ДИНАМИКА ТОЧКИ

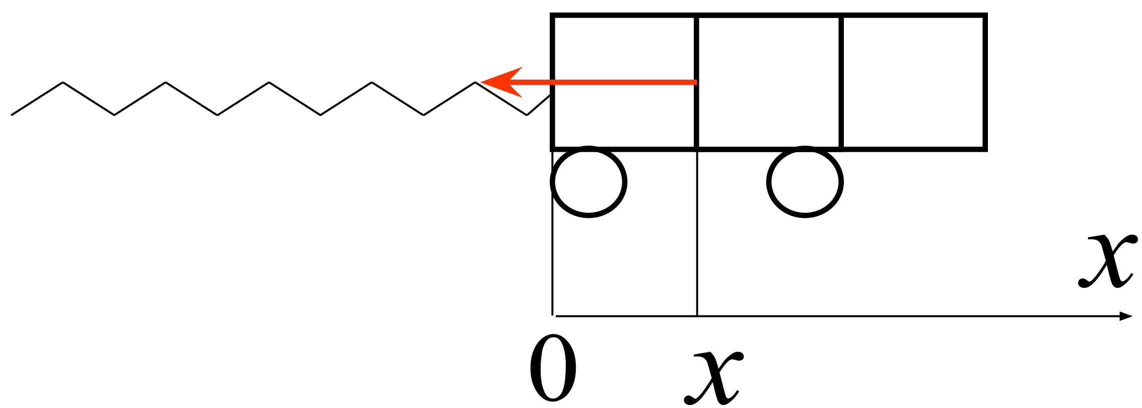
ЛЕКЦИЯ 3:

