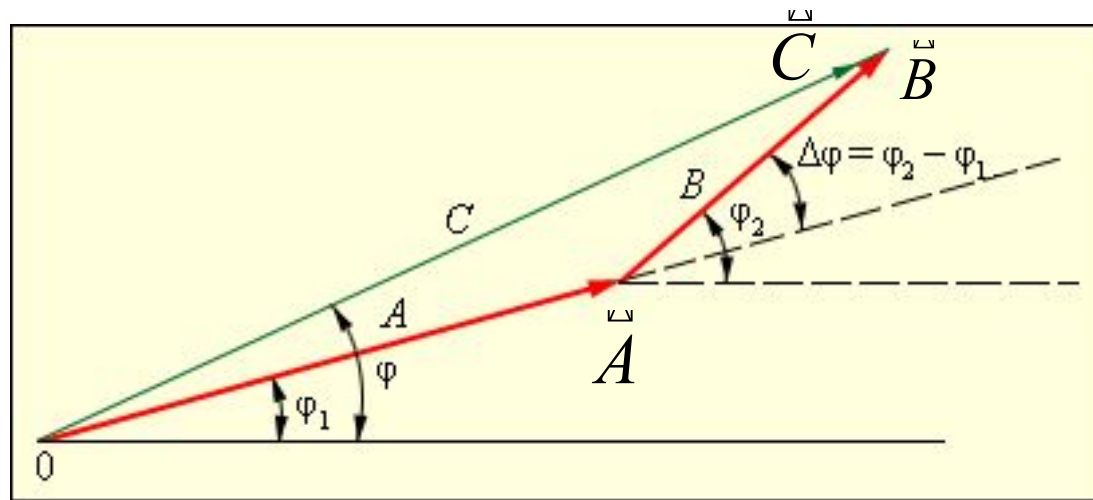
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = C \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вектор  $\vec{C}$  задает результирующее колебание с той же частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $C$ , которую определим по теореме косинусов:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из рисунка понятно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2}{A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2}.$$



# 3. БИЕНИЯ (I)

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления с близкими частотами.

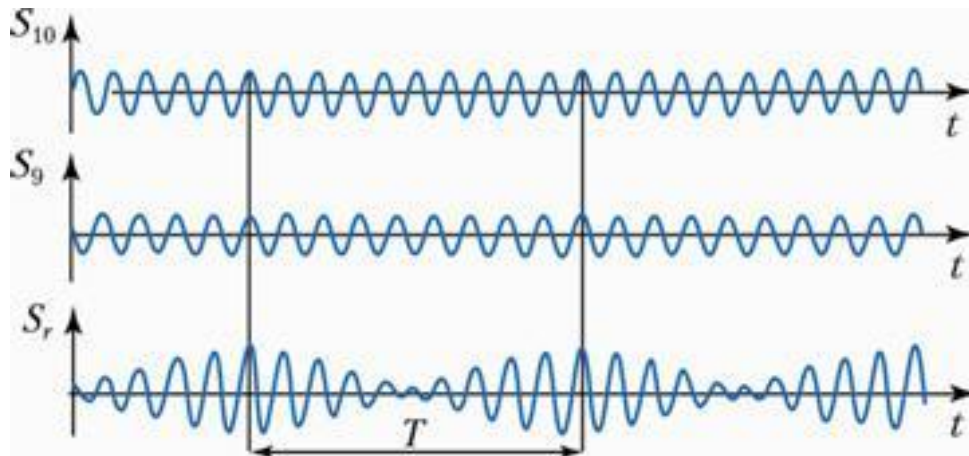
Пусть  $\omega$  – циклическая частота первого колебания, тогда  $\omega + \Delta\omega$  – частота второго колебания, причем  $\Delta\omega \ll \omega$  (близкие частоты).

