

# Теоремы синусов и косинусов.

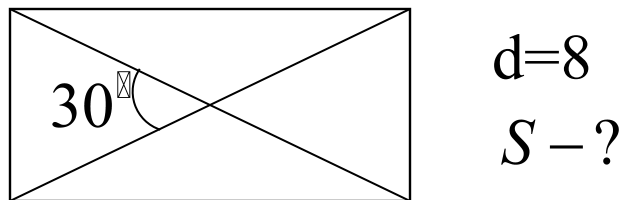
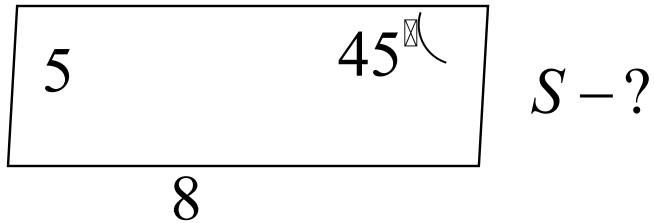
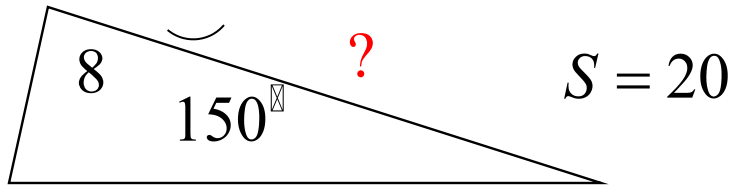


## ГЕОМЕТРИЯ, 9 КЛАСС.

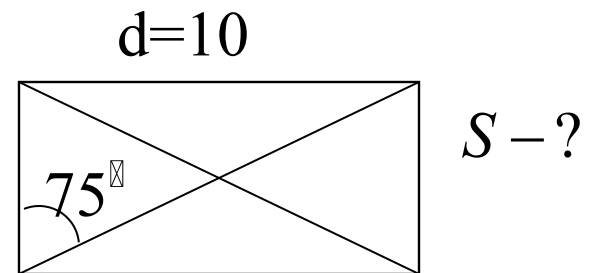
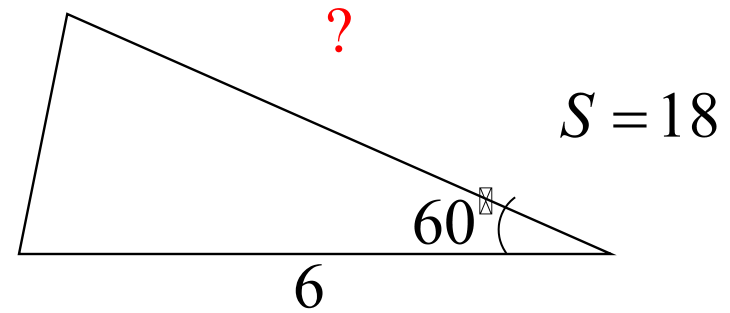
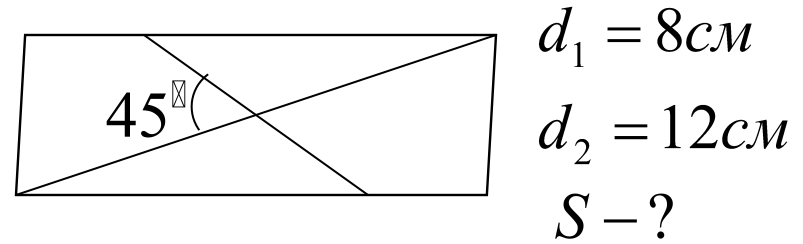
Борисова Елена Леонидовна,  
учитель математики  
МОУ Левобережная средняя  
школа г.Тутаева

# Самостоятельная работа:

1 вариант:

