## Лекция 5

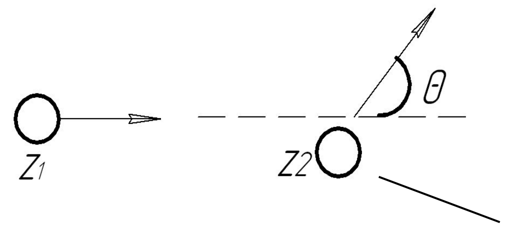
# «Процесс многократного рассеяния»

1. Упругое рассеяние частиц на ядрах
2. Сопоставление рассеяние тяжелой частицы на электроне и на ядре
3. Процесс многократного рассеяния в слое вещества
4. Оценка среднего значения квадрата угла рассеяния
5. Среднеквадратичный угол многократного рассеяния
6. Движение заряженных частиц в магнитном поле
7. Влияние многократного рассеяния

# Упругое рассеяние частиц на ядрах

Прохождение заряженной частицы $Z_1$ через вещество сопровождается электромагнитным взаимодействием не только с электронами среды, но также происходит **упругое рассеяние на ядрах**

$Z_1 + Z_2$ □ $Z_1 + Z_2$



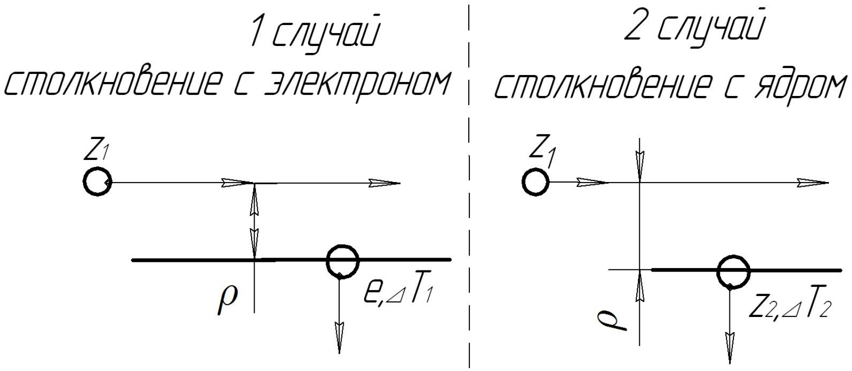

ядро вещества мишени

Отдельное столкновение частицы $Z_1$ с тяжелым ядром $Z_2$ вызывает небольшое рассеяние (угол θ). На толщине ***x*** постепенно накапливается заметное отклонение от первоначального направления движения за счет повторных процессов рассеяния (**многократное рассеяние**).

Сопоставим упругое взаимодействие тяжелой частицы $Z_1$ на электроне ($m_e$) и на ядре ($Z_2$, $M_2$). Определим, какая из частиц получит большую энергию от частицы $Z_1$: электрон ($\Delta T_e$) или ядро ($\Delta T_2$). **Где потеря энергии больше ?**

# Упругое рассеяние тяжелой частицы на электроне и на ядре

**Сопоставим упругое взаимодействие тяжелой частицы $Z_1$ на электроне ($m_e$) и на ядре ($Z_2$, $M_2$). Определим, какая из частиц получит большую энергию от частицы $Z_1$: электрон ($\Delta T_e$) или ядро ($\Delta T_2$).**




**частица $Z_1$ пролетает мимо электрона и ядра с одинаковым прицельным параметром $\rho$ и с одинаковой скоростью $V_1$**

переданный импульс $\Delta p = \Delta p_\perp$ и энергию $\Delta T = \dfrac{(\Delta p_\perp)^2}{2m_{мишень}}$

за счет кулоновского взаимодействия можно выразить в виде:

$$\Delta p_\perp = F\Delta t = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{2\rho}{V_1}\right); \quad \Delta T = \frac{4z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2}\cdot\frac{1}{2m_{мишень}}.$$

## Упругого рассеяния тяжелой частицы на электроне и на ядре

В результате получим $\left[\Delta T = \dfrac{4z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2}\cdot\dfrac{1}{2m_{мишень}}\right]$:

для электрона - $\Delta T_e = \dfrac{2z_1^2\cdot 1\cdot e^4}{\rho^2 V_1^2}\cdot\dfrac{1}{m_e}$, для ядра - $\Delta T_2 = \dfrac{2z_1^2 z_2^2 e^4}{\rho^2 V_1^2}\cdot\dfrac{1}{M_2}$

Отношение приобретенных энергий равно $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_e} = \dfrac{z_2^2}{M_2} / \dfrac{1}{m_e}$.

