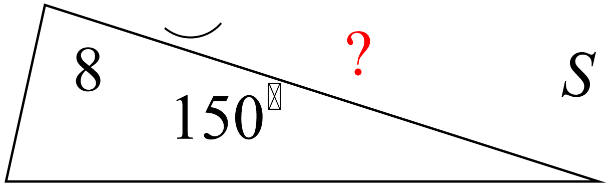
Теоремы синусов и косинусов.

ГЕОМЕТРИЯ, 9 КЛАСС.

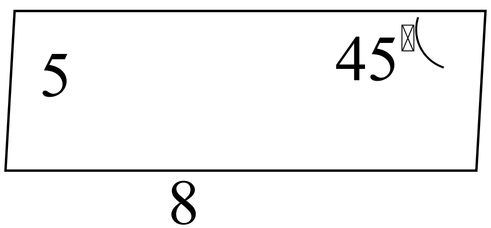
Борисова Елена Леонидовна,
учитель математики
МОУ Левобережная средняя
школа г.Тутаева

Самостоятельная работа:

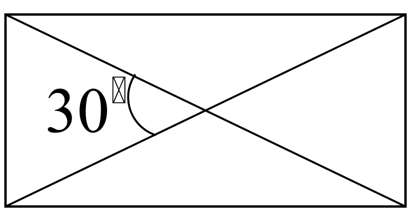
1 вариант:



$S = 20$



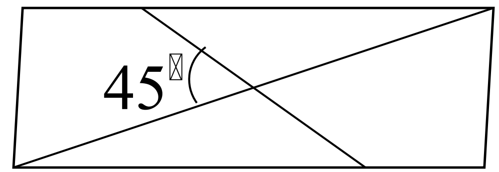
$S - ?$



d=8

$S - ?$

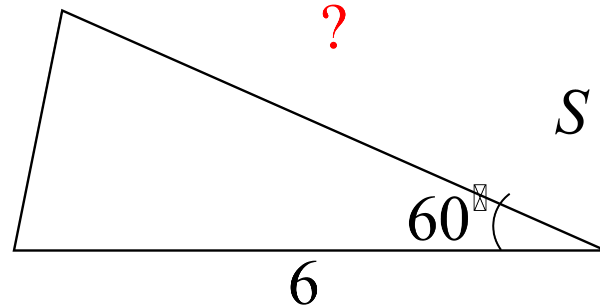
2 вариант:



$d_1 = 8см$

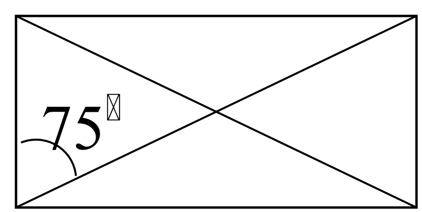
$d_2 = 12см$

$S - ?$



$S = 18$

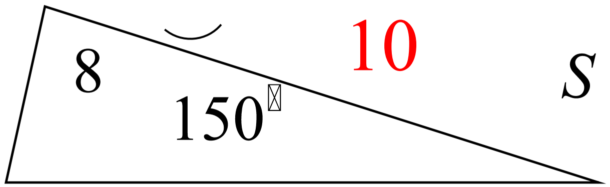
d=10



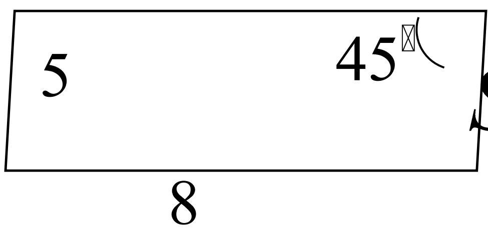
$S - ?$

Проверь ответы:

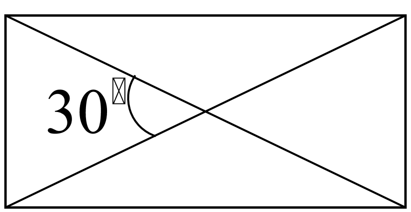
1 вариант:



$S = 20$



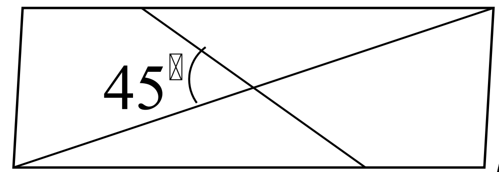
$S = 20\sqrt{2}$



d=8

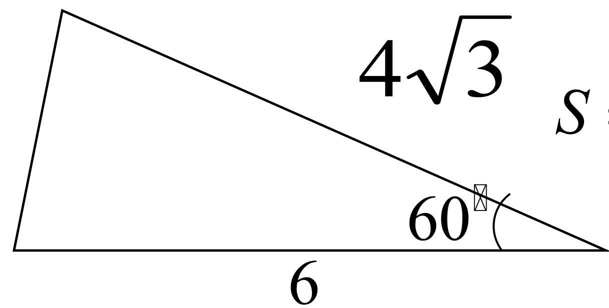
$S = 16$

2 вариант:



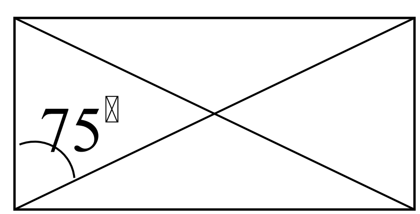
$d_1 = 8, d_2 = 12$

$S = 24\sqrt{2}$



$S = 18$

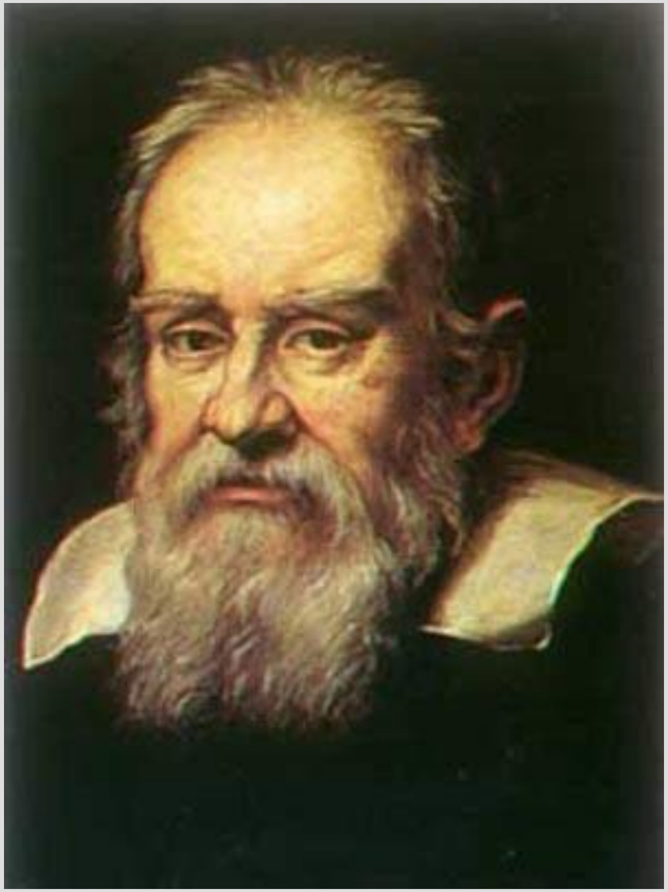
d=10



$S = 25$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Утверждения, обобщающие теорему Пифагора и эквивалентные теореме косинусов, были сформулированы отдельно для случаев острого и тупого угла в 12 и 13 предложениях II книги «Начал» Евклида.