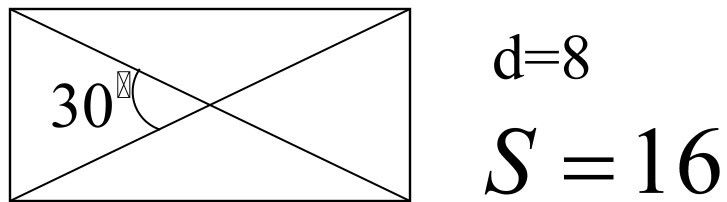
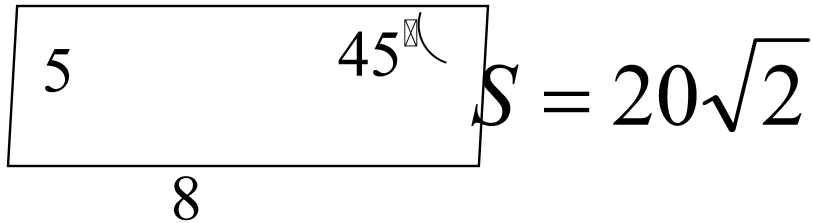
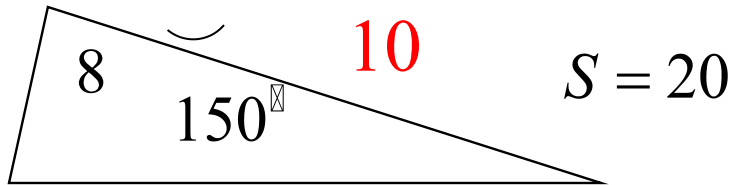


2 вариант:

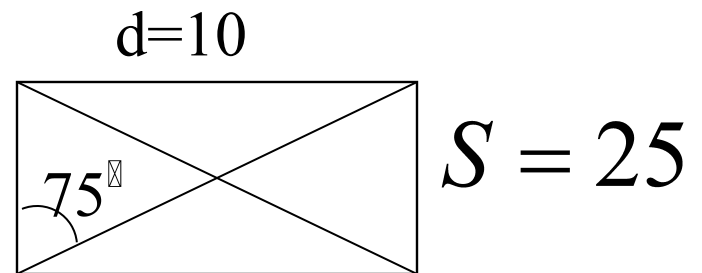
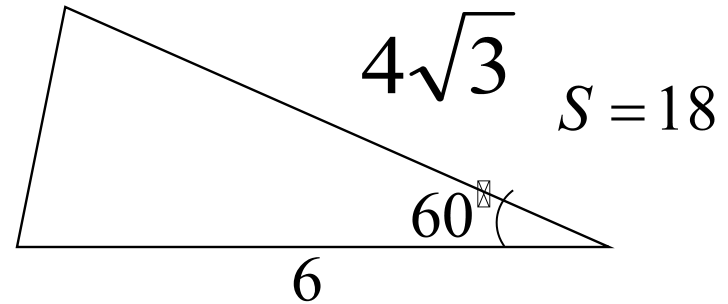
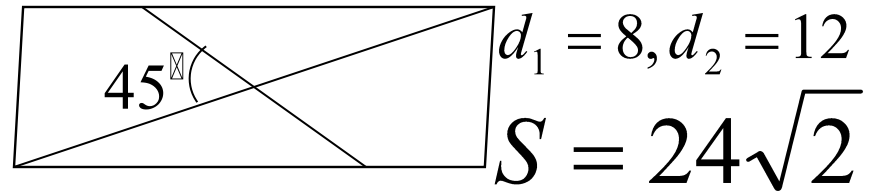


# Проверь ответы:

1 вариант:



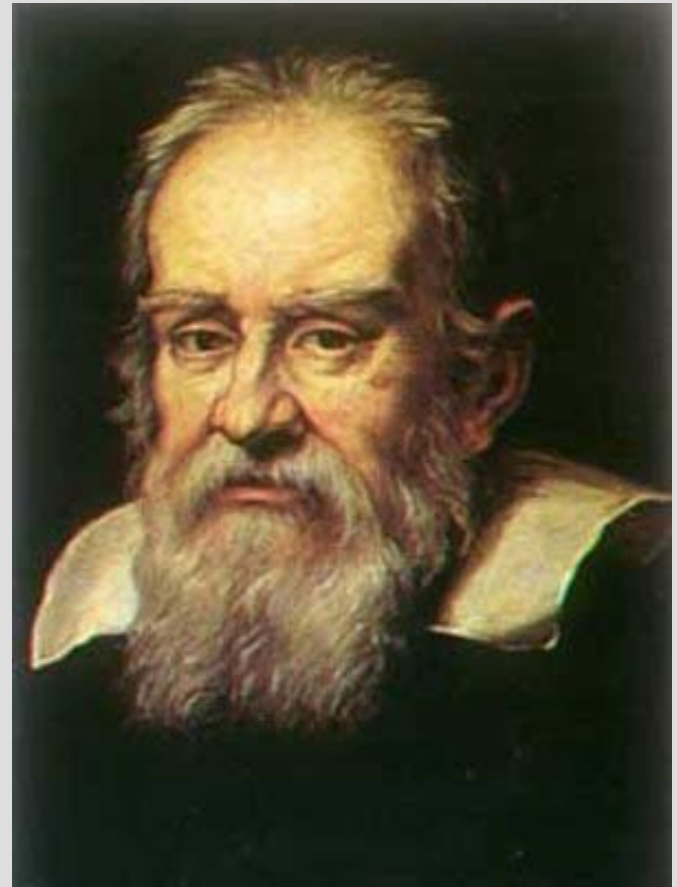
2 вариант:



# ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.



- Утверждения, обобщающие теорему Пифагора и эквивалентные теореме косинусов, были сформулированы отдельно для случаев острого и тупого угла в 12 и 13 предложениях II книги «Начал» Евклида.



# ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Утверждения, эквивалентные теореме косинусов для сферического треугольника, применялись в сочинениях математиков стран Средней Азии. Теорему косинусов для сферического треугольника в привычном нам виде сформулировал Региомонтан, назвав её «теоремой Альбатегния» (по имени ал-Баттани).



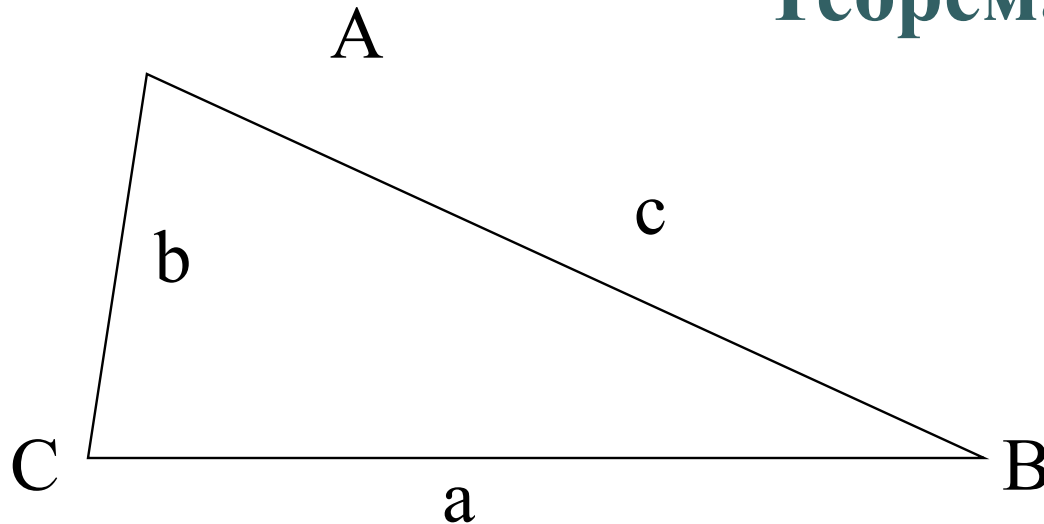
Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).  
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

# ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- В Европе теорему косинусов популяризовал Франсуа Виет в XVI столетии. В начале XIX столетия её стали записывать в принятых по сей день алгебраических обозначениях.