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ

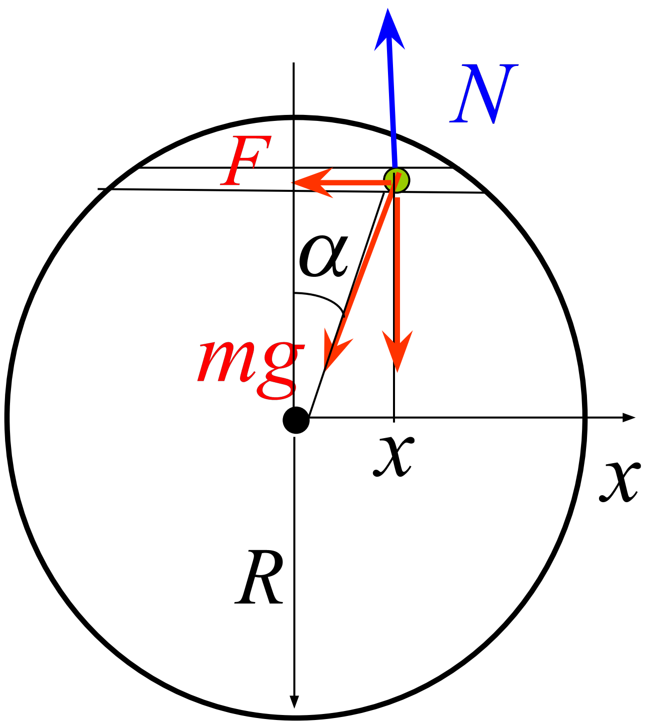
Жесткость пружины

$$F = -cx$$



$$\boxed{m\ddot{x} + cx = 0}$$

2. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



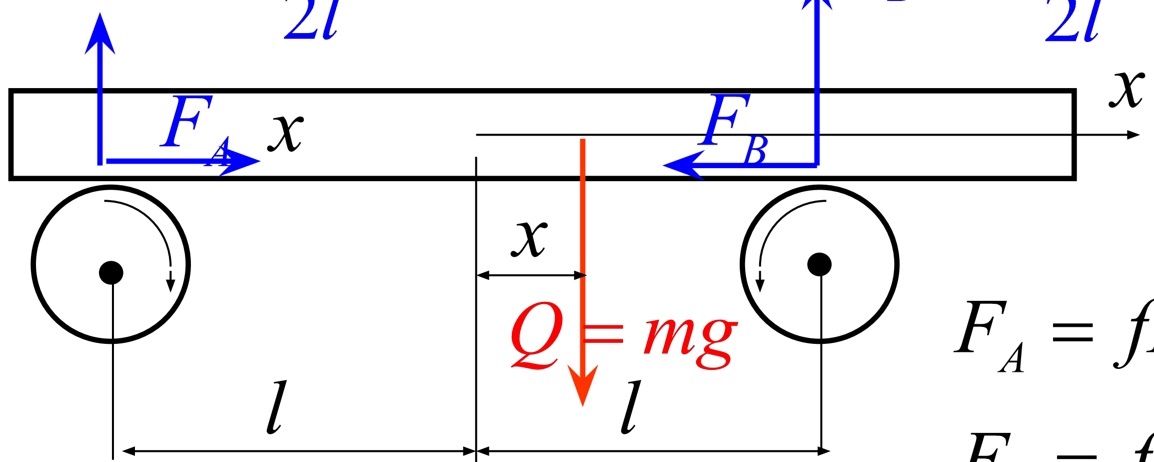
$$F = mg\sin\alpha \approx mg\frac{x}{R}$$

$$m\ddot{x} = -F = -\frac{mg}{R}x$$

$$\boxed{m\ddot{x} + cx = 0} \qquad c = mg/R$$

3. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ

$$N_A = \frac{l-x}{2l}Q \qquad N_B = \frac{l+x}{2l}Q$$



$$N_A + N_B = 0$$

$$lN_A - lN_B = -Qx$$

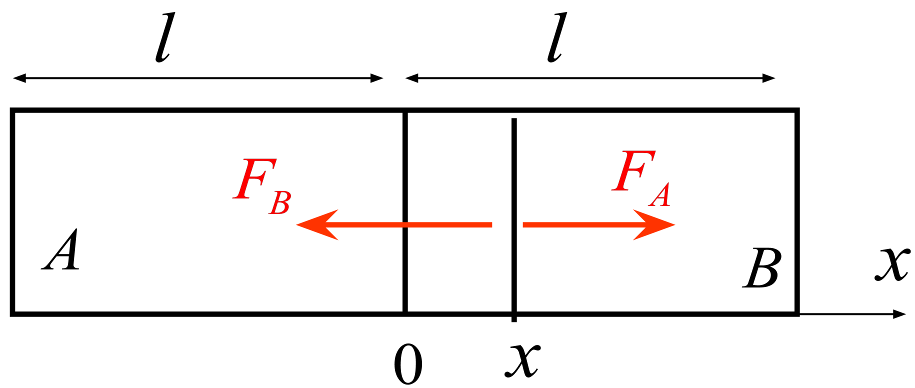
$$F_A = fN_A$$

$$F_B = fN_B$$

$$m\ddot{x} = F_A - F_B = -\frac{fmg}{l}x$$

$$\boxed{m\ddot{x} + cx = 0} \qquad c = \frac{fmg}{l}$$

4. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



$$F_B = Sp_B = S\frac{p_0 V_0}{V_B} = \frac{Sp_0 l}{l - x} \qquad F_A = \frac{Sp_0 l}{l + x}$$

$$m\ddot{x} = F_A - F_B = -\frac{2Sp_0 l}{l^2 - x^2}x \approx -\frac{2Sp_0}{l}x$$

$$\boxed{m\ddot{x} + cx = 0} \qquad c = \frac{2Sp_0}{l}$$

5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Наименование вида колебаний
Восстанавливающая сила $F(x)$ $F(x) = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	Свободные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ +сила сопротивления $R(\dot{x})$ $F(x) = -cx \quad R(\dot{x}) = -b\dot{x}$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	Свободные колебания с вязким трением
Восстанавливающая сила $F(x)$ +возмущающая сила $Q(t)$ $F(x) = -cx \quad Q = Q(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q(t)$	Вынужденные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ +сила сопротивления $R(\dot{x})$ +возмущающая сила $Q(t)$ $F(x) = -cx \quad R(\dot{x}) = -b\dot{x} \quad Q = Q(t)$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q(t)$	Вынужденные колебания с вязким трением

6. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$k^2 = c/m \qquad \boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