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

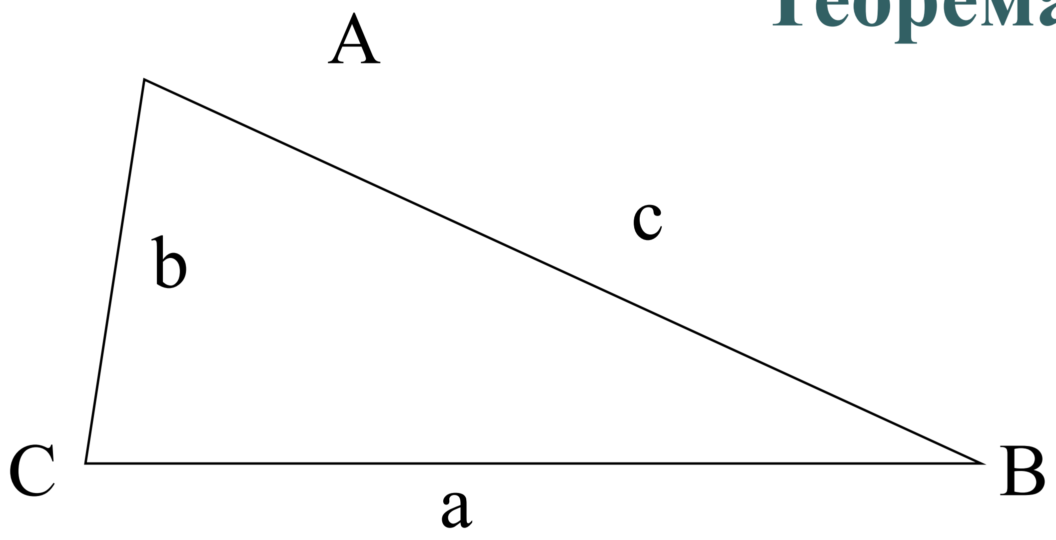
- Утверждения, эквивалентные теореме косинусов для сферического треугольника, применялись в сочинениях математиков стран Средней Азии. Теорему косинусов для сферического треугольника в привычном нам виде сформулировал Региомонтан, назвав её «теоремой Альбатегния» (по имени ал-Баттани).


Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- В Европе теорему косинусов популяризовал Франсуа Виет в XVI столетии. В начале XIX столетия её стали записывать в принятых по сей день алгебраических обозначениях.

Теорема косинусов:



Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Пример 1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M, причем $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM.

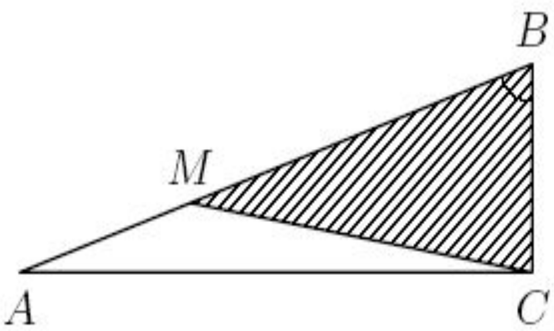


Рис. 71

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC (рис. 71) находим, что $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. В треугольнике BMC известны стороны $BC = 3$, $BM = 6$ и косинус угла между ними. По теореме косинусов

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos\angle B = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 33.$$

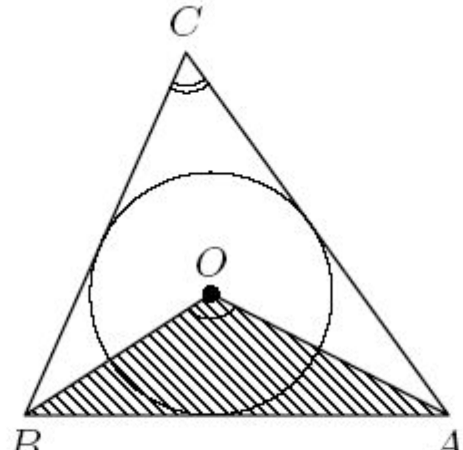
Следовательно, $CM = \sqrt{33}$.