Для простоты будем полагать, что амплитуды колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид:

$$x_1 = a \cos(\omega t), \quad x_2 = a \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

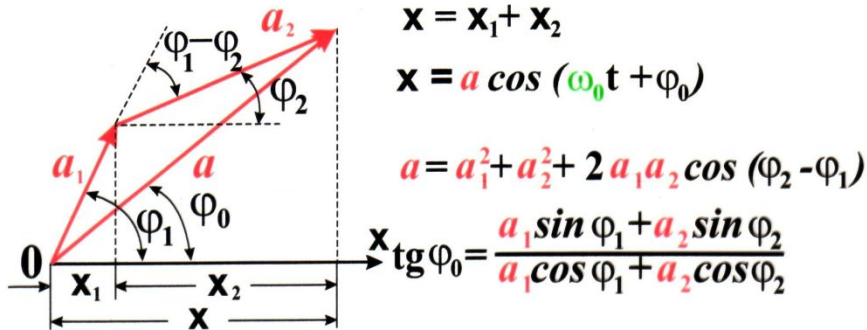
$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \\ &= 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \approx \\ &\approx 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega t). \end{aligned}$$



# 4. БИЕНИЯ (II)

## Сложение гармонических одинаково направленных колебаний

Векторная диаграмма

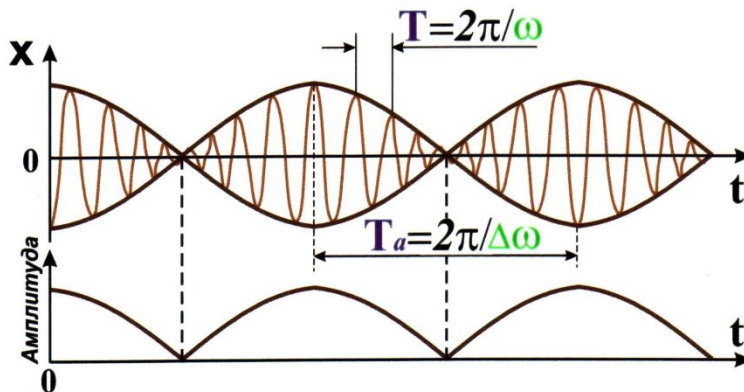


Биения

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega) t,$$

$$(\Delta\omega \ll \omega), \quad x = x_1 + x_2 = \left( 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

$$A(t) = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$



Первый множитель в формуле

$$x = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t)$$

изменяется значительно медленнее, чем второе, так как  $\Delta\omega \ll \omega$ . Это позволяет рассматривать результирующее колебание как гармоническое с высокой частотой  $\omega$ , амплитуда которого пульсирует с низкой частотой  $\Delta\omega$ .

Такое колебание называется биениями.

Амплитуда биений определяется модулем выражения, стоящего перед гармонической функцией высокой частоты

$$A(t) = \left| 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right|.$$

Амплитуда колеблется с частотой  $\Delta\omega$  – частотой биений.

# 5. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях **одной частоты**. Пусть колебания вдоль оси  $x$  происходят с **нулевой начальной фазой**, а вдоль оси  $y$  со **сдвигом по фазе на  $\varphi$** . Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \cos(\omega t + \varphi) = b \cos(\omega t) \cos \varphi - b \sin(\omega t) \sin \varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время  $t$ . Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для  $y$ , получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Уединяя иррациональность и возводя в квадрат, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

которое представляет собой **уравнение эллипса**. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