## Теорема косинусов:



Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ПРИМЕР 1. Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равна 9, катет  $BC = 3$ . На гипотенузе взята точка  $M$ , причем  $AM : MB = 1 : 2$ . Найдите  $CM$ .

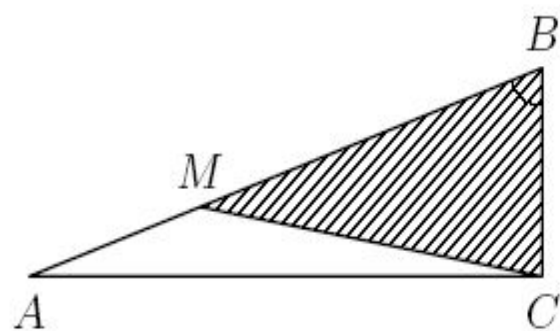


Рис. 71

РЕШЕНИЕ. Из прямоугольного треугольника  $ABC$  (рис. 71) находим, что  $\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$ . В треугольнике  $BCM$  известны стороны  $BC = 3$ ,  $BM = 6$  и косинус угла между ними. По теореме косинусов

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos \angle B = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 33.$$

Следовательно,  $CM = \sqrt{33}$ .

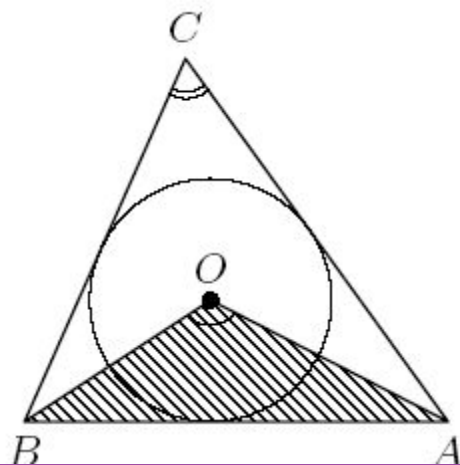


ПРИМЕР 2. Точка  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Известно, что  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle AOB = 120^\circ$ . Найдите сторону  $AB$ .

РЕШЕНИЕ. Поскольку  $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$  (см. задачу **1.116<sup>0</sup>**), то  $\angle C = 2\angle AOB - 180^\circ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$  (рис. 72). По теореме косинусов

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle C = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab. \end{aligned}$$

Следовательно,  $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ .



# ТЕОРЕМА СИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

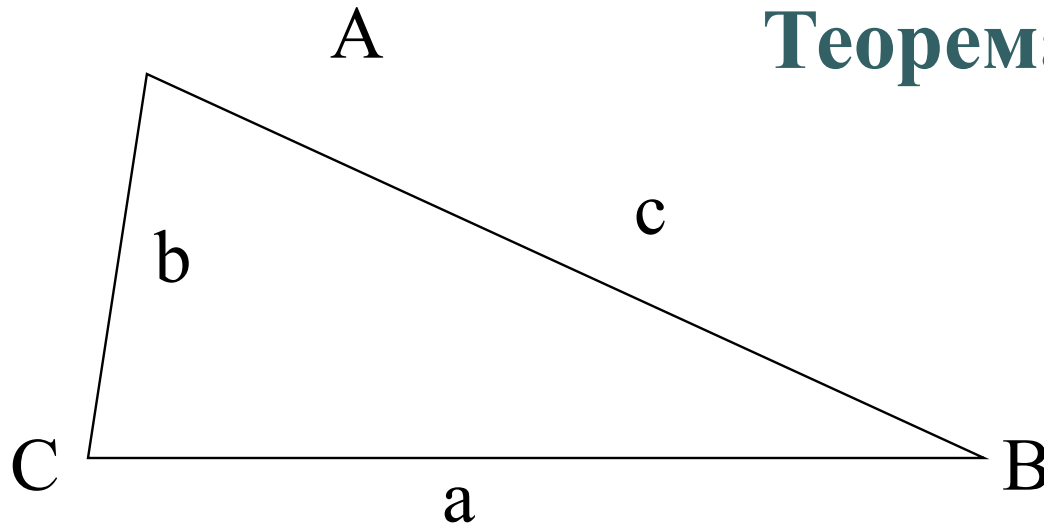


- Самое древнее доказательство для теоремы синусов на плоскости описано в книге Насир ад-Дин Ат-Туси «Трактат о полном четырёхстороннике» написанной в XIII веке. Теорема синусов для сферического треугольника была доказана математиками средневекового Востока ещё в X веке. В труде Ал-Джайяни XI века «Книга о неизвестных дугах сферы» приводилось общее доказательство теоремы синусов на сфере



Насир ад-Дин Ат-Туси

## Теорема синусов:



Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

# ТЕОРЕМА СИНУСОВ



- **Замечание:** Можно доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами  $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $CA=b$  имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

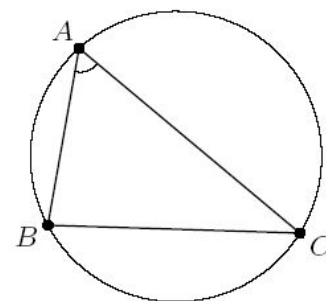
- Где  $R$  – радиус описанной окружности.

ПРИМЕР 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным  $60^\circ$ .

РЕШЕНИЕ. Пусть  $ABC$  — треугольник, в котором  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $R$  — искомый радиус описанной окружности (рис. 74). По теореме косинусов

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} = \\ &= \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Следовательно,  $R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ .



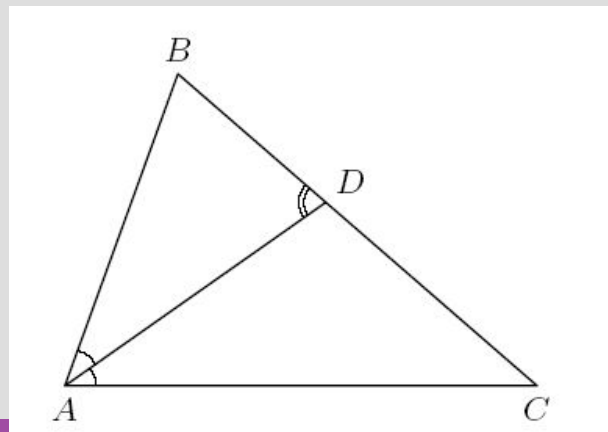
ПРИМЕР 2. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \beta$ ,  $AB = a$ ;  $AD$  — биссектриса. Найдите  $BD$ .

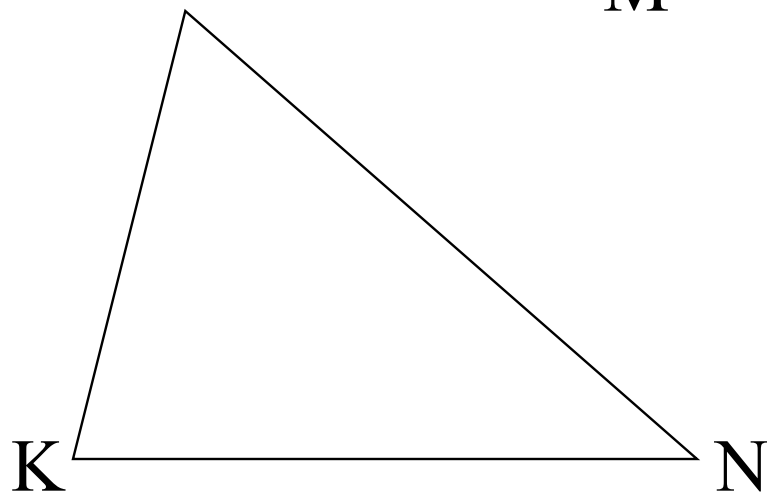
РЕШЕНИЕ. Угол  $BDA$  — внешний угол треугольника  $ADC$  (рис. 75), поэтому  $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \frac{\alpha}{2} + \beta$ . По теореме синусов из треугольника  $ADB$  находим, что