Пример 2. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

Решение. Поскольку $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу **1.116⁰**), то $\angle C = 2\angle AOB - 180° = 240° - 180° = 60°$ (рис. 72). По теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab.$$

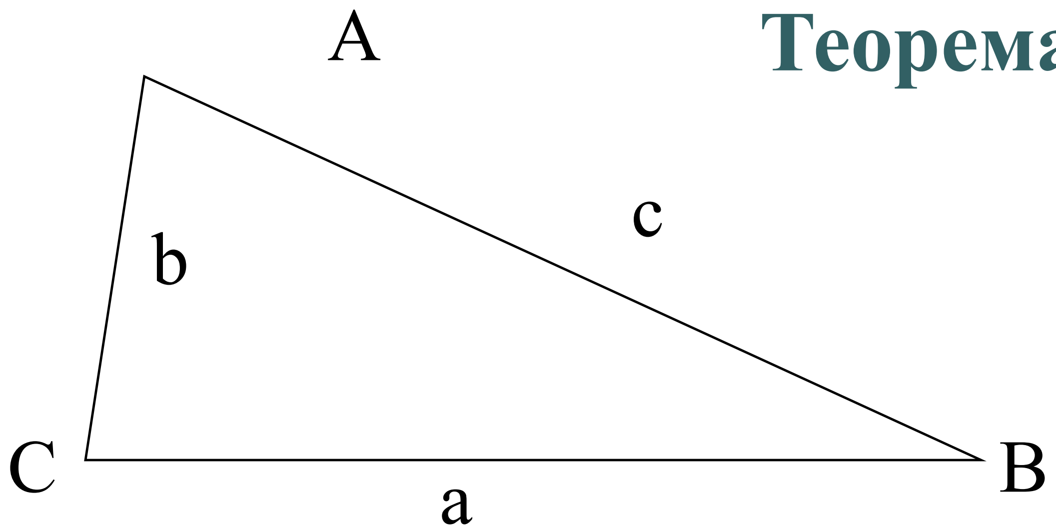
Следовательно, $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.



ТЕОРЕМА СИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Самое древнее доказательство для теоремы синусов на плоскости описано в книге Насир ад-Дин Ат-Туси «Трактат о полном четырёхстороннике» написанной в XIII веке. Теорема синусов для сферического треугольника была доказана математиками средневекового Востока ещё в X веке. В труде Ал-Джайяни XI века «Книга о неизвестных дугах сферы» приводилось общее доказательство теоремы синусов на сфере

Насир ад-Дин Ат-Туси



Теорема синусов:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

- **Замечание:** Можно доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами AB=c, BC=a, CA=b имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

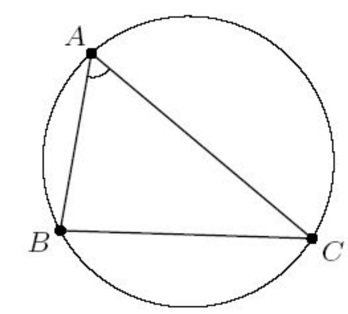
- Где R – радиус описанной окружности.

Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным $60°$.

Решение. Пусть ABC — треугольник, в котором $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60°$, R — искомый радиус описанной окружности (рис. 74). По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

Следовательно, $R = \dfrac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.



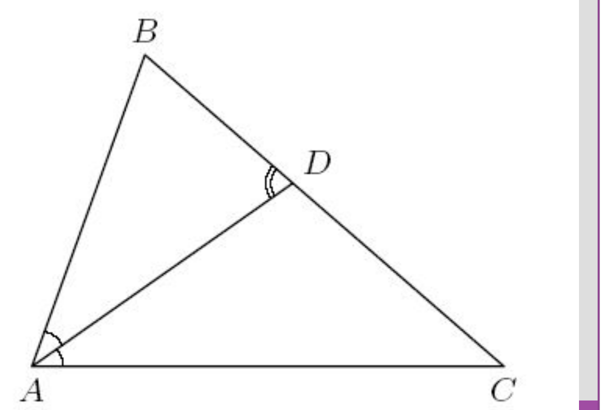
Пример 2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD.

