Вероятностные модели управления запасами

1. Модель с непрерывным контролем уровня запаса

Рассмотрим две модели управления запасами:

- обобщение детерминированной модели экономичного размера заказа на вероятностный случай, в которой используется буферный запас, отвечающий за случайный спрос;
- вероятностная модель экономичного размера заказа, учитывающая вероятностный характер спроса непосредственно в постановке задачи.

1.1 «Рандомизированная» модель эконом. размера заказа

Адаптируем детерминированную модель экономичного размера заказа для вероятностного спроса. Используем приближенный метод, который предполагает существование постоянного буферного запаса на протяжении всего планового периода. Размер резерва устанавливается так, чтобы вероятность истощения запаса в течение периода выполнения заказа (интервала между моментом размещения заказа и его поставкой) не превышала наперед заданной величины.

Введем следующие обозначения.

- L — срок выполнения заказа, т.е. время от момента размещения заказа до его поставки;
- X_1— случайная величина, представляющая величину спроса на протяжении срока выполнения заказа;
- μ_1 — средняя величина спроса на протяжении срока выполнения заказа,
- σ_1 — среднеквадратическое отклонение величины спроса на протяжении срока выполнения заказа;
- B — размер резервного запаса;
- α — максимально возможное значение вероятности истощения запаса на протяжении срока выполнения заказа.

Основным предположением при построении модели является то, что величина спроса X_1 на протяжении срока выполнения заказа L является нормально распределенной случайной величиной со средним μ_1и стандартным отклонением σ_1 т.е. имеет распределение $N(\mu_1,\sigma_1)$

На рис. 1 показана зависимость между размером резервного запаса B и параметрами детерминированной модели экономичного размера заказа, которая включает срок выполнения заказа L, среднюю величину спроса μ_1 а протяжении срока выполнения заказа и экономичный размер заказа y*. Заметим, что L должно быть равно *эффективному* времени выполнения заказа.

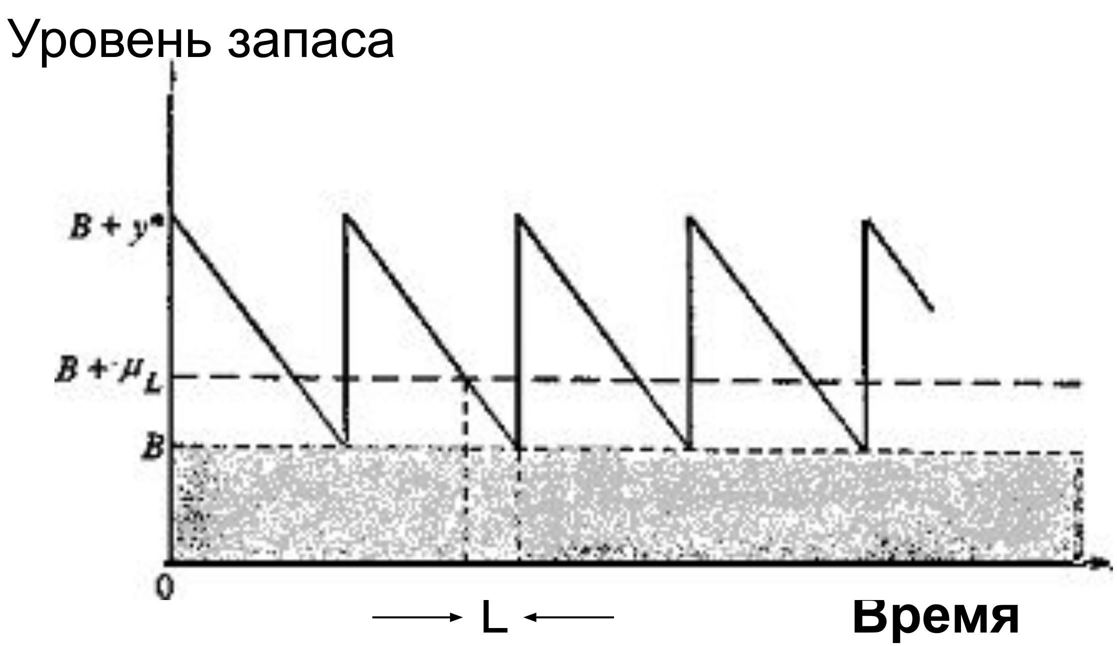


Рис. 1

Вероятностное условие, которое определяет размер резервного запаса В, имеет вид:

$$P\{x_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$$

По определению случайная величина

$$z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$$

является нормированной нормально распределенной случайной величиной, т.е. имеет распределение N(0, 1). Следовательно,