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin(\alpha/2 + \beta)} = \frac{BD}{\sin(\alpha/2)},$$

откуда

$$BD = \frac{a \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2 + \beta)}.$$



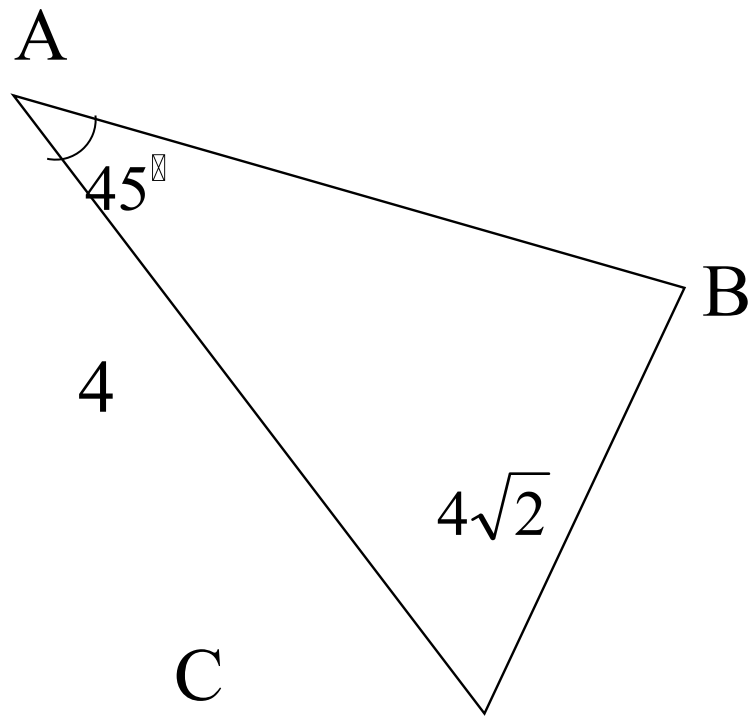


М 1) Запишите теорему синусов для данного треугольника:

$$\frac{MN}{\sin K} = \frac{NK}{\sin M} = \frac{KM}{\sin N}$$

2) Запишите теорему косинусов для вычисления стороны МК:

$$MK^2 = NM^2 + NK^2 - 2NM \cdot NK \cos N$$



Найдите угол B.

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

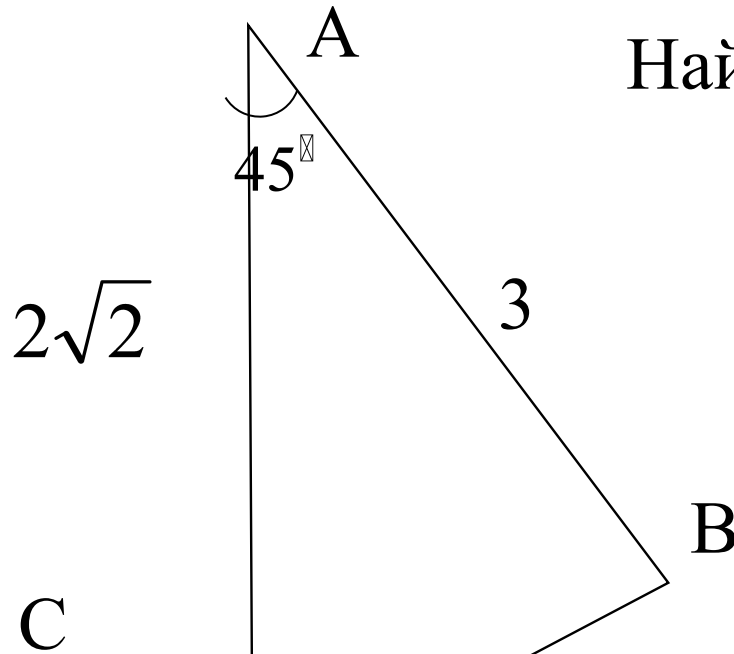
$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC}$$