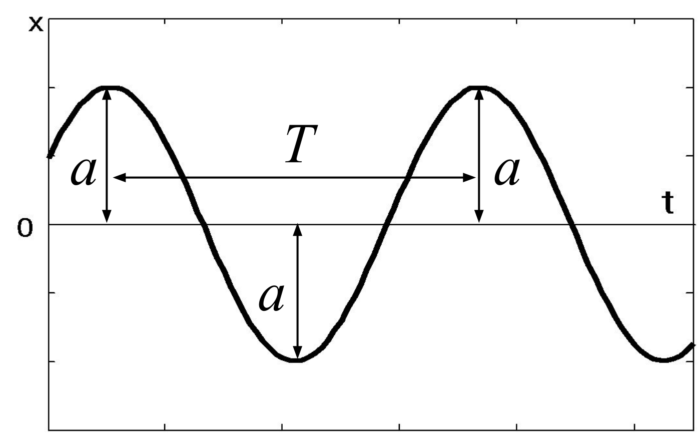
$$x = e^{\alpha x} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm} = \pm ik \quad \Rightarrow \quad x = e^{\pm ikt} = \cos t + i \sin t$$

$$\boxed{x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt} \qquad \begin{aligned} C_1 &= a \sin \varepsilon \\ C_2 &= a \cos \varepsilon \end{aligned} \qquad \boxed{x = \underbrace{a}_{\text{амплитуда}} \sin\big(\overbrace{\underbrace{k}_{\text{частота}}t + \underbrace{\varepsilon}_{\text{начальная фаза}}}^{\text{фаза}}\big)}$$

Частота колебаний определяет число колебаний, совершаемых точкой за 2π секунд. Частота колебаний k не зависит от начальных условий и определяется только параметрами системы (величинами c и m). По этому признаку частоту свободных колебаний называют также **собственной частотой**.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется, называется **периодом колебаний (T)**.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$



7. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0}$$

$$k^2 = c/m, \quad 2h = b/m \qquad\qquad \ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0$$

$$\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

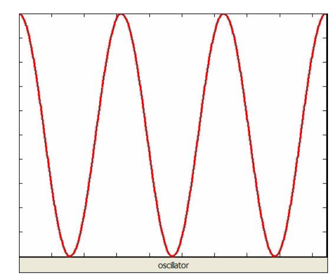
$$x = C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$$

Малое сопротивление $h < k$

$\alpha_{\pm}$ - комплексно сопряженные

Большое сопротивление $h > k$

$\alpha_{\pm}$ - вещественные



8. МАЛОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

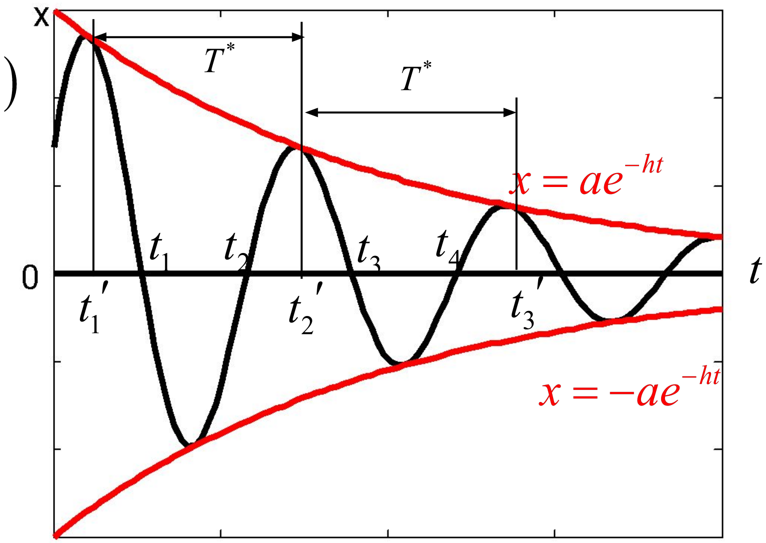
$$h < k \qquad\qquad k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$$

$$\boxed{x = e^{-ht}\left(C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t\right)} \qquad \begin{aligned} C_1 &= a \sin \varepsilon \\ C_2 &= a \cos \varepsilon \end{aligned} \qquad \boxed{x = a e^{-ht} \sin\left(k^* t + \varepsilon\right)}$$