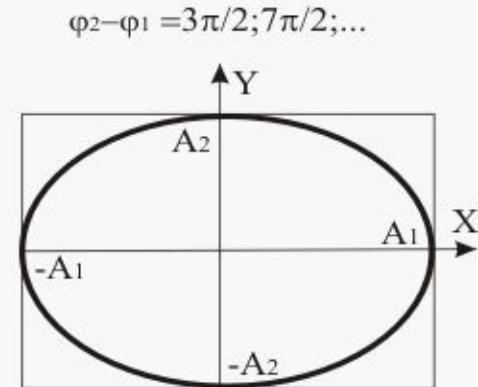
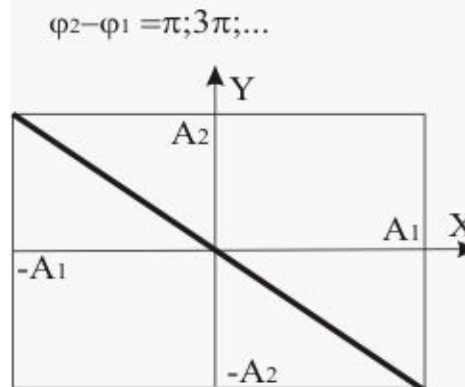
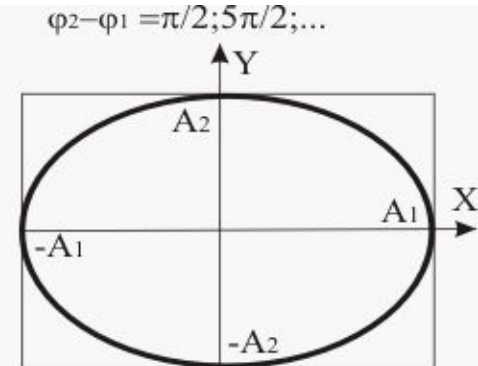
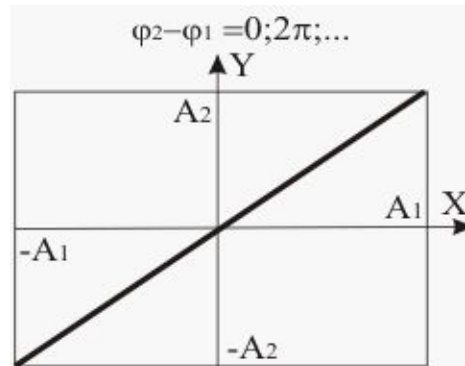
# 6. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

1. Пусть  $\Delta \varphi = 0$ . В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi$$

принимает вид  $\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow$   
 Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с амплитудой  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .  
 $y = \frac{b}{a} x$



2. Пусть  $\Delta \varphi = \pm \pi$ . В этом случае  $\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a} x$ .

Траектория является прямой, лежащей во 2-м и 4-м квадрантах.

# 7. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При  $\varphi = \pm \pi/2$  общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

принимает вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При  $\varphi = +\pi/2$  движение по часовой стрелке

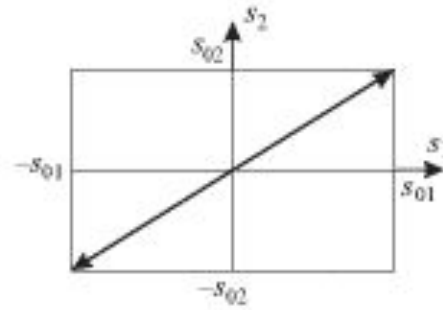
$$x = a \cos(\omega t);$$

$$y = -b \sin(\omega t);$$

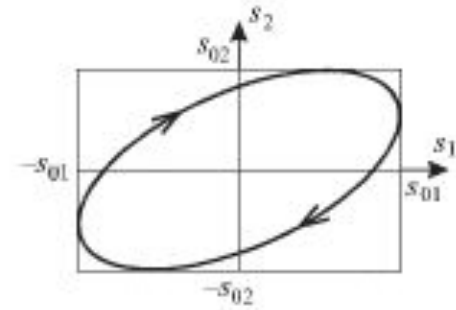
При  $\varphi = -\pi/2$  движение против часовой стрелки.