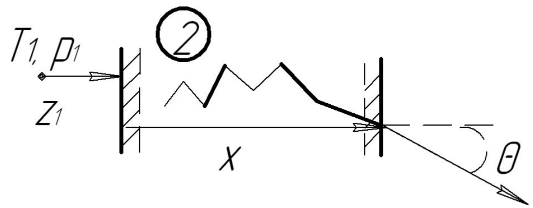
Масса ядра $M_2 \approx A_2 m_N - E_{связи}$ ; величиной $E_{связи}$ можно пренебречь (менее 1% от массы ядра). Число протонов и нейтронов в ядре почти одинаково, то $A_2 \approx 2z_2$.

Отношение энергий получается в виде $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_e} \approx \dfrac{z_2^2}{2z_2}\dfrac{m_e}{m_N} = \dfrac{z_2 m_e}{2m_N}$; $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_e} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2000}z_2$

Величина z лежит в диапазоне $1 < z_2 < 100$.

**Окончательно получаем** $\Delta T_2 \ll \Delta T_e;\ \dfrac{1}{4000} < \dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_e} < \dfrac{1}{40}$

# Процесс многократного рассеяния в слое вещества




**Условия расчета:**

**Частица, проходя толстый слой, не должна заметно терять энергию: $T_1(x=0) \approx T_1(x)$. Импульс частицы $p_1$ при этом остается практически постоянным по глубине.**

**Это ограничивает верхнее значение толщины вещества и применимость используемых приближений.**

**Суммарный угол $\theta = \Sigma\, \theta_i$, где $\theta_i$ – рассеяние в *i*-ом взаимодействии, не может служить мерой рассеяния. Его величина, с учетом знака углов отклонений $\theta_i$, равна нулю.**

Принято оценивать квадратичный угол: $\bar{\theta}^2 = \Sigma\, \theta_i^2$

**Для учета взаимодействия частицы $Z_1$ с отдельным ядром *i* можно использовать формулу Резерфорда**

$$f(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{4T_1 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \approx \frac{z_1^2 z_2^2}{4 p_1^2 V_1^2 \sin^4(\theta/2)} \quad где\ T_1 = m_1 V_1^2/2 = p_1 V_1/2$$

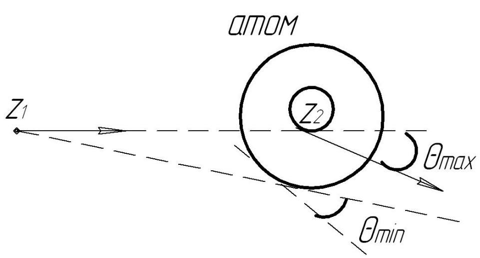
## Оценка среднего значения квадрата угла рассеяния

**Для отдельного столкновения с ядром** $\overline{\theta_i^2} = \int \theta^2 f(\theta) d\Omega$

**Расчет в приближении малых углов - в расчетах взято** $\sin\theta \approx \theta$ **.**

$$\overline{\theta_i^2} \approx \frac{z_1^2}{} \frac{z_2^2}{p_1^2 V_1^2} \frac{\int \frac{\theta^2 d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \sim \left[\frac{z_1^2}{\sigma} \frac{z_2^2}{p_1^2 V_1^2}\right] \int \frac{\theta^2 \sin\theta d\theta \cdot 2\pi}{\left(\frac{\theta^4}{2}\right)} = [\ ] \int \frac{\theta^2 \theta d\theta}{\theta^4} = [\,] \int \frac{d\theta}{\theta} = [\ ] \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}$$