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha.$$

На рис. 2 показана величина K_α, которая определяется из таблицы стандартного нормального распределения, так что

$$P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$$

Следовательно, размер резервного запаса должен удовлетворять неравенству $B \geq \sigma_L K_\alpha$.

Величина спроса на протяжении срока выполнения заказа L обычно описывается плотностью распределения вероятностей, отнесенной к единице времени (например, к дню или неделе), из которой можно определить распределение спроса на протяжен периода L. В частности, если спрос за единицу времени является нормально распределенной случайной величиной со средним D и стандартным отклонением σ, то общий спрос на протяжении срока выполнения заказа L будет иметь распределение $N(\mu_L, \sigma_L)$, где μ_L=DL и $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$. Формула для σ_L получена на основании того, что значение L является целым числом (или же округлено до целого числа).

1.2. Стохастический вариант модели экономичного размера заказа

"Рандомизированная" модель экономичного размера заказа не дает оптимальную политику управления запасами. Информация, имеющая отношение к вероятностной природе спроса первоначально не учитывается, а используется лишь независимо на последнем этапе вычислений. Рассмотрим более точную модель, в которой вероятностная природа спроса учитывается непосредственно в постановке задачи.

В новой модели допускается неудовлетворенный спрос (рис. 3). Заказ размером *y* размещается тогда, когда объем запаса достигает уровня *R*. Как и в детерминированном случае, уровень *R*, при котором снова размещается заказ, является функцией периода времени между размещением заказа и его выполнением. Оптимальные значения *y* и *R* определяются минимизацией ожидаемых затрат системы управления запасами, отнесенных к единице времени; они включают расходы на размещение заказа, на хранение, так и потери, связанные с неудовлетворенным спросом.

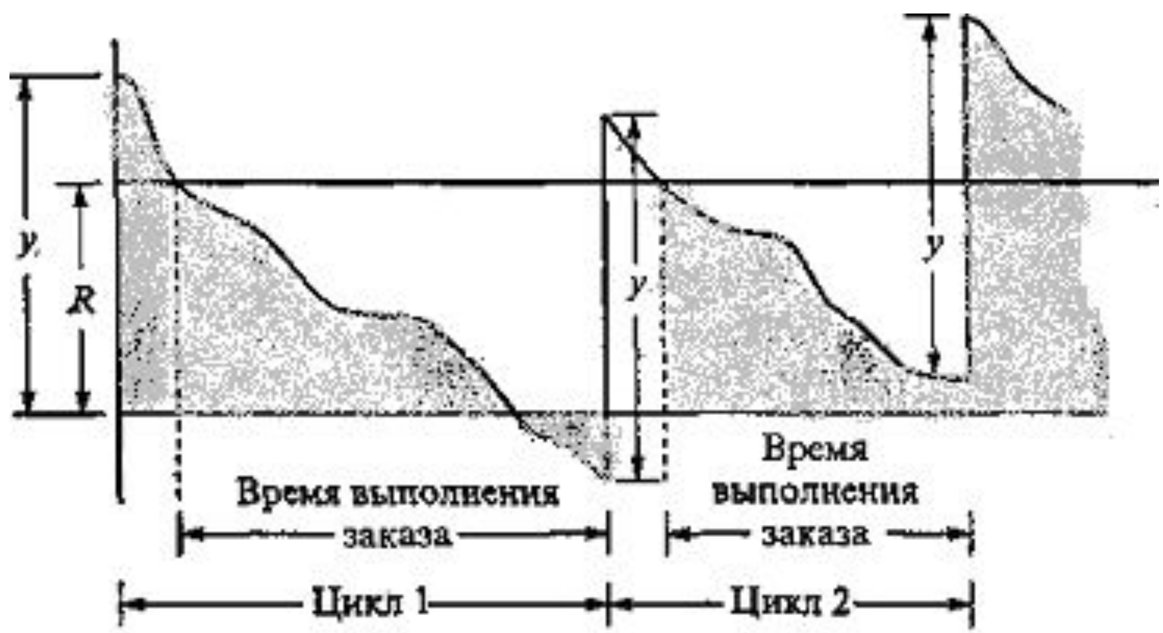


Рис. 3

В рассматриваемой модели приняты три допущения.