$$x = a \cos(\omega t);$$

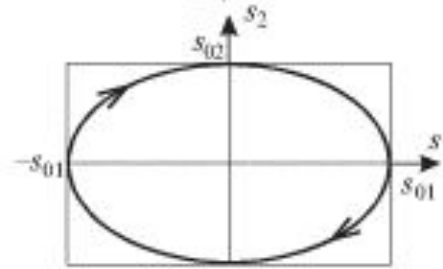
$$y = b \sin(\omega t);$$



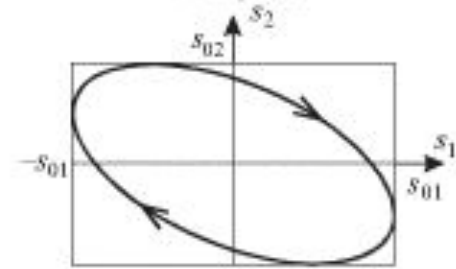
$\Delta\varphi = 0$



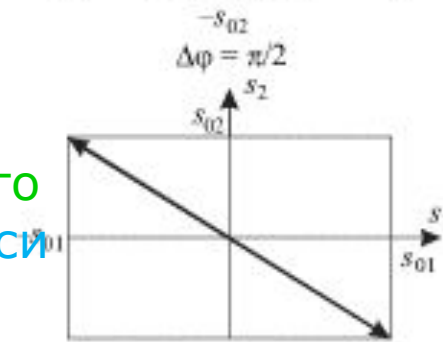
$0 < \Delta\varphi < \pi/2$



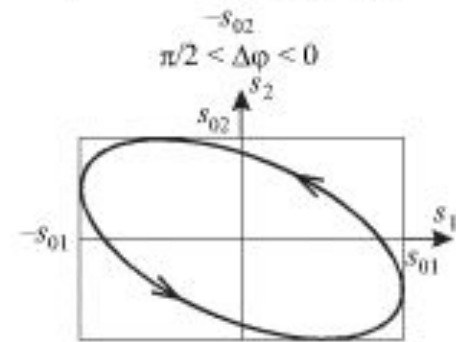
$\Delta\varphi = \pi/2$



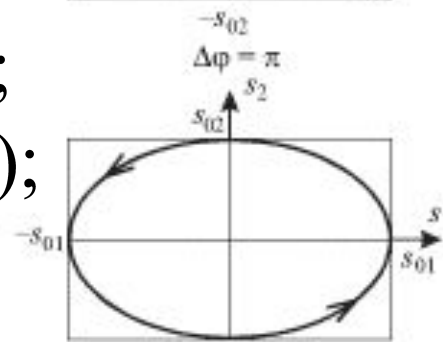
$\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$



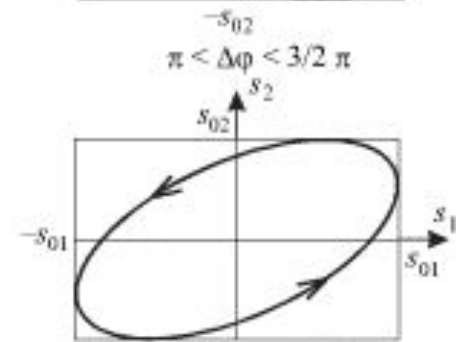
$\Delta\varphi = \pi$



$\pi < \Delta\varphi < 3/2 \pi$



$\Delta\varphi = 3/2 \pi$



$3/2 \pi < \Delta\varphi < 2\pi$



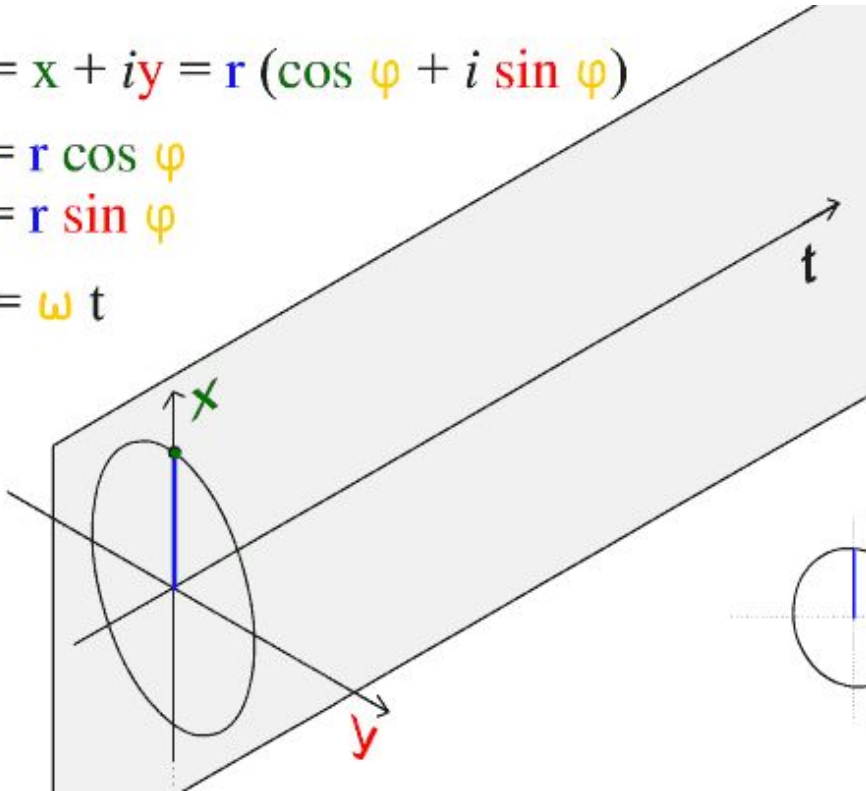
# 8. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \omega t$$