**Значения предельных углов связаны с размерами ядра ($R_{яд}$) и атома ($R_{ат}$) и зависят от материала вещества-мишени**




$$\theta^{\min} \sim \frac{1}{R_{ат}} = \varphi_{ат}(z_2)$$

$$\theta^{\max} \sim \frac{1}{R_{яд}} = \varphi_{яд}(z_2)$$

# Среднеквадратичный угол многократного рассеяния

$$\overline{\theta^2} = \sum_i \overline{\theta_i^2} \approx m\overline{\theta_i^2}$$

**Суммарный среднеквадратичный угол многократного рассеяния получается как сумма значений по полному числу отдельных *i* независимых столкновений *m* на толщине *x*.**

$$m = \sigma \cdot n \cdot x$$

**$\sigma$(см$^2$) – полное резерфордовское сечение рассеяния**

$$[m] = cm^2 \cdot \frac{1}{cm^3} \cdot cm$$

**$n$(1/см$^3$) – концентрация ядер мишени**

**$X$ (см) – толщина мишени**

$$m = x / L; \; L = 1 / \sigma n$$

**$L$ - длина взаимодействия**

**Получается функциональная зависимость вида:**

$$\overline{\theta^2} = \frac{z_1^2 z_2^2 n_2 x}{p_1^2 V_1^2} \varphi(z_2)$$

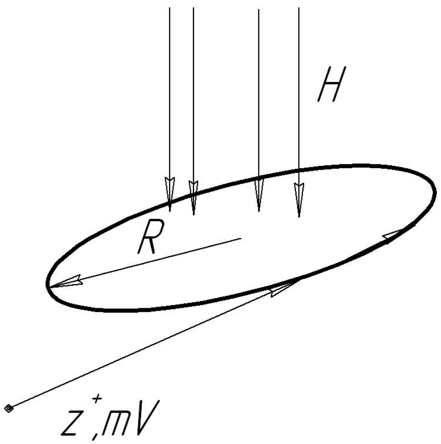
**Заряженная частица ($Z_1$), движущаяся с импульсом $p_1$ (скорость $v_1$) через вещество толщиной $x$, приобретает среднеквадратичный угол**

$$\Theta = \sqrt{\overline{\theta^2}} \approx \frac{z_1 \sqrt{x}}{p_1 V_1}$$

**Точные расчеты дают подобную зависимость:**

$$\Theta = \frac{z_1 E_s \sqrt{x / x_0}}{p_1 V_1} \quad E_s = 21 \text{ МэВ}$$

# Движение заряженных частиц в магнитном поле




Заряженная частица *q* с импульсом $p_1$, попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору H.
Частица будет двигаться равномерно по окружности с радиусом R. На эту частицу действует сила Лоренца (запись в системе единиц CGSE) и центростремительная сила

$$F_л = \frac{q}{c}\,\vec{V}\times\vec{H} \qquad F_{цент} = \frac{mV^2}{R}$$

$$pc = ze\cdot H\cdot R\ (\qquad)$$

Их равенство позволяет вычислить

величину радиуса вращения в магнитном поле

Эта запись справедлива и для релятивистского случая $pc = \sqrt{T(T+2mc^2)}$

**Получаем:** $pc = 300zHR$ $\quad [pB] = z$; см $[\ \ ] = H1$; $[Гс] = R$; $[\ \ ] =$

## Влияние многократного рассеяния

$$\chi = \frac{d}{R} = \frac{300HR}{pc}$$

**Пусть, например заряженная частица попадает в магнитный спектрометр (заполненный веществом) и проходит расстояние *d* перпендикулярно направлению поля H по дуге окружности. При этом она поворачивается на угол** $\chi$

**На толщине спектрометра *d* отношение угла многократного рассеяния** $\Theta$ **к углу поворота в магнитном поле** $\chi$ **запишется в виде**

$$\frac{\Theta}{\chi} = \frac{21}{300} \cdot \frac{z}{H\beta\sqrt{x_0 d}}$$

**Скорость частицы** $\beta$ **выражается через импульс**

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2}}$$

**При определенных сочетаниях параметров частицы, поля и характеристик среды искажающее влияние многократного рассеяния может быть минимизировано.**