1. Неудовлетворенный в течение срока выполнения заказа спрос накапливается.
2. Разрешается не более одного невыполненного заказа.
3. Распределение спроса в течение срока выполнения заказа является стационарным (неизменным) во времени.

Для определения функции, отражающей суммарные затраты, отнесенные к единице времени, введем следующие обозначения.

- $f(x)$ — плотность распределения спроса x в течение срока выполнения заказа,
- D — ожидаемое значение спроса в единицу времени,
- h — удельные затраты на хранение (на единицу продукции за единицу времени),
- p — удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за единицу времени),
- K — стоимость размещения заказа.

Основываясь на этих определениях, вычислим компоненты функции затрат.

1. *Стоимость размещения заказов.* Приближенное число заказов в единицу времени равно D/y, так что стоимость размещения заказов в единицу времени равна KD/y.

2. *Ожидаемые затраты на хранение.* Средний уровень запаса равен

$$I = \frac{(y + M\{R - x\}) + M\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - M\{x\}.$$

Следовательно, ожидаемые затраты на хранение за единицу времени равны *hI*.

Приведенная формула получена в результате усреднения ожидаемых запасов в начале и конце временного цикла, т.е. величин y + M{R-x} и M{R-x} соответственно. При этом игнорируется случай, когда величина R - M{x} может быть отрицательной, что является одним из упрощающих допущений рассматриваемой модели.

3. *Ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом.*

Дефицит возникает при x > R. Следовательно, ожидаемый дефицит за единицу времени равен

$$S = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx.$$

Так как в модели предполагается, что *p* пропорционально лишь объему дефицита, ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом, за один цикл равны *pS*. Поскольку единица времени содержит *D/y* циклов, то ожидаемые потери, обусловленные дефицитом, составляют *pDS/y* за единицу времени.

Результирующая функция общих потерь за единицу времени *TCU* имеет следующий вид.

$$TCU(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - M\{x\}\right) + \frac{pD}{y} \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx.$$

Оптимальные значения y* и R* определяются из представленных ниже уравнений.

$$\frac{\partial TCU}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pD}{y^2} S = 0,$$

$$\frac{\partial TCU}{\partial y} = h - \left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^\infty f(x)dx = 0.$$

Следовательно, имеем

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}}, \qquad (1)$$

$$\int_R^\infty f(x)dx = \frac{hy^*}{pD}. \qquad (2)$$

Так как из уравнений (1) и (2) y* и R* нельзя определить в явном виде, для их нахождения используется численный алгоритм, предложенный Хедли и Уайтин (Hadley, Whitin) [1]. Доказано, что алгоритм сходится за конечное число итераций при условии, что допустимое решение существует.

При R = 0 последние два уравнения соответственно дают следующее.

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pM\{x\}}{h}},$$

$$\tilde{y} = \frac{pD}{h}.$$

Если $\tilde{y} \geq \bar{y}$, тогда существуют единственные оптимальные значения для y и R. Вычислительная процедура определяет, что наименьшим значением y^* является $\sqrt{2KD/h}$, которое достигается при S = 0.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Принимаем начальное решение $y_1 = y^* = \sqrt{2KD/h}$ считаем R_0 = 0. Полагаем i = 1 и переходим к шагу i.

Шаг i. Используем значение y_i для определения R_i, из уравнения (2). Если $R_i \approx R_{i-1}$, вычисления заканчиваются; оптимальным решением считаем $y^* = y_i$ и $R^* = R_i$. Иначе используем значение R_i в уравнении (1) для вычисления y_i. Полагаем $i=i+1$ и повторяем шаг i.