$$\sin B = \frac{4 \sin 45^\circ}{4\sqrt{2}}$$

$$\sin B = \frac{1}{2} \rightarrow \angle B = 30^\circ$$



Найдите длину стороны BC.

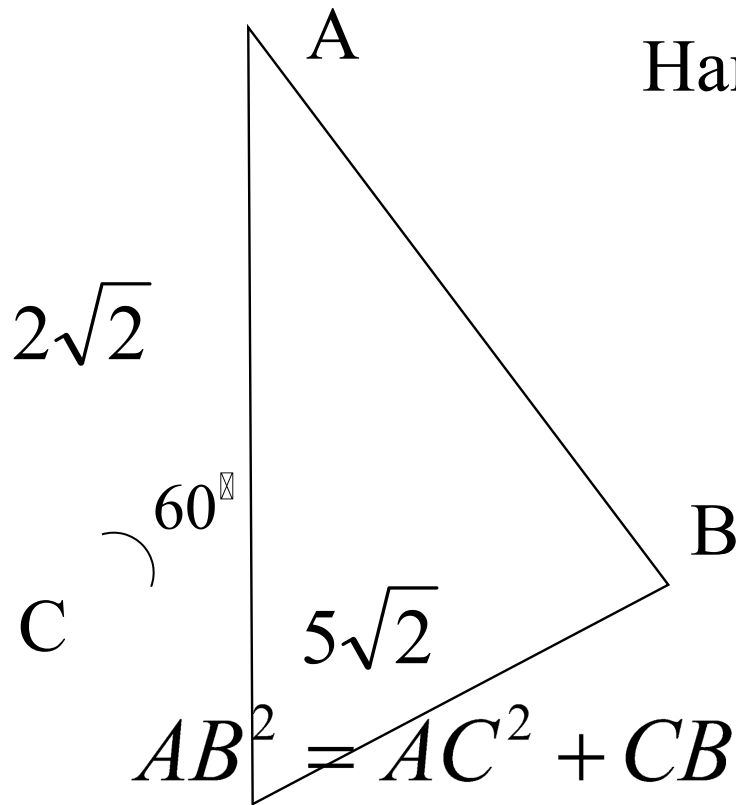


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A$$

$$BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$BC^2 = 5 \rightarrow BC = \sqrt{5}$$

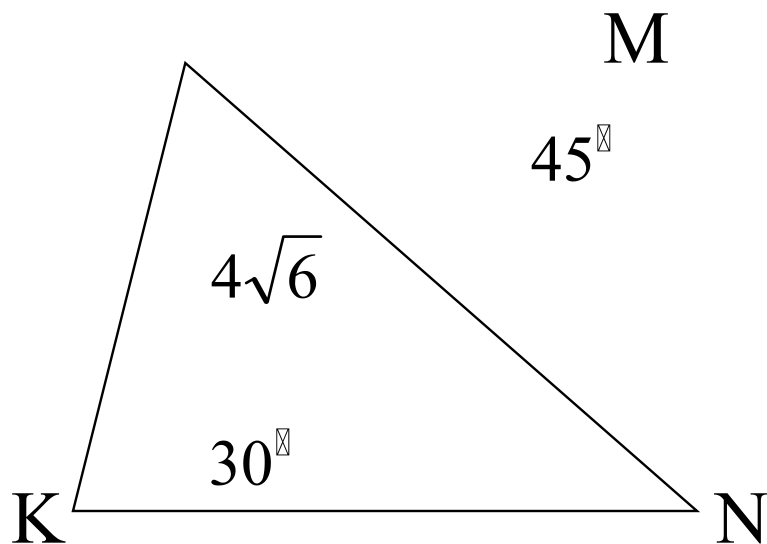
Найдите длину стороны АВ.