1) Движение является затухающим $x \to 0\,(t \to \infty)$

2) Носит колебательный х-р: приближаясь к состоянию равновесия, система проходит через это состояние бесконечное число раз в моменты $t_n = (n\pi - \varepsilon)/k^*$

3) Движение непериодично, но максимальные отклонения точки от точки равновесия хотя и уменьшаются со временем, но разнесены друг от друга на один и тот же промежуток времени $T^* = 2\pi / k^*$ период затухающих колебаний



4) Период затухающих колебаний больше чем у незатухающих

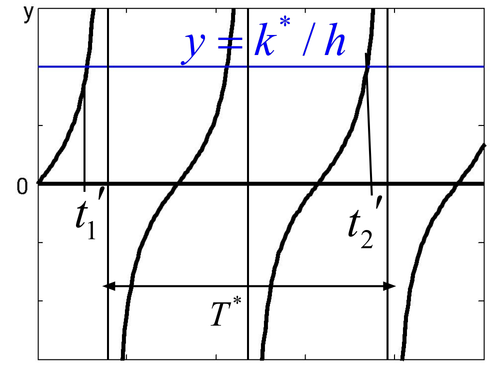
$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} > \frac{2\pi}{k}$$

9. МАЛОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow -hae^{-ht}\sin\left(k^{*}t+\varepsilon\right)+ak^{*}e^{-ht}\cos\left(k^{*}t+\varepsilon\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(k^{*}t+\varepsilon\right)=k^{*}/h$$



$$a_k = ae^{-ht_k'}\sin\left(k^{*}t_k'+\varepsilon\right)=ae^{-ht_k'}\sin\left(k^{*}t_1'+\varepsilon\right)$$

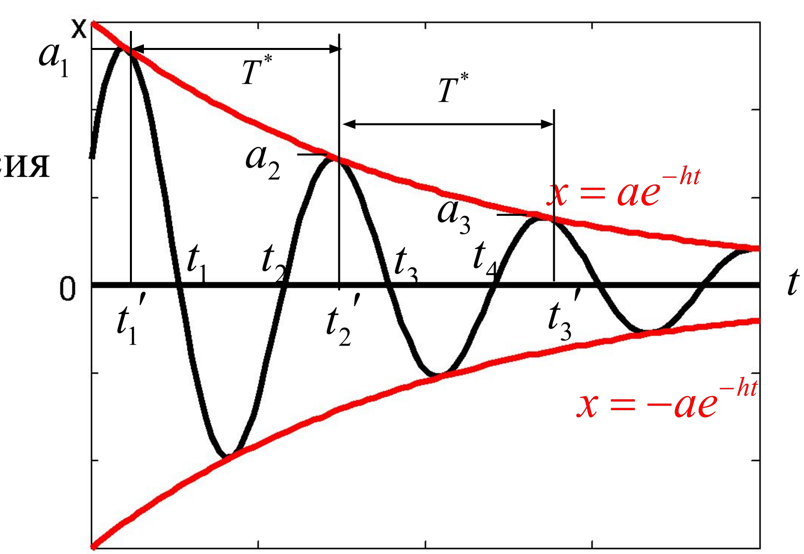
Амплитуды затухающих к-й

$$\eta = \frac{a_k}{a_{k-1}} = e^{-hT^{*}}$$ Геометрическая прогрессия

Декремент колебаний

$$\left|\ln\eta\right| = hT^{*}$$

Логарифмический декремент колебаний



10. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ СИТУАЦИЯ

$$k = h \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm} = -h \quad \Rightarrow \quad x = e^{-ht}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-ht}\left(x_0 + \left(\dot{x}_0 + h x_0\right)t\right)$$

Движение является затухающим и апериодичным

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -h\left(\cancel{x_0} + \left(\dot{x}_0 + h x_0\right)t\right) + \dot{x}_0 + \cancel{h x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{\dot{x}_0}{h\left(\dot{x}_0 + h x_0\right)}$$