2. Одноэтапные модели

Одноэтапные модели управления запасами отражают ситуацию, когда для удовлетворения спроса в течение определенного периода продукция заказывается только один раз. Например, модный сезонный товар устаревает к концу сезона, и, следовательно, заказы на него могут не возобновляться. В данном разделе рассматривается два типа таких моделей: с учетом и без учета затрат на оформление заказов.

При изложении данного материала используются следующие обозначения.

c — стоимость закупки (или производства) единицы продукции,

K — стоимость размещения заказа,

h — удельные затраты на хранение единицы продукции в течение рассматриваемого периода,

p — удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за рассматриваемый период),

D — величина случайного спроса за рассматриваемый период,

f(D) — плотность вероятности спроса за рассматриваемый период,

y — объем заказа,

x — наличный запас продукта перед размещением заказа.

Модель определяет оптимальный объем заказа y, который минимизирует суммарные ожидаемые затраты, связанные с закупкой (или производством), хранением и неудовлетворенным спросом. При известном оптимальном значении y (обозначается y*) оптимальное управление запасами состоит в размещении заказа объемом y* - x, если x < y; в противном случае заказ не размещается.

2.1. Модель при отсутствии затрат на оформление заказа

В этой модели принято следующее.

1. Спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода непосредственно после получения заказа.
2. Затраты на размещение заказа отсутствуют.

Рис. 4 иллюстрирует состояние запаса после удовлетворения спроса D. Если D<y, запас y—D хранится на протяжении периода. Если же D > y, возникает дефицит объема D — y.

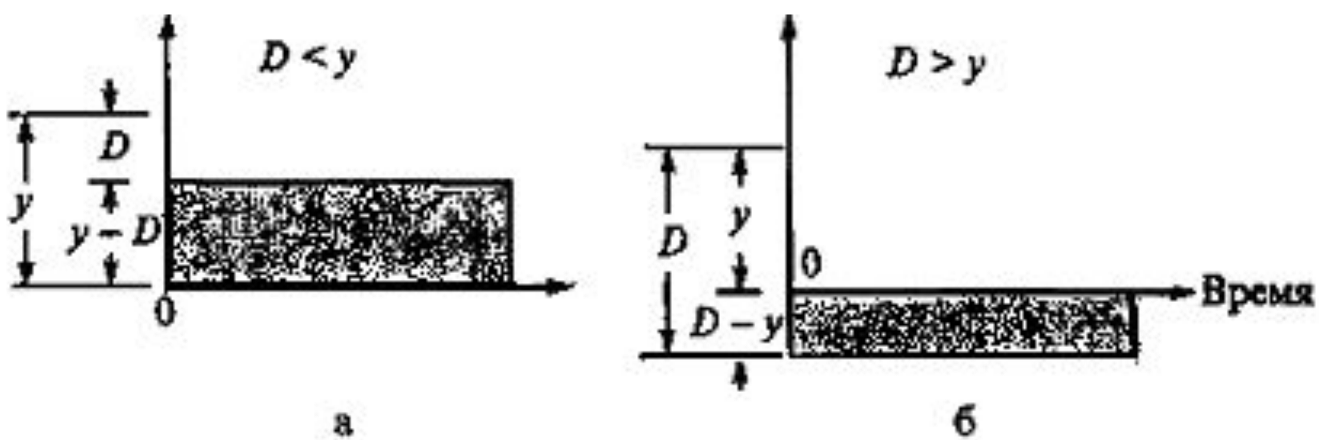


Рис. 4

Ожидаемые затраты M{C(y)} на период выражаются следующей формулой.

$$M\{C(y)\} = c(y-x) + h\int_0^y (y-D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D-y)f(D)dD.$$

Можно показать, что функция *M{C(y)}* является выпуклой по *y* и, таким образом, имеет единственный минимум. Следовательно, вычисляя первую производную функции *M{C(y)}* по *y* и приравнивая ее к нулю, получим

$$c + h\int_0^y f(D)dD - p\int_y^\infty f(D)dD = 0$$

или

$$c = hP\{D \le y\} + p(1 - P\{D \le y\}) = 0.$$

Отсюда имеем

$$P\{D \le y^*\} = \frac{p-c}{p+h}.$$

Правая часть последней формулы известна как **критическое отношение**. Значение y* определено только при условии, что критическое отношение неотрицательно, т.е. $p \ge c$. Случай, когда $p < c$, является бессмысленным, так как это предполагает, что стоимость закупки единицы продукции выше потери от неудовлетворенного спроса.