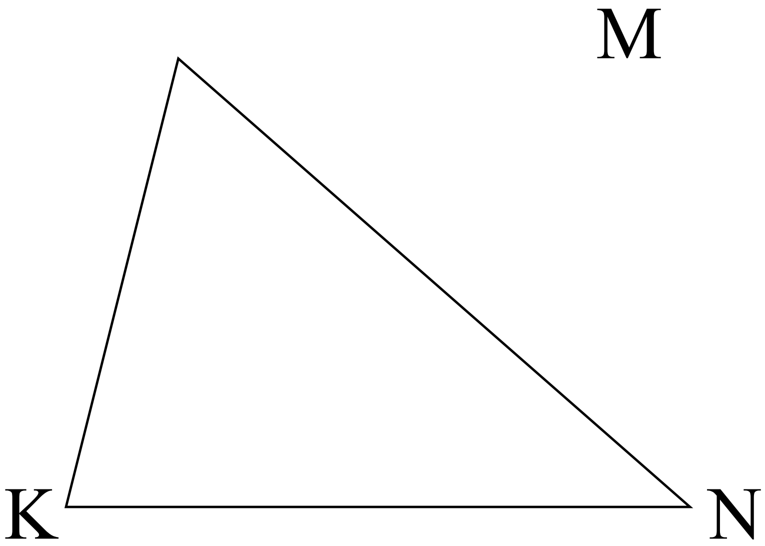
Решение. Угол BDA — внешний угол треугольника ADC (рис. 75), поэтому $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \frac{\alpha}{2} + \beta$. По теореме синусов из треугольника ADB находим, что

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin(\alpha/2 + \beta)} = \frac{BD}{\sin(\alpha/2)},$$

откуда

$$BD = \frac{a \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2 + \beta)}.$$



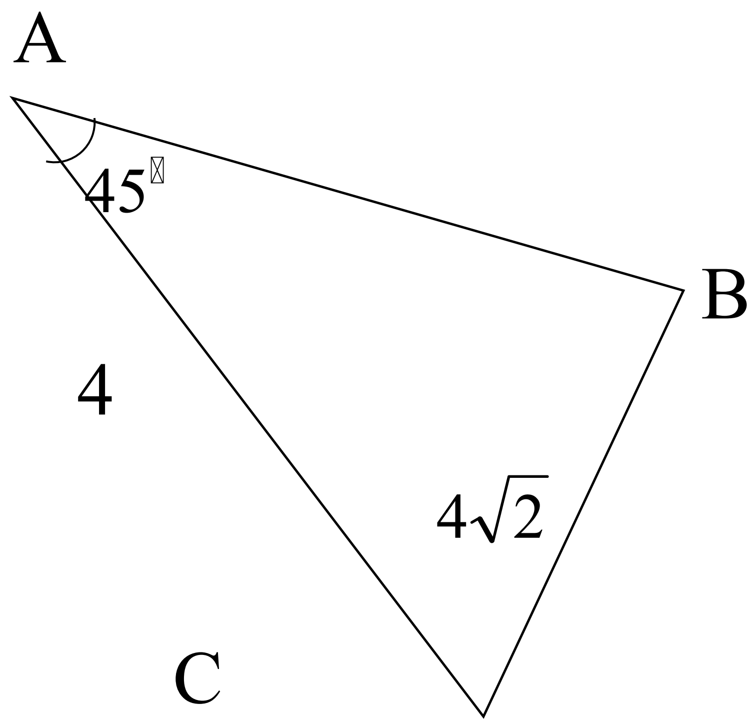


1) Запишите теорему синусов для данного треугольника:

$$\frac{MN}{\sin K} = \frac{NK}{\sin M} = \frac{KM}{\sin N}$$

2) Запишите теорему косинусов для вычисления стороны МК:

$$MK^2 = NM^2 + NK^2 - 2NM \cdot NK \cos N$$



Найдите угол B.