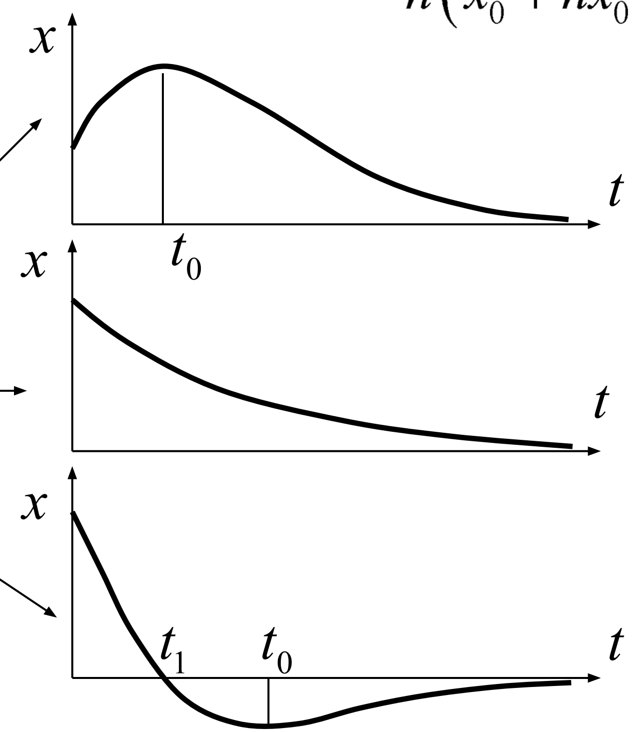
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{x_0}{\dot{x}_0 + h x_0}$$

$$x_0 > 0$$

$$\dot{x}_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 < 0 \qquad \text{(A)}$$

$$-h x_0 < \dot{x}_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 < 0, t_1 < 0 \qquad \text{(B)}$$

$$\dot{x}_0 < -h x_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 > 0 \qquad \text{(C)}$$



11. БОЛЬШОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$h > k \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} \quad \Rightarrow \quad x = C_{+} e^{-\alpha_{+} t} + C_{-} e^{-\alpha_{-} t}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha_{-} x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_{-} - \alpha_{+}} e^{\alpha_{+} t} + \frac{\alpha_{+} x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_{+} - \alpha_{-}} e^{\alpha_{-} t}$$

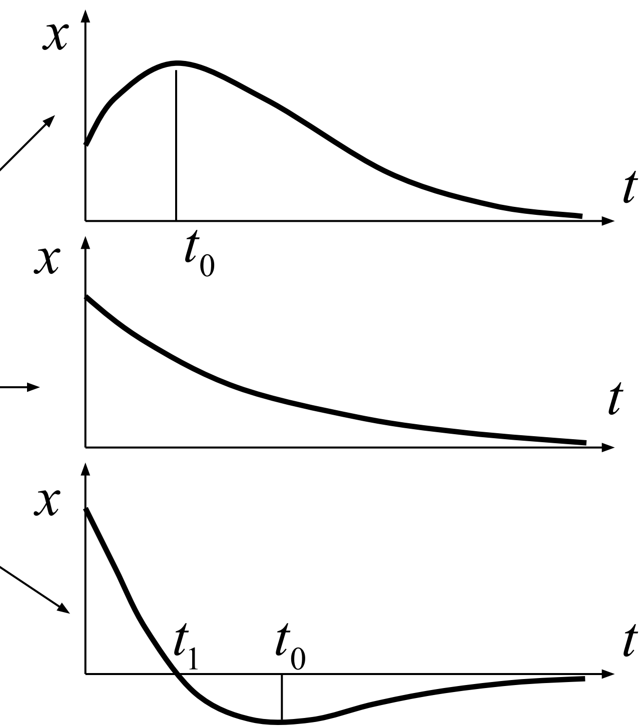
Движение является затухающим и апериодичным

$$x_0 > 0$$

$$\dot{x}_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 < 0 \qquad \text{(A)}$$

$$\alpha_{-} x_0 < \dot{x}_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 < 0, t_1 < 0 \qquad \text{(B)}$$

$$\dot{x}_0 < \alpha_{-} x_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 > 0 \qquad \text{(C)}$$



12. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = H \sin\left(pt + \delta\right)} \longleftarrow$$

Гармоническая вынуждающая сила

Общее решение = общее решение однородного у-я + частное решение неоднородного у-я

$$x_1 = a \sin\left(kt + \varepsilon\right) \qquad x_2 = A_0 \sin\left(pt + \delta\right)$$

$$A_0 p^2 \sin\left(pt + \delta\right) + A_0 k^2 \sin\left(pt + \delta\right) = H \sin\left(pt + \delta\right) \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{H}{k^2 - p^2}$$

$$\boxed{x = a \sin\left(kt + \varepsilon\right) + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin\left(pt + \delta\right)}$$