Ранее предполагалось, что спрос D является непрерывной случайной величиной. Если же D является дискретной величиной, то плотность распределения вероятностей f(D) определена лишь в дискретных точках и функция затрат определяется в соответствии с формулой.

$$M\{C(y)\} = c(y-x) + h\sum_{D=0}^{y}(y-D)f(D) + p\sum_{D=y+1}^{\infty}(D-y)f(D).$$

Необходимыми условиями оптимальности являются неравенства

M{C(y - 1)} ≥ *M{C(y)}* и *M{C(y + 1)}* ≥ *M{C(y)}*.

Эти условия в данном случае являются достаточными, так как функция *M{C(y)}* выпукла. Применение этих условий после некоторых алгебраических преобразований приводит к следующим неравенствам для определения y*.

$$P\{D \le y^* - 1\} \le \frac{p-c}{p+h} \le P\{D \le y^*\}.$$

2.2. Модель при наличии затрат на оформление заказа

Данная модель отличается от выше представленной тем, что учитывается стоимость K размещения заказа. Используя обозначения, введенные выше, получаем следующее выражение для суммарной ожидаемой стоимости.

$$M\left\{\overline{C}(y)\right\} = K + M\left\{C(y)\right\} = K + c(y-x) + h\int_0^y (y-D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D-y)f(D)dD.$$

Как показано в разделе 2.1, оптимальное значение y* должно удовлетворять соотношению

$$P\left\{y \le y^*\right\} = \frac{p-c}{p+h}.$$

Так как К является константой, минимум величины $M\{\overline{C}(y)\}$ также должен достигаться при y*, как показано на рис. 5.

Рис. 5

На рис. 5 S = y* и величина s(< S) определяются из уравнения

$$M\{C(y)\} = M\{\overline{C}(y)\} = K + M\{C(y)\}, s < S.$$

(Отметим, что это уравнение имеет и другое решение s_1 > S, которое не рассматривается.)

Задача формулируется следующим образом. Какое количество продукции необходимо заказывать, если наличный запас перед размещением заказа составляет x единиц? Ответ на этот вопрос рассматривается по отдельности при выполнении следующих условий.

1. $x<s$.
2. $s \le x \le S$.
3. $x>S$.

Случай 1 (x < s). Так как в наличии имеется x единиц продукции, соответствующие издержки содержания запаса составляют $M\{C(x)\}$. Если заказывается любое дополнительное количество продукции y ($y > x$), то соответствующие затраты при заданной величине y равны величине $M\{C(y)\}$, которая учитывает стоимость K размещения заказа. Из рис. 5 следует, что

$$\min_{y>x} M\left\{\overline{C}(y)\right\} = M\left\{\overline{C}(S)\right\} < M\left\{C(x)\right\}.$$

Следовательно, оптимальной стратегией управления запасами в этом случае будет заказ в $S - x$ единиц.

Случай 2 (s≤x≤S). Из рис. 5 видно, что

$$\mathrm{M}\{\mathrm{C}(\mathrm{x})\} \le \min_{y>x} M\{\overline{C}(y)\} = M\{\overline{C}(S)\}.$$

Следовательно, в данном случае дополнительных затрат не возникает, если новый заказ *не размещается*. Поэтому y* =x.

Случай 3 (x> S). Из рис. 5 видно, что при y > x

$$\mathrm{M}\{\mathrm{C}(\mathrm{x})\} \le M\{\overline{C}(y)\}.$$

Это неравенство показывает, что в данном случае экономнее будет не размещать заказ, т.е. y*=x.

Описанная стратегия управления запасами, часто именуемая ***(s-S)-стратегией***, определяется следующим правилом.

Если x < s, делать заказ объемом S - x,

если x ≥ s, заказывать не следует.