Знак «+» в выражении для  $y$  соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» – движению по часовой стрелке.

Если  $\varphi = \pm \pi/2$ ,  $a = b = r$ , то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

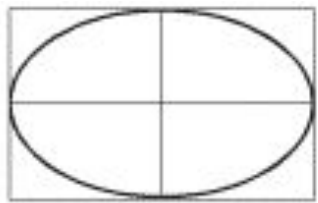
принимает вид  $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ .

При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

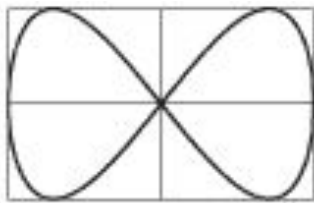
Это означает что равномерное движение по окружности радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\omega$  может быть представлена как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = r \cos(\omega t); \quad y = \pm r \sin(\omega t).$$

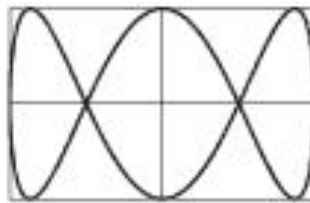
# 9. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ



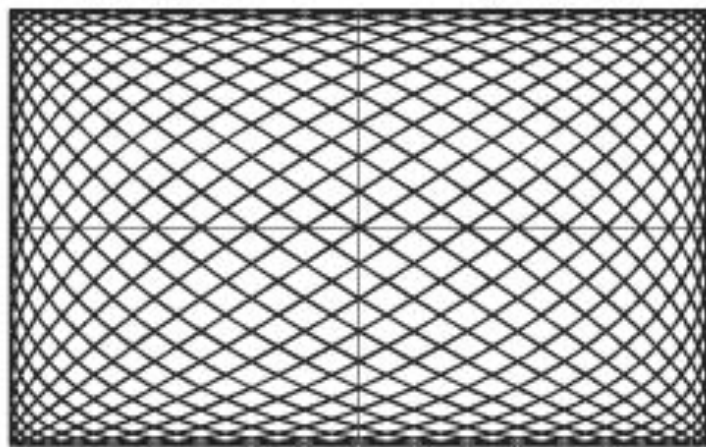
$m = 1, n = 1$



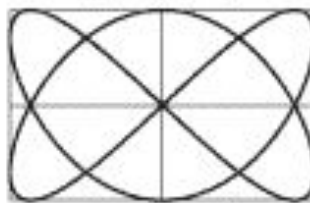
$m = 1, n = 2$



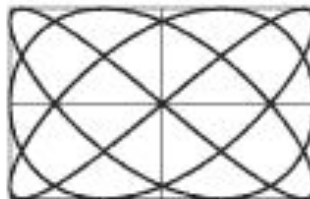
$m = 1, n = 3$



$m = 19, n = 20$



$m = 2, n = 3$



$m = 3, n = 4$

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний **неодинаковы**, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**. Наиболее **простой вид** имеют фигуры Лиссажу для случая, если **отношение частот** – это **простая рациональная дробь**.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси  $x$  можно представить в виде  $\omega_x = m\omega$ , а вдоль оси  $y$  –  $\omega_y = n\omega$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа. За то время, пока вдоль оси  $x$  точка успеет переместиться из одного крайнего положения в другое  $m$  раз, вдоль оси  $y$  она совершит  $n$  таких перемещений.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.