Движение = свободные колебания + вынужденные колебания

13. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$\boxed{x = a\sin\left(kt+\varepsilon\right) + \frac{H}{k^2 - p^2}\sin\left(pt+\delta\right)}$$

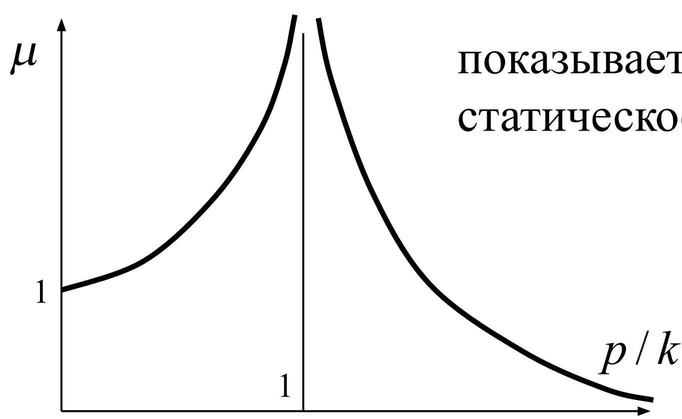
$$A = \frac{H}{\left|k^2 - p^2\right|}$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$x_{\text{ст}}$ Величина статического отклонения точки от положения равновесия при действии, равной максимальному значению возмущающей силы

$$\cancel{\ddot{x}} + k^2 x = H \quad \Rightarrow \quad x_{\text{ст}} = Hk^{-2}$$

Коэффициент динамичности $\mu = \dfrac{A}{x_{\text{ст}}} = \dfrac{A}{H/k^2} = \dfrac{1}{\left|1 - p^2/k^2\right|}$



показывает во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение

14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

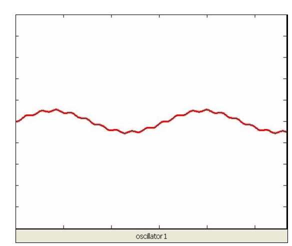
$$x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{H}{k^2-p^2}\sin\left(pt+\delta\right) \qquad x(0)=C_1+\frac{H}{k^2-p^2}\sin\delta$$

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+\frac{Hp}{k^2-p^2}\cos\left(pt+\delta\right) \qquad \dot{x}(0)=C_2k+\frac{Hp}{k^2-p^2}\cos\delta$$

$$C_1=x_0-\frac{H}{k^2-p^2}\sin\delta \qquad C_2=\frac{\dot{x}_0}{k}-\frac{p}{k}\frac{H}{k^2-p^2}\cos\delta$$

$$x=\underbrace{x_0\cos kt+\frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt}_{\text{свободные колебания, вызванные начальными условиями}}\underbrace{-\frac{H}{k^2-p^2}\left(\sin\delta\cos kt+\frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right)}_{\text{свободные колебания, вызванные вынуждающей силой}}+\underbrace{\frac{H}{k^2-p^2}\sin\left(pt+\delta\right)}_{\text{чисто вынужденные колебания}}$$



15. БИЕНИЯ

$$x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

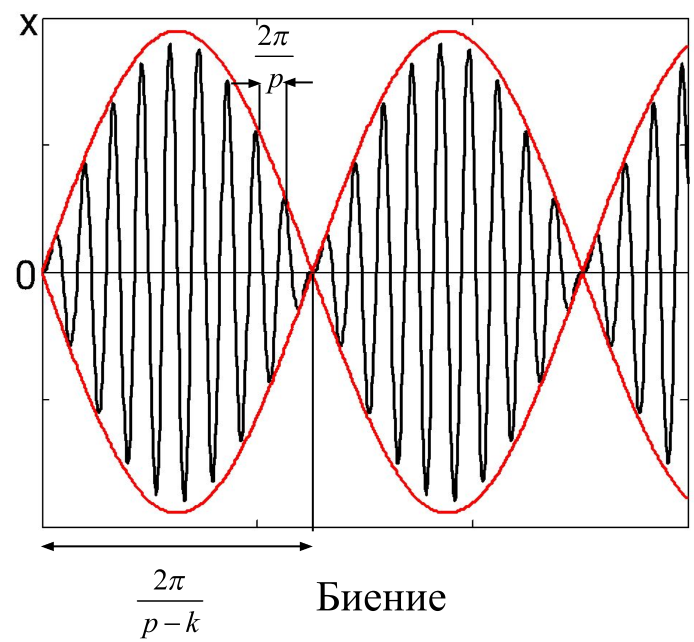
$$x = -\frac{H}{k^2 - p^2}\left(\sin\delta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right) + \frac{H}{k^2 - p^2}\sin\left(pt + \delta\right)$$