(Оптимальность (s-S)-стратегии следует из того, что соответствующая функция затрат является выпуклой. Если это свойство не выполняется, данная стратегия перестает быть оптимальной.)

3. Многоэтапные модели

Рассматривается многоэтапная модель в предположении, что не учитывается стоимость размещения заказа. Кроме того, в модели предусматривается возможность задолженности и нулевое время поставки. Предполагается также, что спрос D в каждый период описывается стационарной (независящей от времени) плотностью вероятности f(D).

В многоэтапной модели учитывается приведенная стоимость денег. Если α (< 1) – коэффициент дисконтирования (процент скидки) для одного этапа, то сумма A спустя n этапов будет эквивалентна сумме $\alpha^n A$ в настоящий момент.

Предположим, что горизонт планирования охватывает n этапов и неудовлетворенный спрос может оставаться таковым лишь на протяжении одного этапа. Пусть $F_i(x_i)$ — максимальная суммарная ожидаемая прибыль для этапов от i до n, определенная при условии, что x_i — уровень имеющегося запаса перед размещением заказа на i-м этапе.

Используя обозначения из раздела 2 и предполагая, что r — удельный доход от реализации единицы продукции, сформулируем задачу управления запасами в виде следующей задачи динамического программирования.

$$F_i(x_i) = \max_{y_i \ge x_i}\{-c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i}[rD - h(y_i - D)]f(D)dD +$$

$$+\int_{y_i}^{\infty}[ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)]f(D)dD +$$

$$+\alpha\int_0^{\infty}F_{i+1}(y_i - D)f(D)dD\}, i = 1,2,\ldots, n.$$

где $F_{n+1}(y_n - D) \equiv 0$. Величина x_i может принимать отрицательные значения, так как неудовлетворенный спрос может накапливаться. Величина $\alpha r(D-y_i)$ включена во второй интеграл, поскольку $D-y_i$ представляет собой неудовлетворенный спрос на i-м этапе, который должен быть удовлетворен на этапе i+1 .

Задачу можно решить рекуррентно методами динамического программирования. Если число этапов является бесконечным (бесконечный горизонт планирования), приведенное выше рекуррентное уравнение сводится к следующему.

$$F(x) = \max_{y \ge x}\{-c(y-x) + \int_0^y [rD - h(y-D)] f(D)dD +$$

$$+ \int_y^\infty [ry + \alpha r(D-y) - p(D-y)] f(D)dD +$$

$$+ \alpha \int_0^\infty F(y-D) f(D)dD\},$$

где x и y представляют собой уровни запаса на каждом этапе до и после получения заказа соответственно.

Оптимальное значение y можно определить из приведенного ниже необходимого условия, которое в данном случае есть также достаточным, так как функция ожидаемой прибыли F(x) является вогнутой.

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = -c - h\int_0^y f(D)dD + \int_y^\infty [(1-\alpha)r + p] f(D)dD + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial F(y-D)}{\partial y} f(D)dD = 0.$$

Величина $\dfrac{\partial F(y-D)}{\partial y}$

определяется следующим образом. Если на начало следующего этапа уровень запаса еще составляет β (> 0) единиц, то прибыль на этом этапе возрастает на величину cβ, так как объем последующего заказа уменьшается именно на эту величину. Это означает, что

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y} = c.$$

Следовательно, необходимое условие принимает вид

$$-c - h\int_0^y f(D)dD + [(1-\alpha)r + p]\left(1 - \int_0^y f(D)dD\right) + \alpha c\int_0^\infty f(D)dD = 0.$$

Поэтому оптимальный уровень заказа y* определяется из уравнения

$$\int_0^{y^*} f(D)dD = \frac{p + (1-\alpha)(r-c)}{p + h + (1-\alpha)r}.$$

Оптимальная стратегия каждого этапа при заданном исходном запасе x выражается следующим правилом.

Если x < y*, делать заказ объемом y* - x,

если x ≥ y*, заказа не делать.

4. Заключение

В моделях управления запасами спрос является случайным. Предложен широкий спектр методов решения построенных моделей — от вероятностной (рандомизированной) версии детерминированной модели экономичного размера заказа до более сложных, связанных с применением методов динамического программирования.