$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cos C$$

$$BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 38 \rightarrow BC = \sqrt{38}$$



$$\angle M = 45^\circ, \angle K = 30^\circ,$$

$$KN = 4\sqrt{6}$$

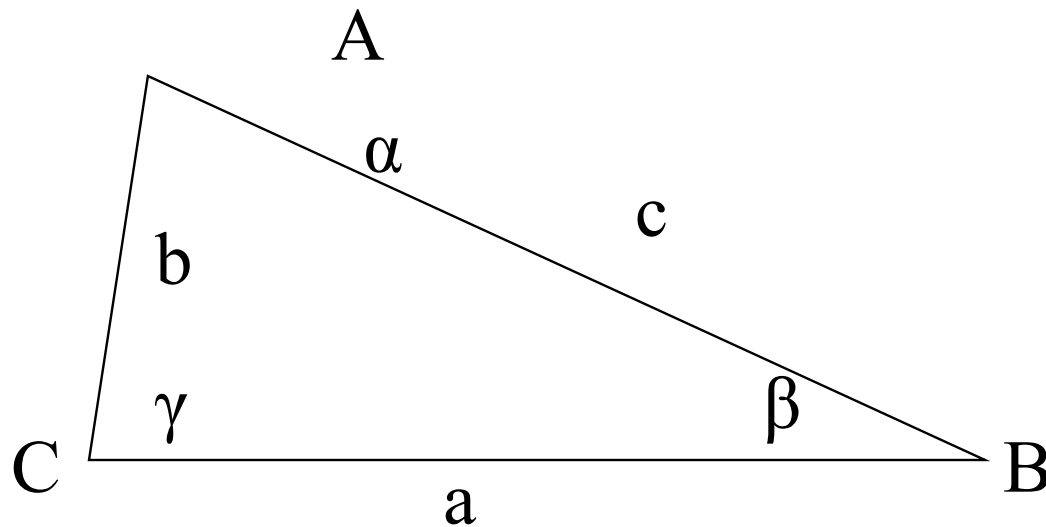
Найдите MN.

$$\frac{MN}{\sin K} = \frac{KN}{\sin M}$$

$$MN = \frac{4\sqrt{6} \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$MN = \frac{KN \sin K}{\sin M}$$

$$MN = 4\sqrt{3}$$



Запишите формулу для вычисления:

~~AC, если AB = a, AC = b, BC = c.~~

$$BC \cos \angle C = a \cos \alpha$$

$$BC \cos \angle B = c \cos \beta$$

$$BC \cos \angle A = b \cos \alpha$$

# Используемые источники:



- <http://ppt4web.ru/geometrija/teoremy-sinusov-i-kosinusovo.html>
- <http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2014/10/15/teorema-sinusov-i-kosinusov>
- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/14/Johannes\\_Regiomontanus2.jpg/500px-Johannes\\_Regiomontanus2.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/14/Johannes_Regiomontanus2.jpg/500px-Johannes_Regiomontanus2.jpg)
- [http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/10/110/217/110217775\\_Nesreddi\\_tusi.jpg](http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/10/110/217/110217775_Nesreddi_tusi.jpg)
- <http://www.biografguru.ru/about/evklid/?q=3117>