$$p \approx k \quad \Rightarrow \quad x \approx \frac{H}{k^2 - p^2}\left(\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)\right)$$

$$x \approx \frac{2H}{k^2 - p^2}\sin\left(\frac{p-k}{2}t\right)\cos\left(pt + \delta\right)$$

$$p \to k \quad x \to \frac{H}{2k}t\cos\left(kt + \delta\right)$$

При p=k амплитуда неограниченно растет со временем. Это явление называется **резонансом**



Биение

16. РЕЗОНАНС

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = H\sin\left(kt+\delta\right)}$$

Общее решение = общее решение однородного у-я + частное решение неоднородного у-я

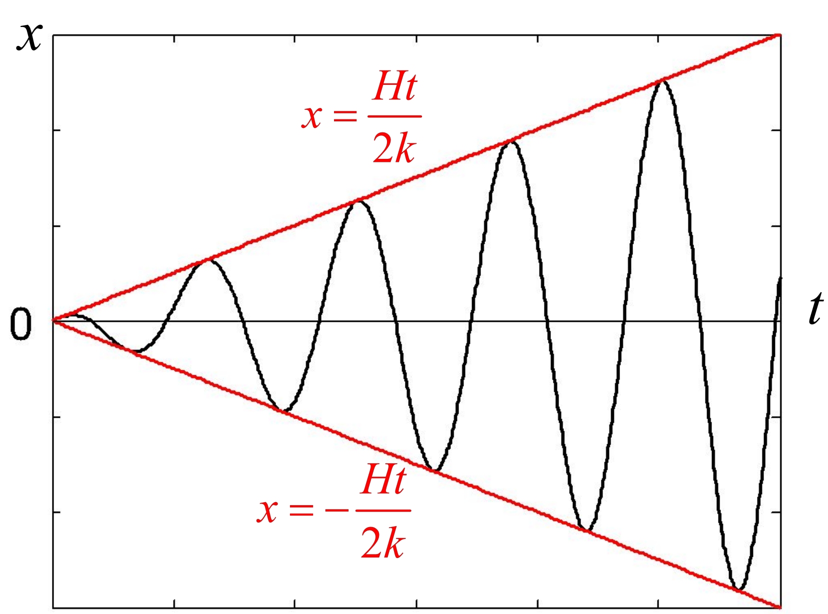
$$x_1 = a\sin\left(kt+\varepsilon\right) \qquad x_2 = At\sin\left(kt+\gamma\right)$$

$$\dot{x}_2 = A\sin\left(kt+\gamma\right) + Akt\cos\left(kt+\gamma\right) \qquad \ddot{x}_2 = 2Ak\cos\left(kt+\gamma\right) - Ak^2 t\sin\left(kt+\gamma\right)$$

$$2Ak\cos\left(kt+\gamma\right) = H\sin\left(kt+\delta\right)$$

$$A = \frac{H}{2k},\ \gamma = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = a\sin(kt+\varepsilon) - \frac{Ht}{2k}\cos(kt+\delta)}$$



Резонанс

17. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

$$\boxed{\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = H\sin\left(pt + \delta\right)}$$

Общее решение = общее решение однородного у-я + частное решение неоднородного у-я