Литература

Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами.— М: Наука, 1969.)

Кофман А. Методы и модели исследования операций. — М.: Мир, 1966.

Основные соотношения СМО

В теории МО обычно рассматривается один параметр – время. Базовый случайный процесс – пуассоновский.

Распределение Пуассона $$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

где $P_n(t)$ – вероятность того, что за промежуток t поступит n требований.

Свойства:

$e^{-\lambda t}$ - вероятность отсутствия требований в интервале t;

$\lambda t(e^{-\lambda t})$ - вероятность поступления одного требования за время t;

следовательно вероятность поступления за время t более одного требования

$$1-(e^{-\lambda t}+\lambda t e^{-\lambda t}) = 1-\left\{[1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}-...]+\lambda t[1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}-...]\right\} = \frac{(\lambda t)^2}{2}+... = o(t^2)$$

т.е. функция, которая ведет себя как t^2.

Отсюда следует, что при малых t, все члены с t^2 - пренебрежимо малы.

При малых t вероятность наступления более одного требования пренебрежимо мала

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

(1) - исходные выражения для пуассоновского распределения

Рассмотрим стационарный режим. Понятие стационарного состояния классически поясняется в решении двух задач МО:

- модель Эрланга (изменение $P_n(t)$ в зависимости от t описывается $P_n^{/}(t)$, т.е. $P_n^{/}(t) = 0$);

- формула Поллачека- Хинчина (из рассмотрения $\lim_{t\to\infty} P_n(t)$, что также приводит к $P_n(t)$, не зависящим от t.

Модель Эрланга

Допущения:

-процесс начинается при отсутствии требований в очереди;
- СМО с пуассоновским входящим потоком с параметром λ;
- экспоненциальное время обслуживания с параметром μ;
- дисциплина очереди FIFO.

Исходные уравнения

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-(\lambda+\mu)\Delta t] + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+1}(t)\mu\Delta t, n \geq 1$$
$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t. \qquad (2)$$

Замечание: член, содержащий $(\Delta t)^2$ опускается. Поэтому, например, выражение (1-λΔt)(1-μΔt) (за время Δt в систему не поступит и не покинет ни одно требование) преобразуется в 1-(λ+μ)Δt.

Перенесем $P_n(t)$ в левую часть и при $\Delta t \to 0$ имеем

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), n \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad (3)$$

Исследуем стационарное состояние, приравняв производные по времени к нулю.

Введем понятие загрузки системы **α = λ/μ**.

Если **λ/μ ≥1**, то число ожидающих требований растет неограниченно и стационарный режим не устанавливается .

Для стационарного состояния при **λ/μ <1** найдем выражения для :

- математического ожидания числа требований, находящихся в очереди;

- среднего времени ожидания.

Приравняв к нулю производные в (3), получим:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n \geq 1 \\
&\lambda P_0 = \mu P_1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Учитывая, что $\alpha=\lambda/\mu$ преобразуем (4)

$$
\begin{aligned}
&(1+\alpha)P_n = P_{n+1} + \alpha P_{n-1}, n \geq 1 \\
&P_1 = \alpha P_0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Пусть в первом уравнении системы (5) n=1. Тогда $\mathbf{(1+\alpha)P_1=P_2+\alpha P_0}$ и, учитывая, что $\mathbf{P_1=\alpha P_0}$, имеем $\mathbf{P_2=\alpha^2 P_0}$.

Повторяя этот процесс, получаем $\mathbf{P_n=\alpha^n P_0}$. (6)

Напомним, что $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_0 = 1$ или

$\sum_{n=0}^{\infty} P_0 \alpha^n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{P_0}{1-\alpha} = 1$, откуда $\mathbf{P_0=1-\alpha}$ и $\mathbf{P_n=\alpha^n(1-\alpha)}$ (7)

Выражение (7) представляет собой геометрическое распределение.

Математическое ожидание (L) числа требований, находящихся в системе (с учетом (7))

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad (8)$$

Математическое ожидание числа требований, находящихся в очереди

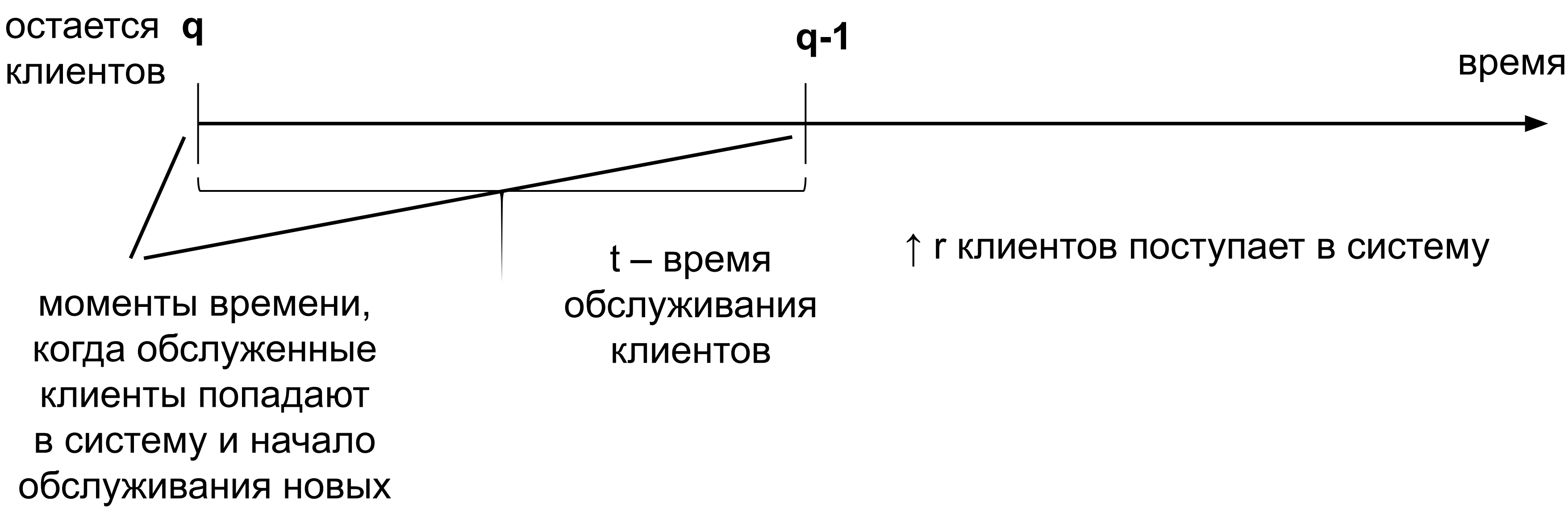
$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - \alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha} - \alpha = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \qquad (9)$$

Формула Поллачека-Хинчина

Рассматривается одноканальная СМО, находящаяся в стационарном режиме с входным пуассоновским случайным процессом с параметром λ.

Время обслуживания имеет произвольное распределение с интенсивностью μ клиентов в ед. времени. Дисциплина очереди FIFO.

Анализируем стационарный режим при $\lambda/\mu < 1$; $t \to \infty$.



$$q^{/} = \max(q-1,0)+r = q-1+\delta+r, \quad \delta(q)=\begin{cases} 0, & \text{если } q>0 \\ 1, & \text{если } q=1 \end{cases}$$

«δ» вводится, чтобы не использовать символ max.

Возьмем мат. ожидание от этих величин

$E[q'] = E[q] – E[1] + E[\delta] + E[r]$, т.к. $E[q'] = E[q]$, то $E[\delta] = 1 - E[r]$.

Если длительность обслуживания равна t, то

$$E[r] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$E[r^2] = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Усреднив по распределению времени обслуживания t ($t = 1/\mu$), получим
$E[r] = \lambda/\mu = \alpha$.

Если время обслуживания имеет экспоненциальное распределение, то

$$E[r] = \mu \int_0^{\infty} (\lambda t) e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha$$

В результате анализа и преобразований, получим формулу Поллачека-Хинчина

$$\boxed{E[q] = \alpha + \frac{\alpha^2 + \lambda^2 \sigma^2(t)}{2(1-\alpha)}}$$

- это среднее число требований в системе.