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$$

$$x_1 = ae^{-ht}\sin\left(k^* t + \varepsilon\right) \qquad x_2 = A\sin\left(pt + \gamma\right)$$

$$\dot{x}_2 = Ap\cos\left(pt + \gamma\right) \qquad \ddot{x}_2 = -Ap^2\sin\left(pt + \gamma\right)$$

$$A\left(k^2 - p^2\right)\sin\left(pt + \gamma\right) + 2hpA\cos\left(pt + \gamma\right) = H\sin\left(pt + \delta\right) =$$

$$= H\sin\left(pt + \gamma\right)\cos(\delta - \gamma) + H\cos\left(pt + \gamma\right)\sin(\delta - \gamma)$$

$$\begin{cases} A\left(k^2 - p^2\right) = H\cos\left(\delta - \gamma\right) \\ 2phA = H\sin\left(\delta - \gamma\right) \end{cases}$$

$$x = x_1 + A\sin\left(pt + \gamma\right)$$

Быстро затухает

Главный интерес

Основное колебание

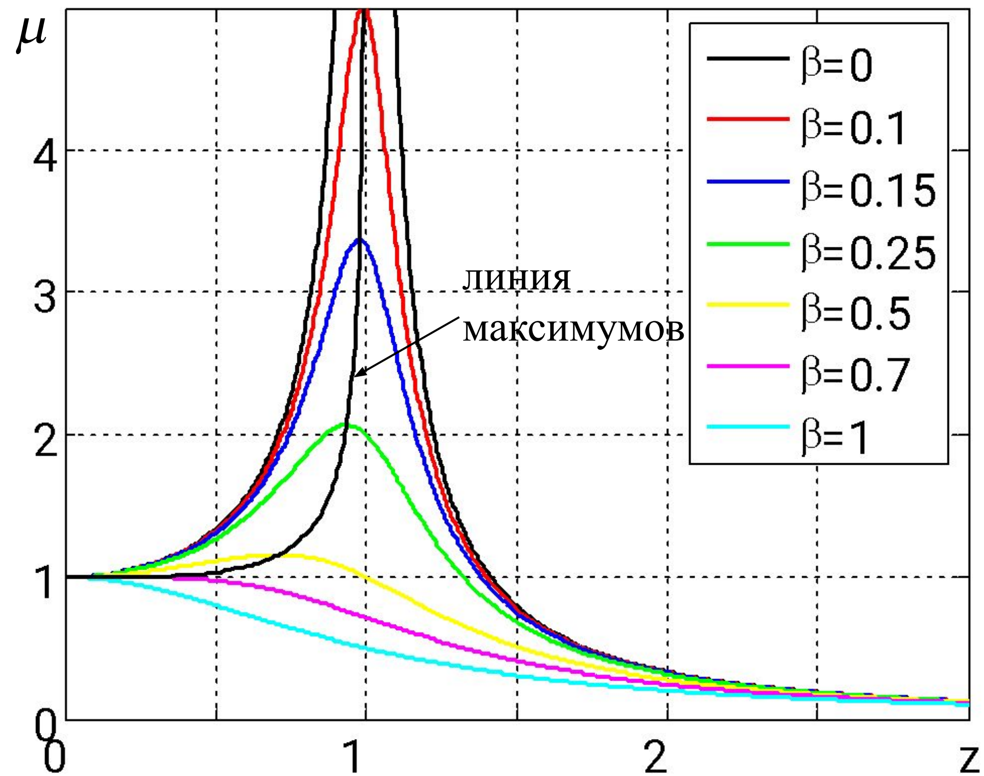
$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\delta - \gamma\right) = \frac{2hp}{k^2 - p^2} \qquad A = \frac{H}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4h^2p^2}}}$$

$$\mu = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{A}{H / k^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\beta^2 z^2}}$$

$$z = \frac{p}{k} \qquad \beta = \frac{h}{k}$$

18. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

1) Амплитуда вынужденных колебаний при z, достаточно большом и достаточно малом по сравнению с z=1, мало зависит от сопротивления среды.
2)При z, близких к z=1, влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний весьма существенно.
3) При $z \to \infty$ амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Это значит, что при большой частоте возмущающей силы по сравнению с собственной частотой амплитуда вынужденных колебаний мала.
4) При большом сопротивлении $(\beta < 0.7)$ амплитуда вынужденных колебаний убывает с ростом z и не превосходит величины статического отклонения



Имеется максимум при $\beta < \sqrt{2}/2$

$$z_{\max} = \sqrt{1 - 2\beta^2} \qquad \mu_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}$$