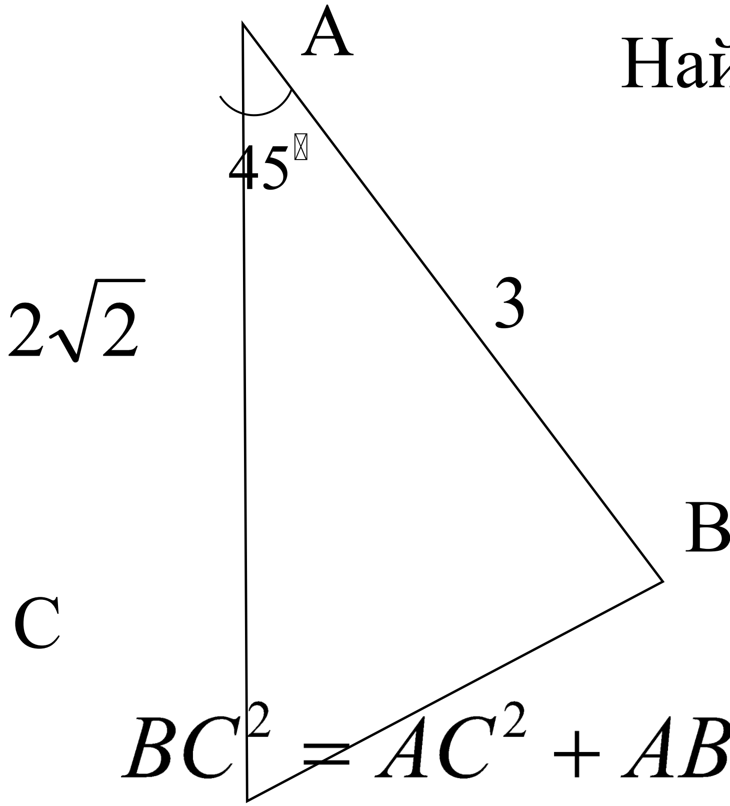
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC}$$

$$\sin B = \frac{4 \sin 45^\circ}{4\sqrt{2}}$$

$$\sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 30^\circ$$

Найдите длину стороны ВС.

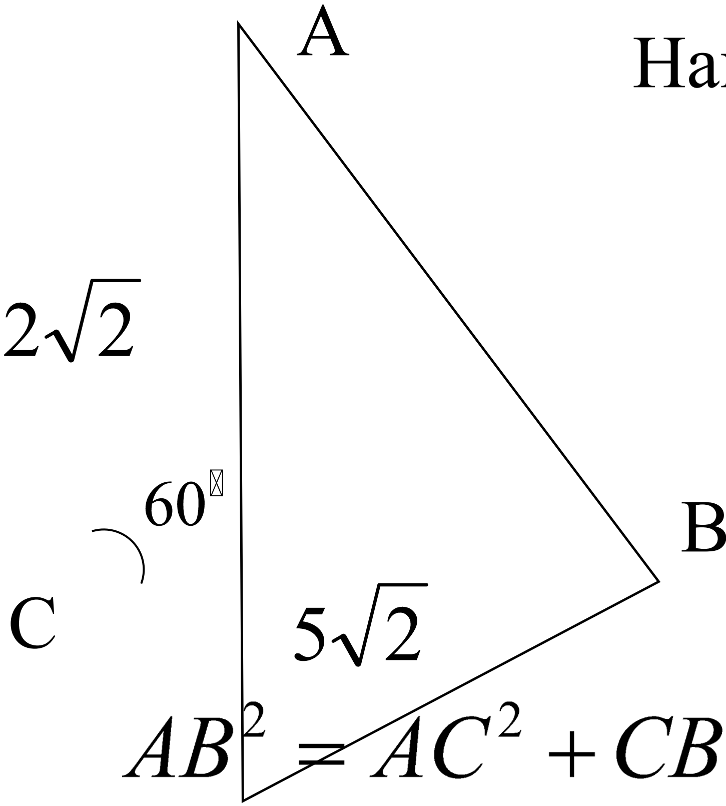


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A$$

$$BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$BC^2 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5}$$

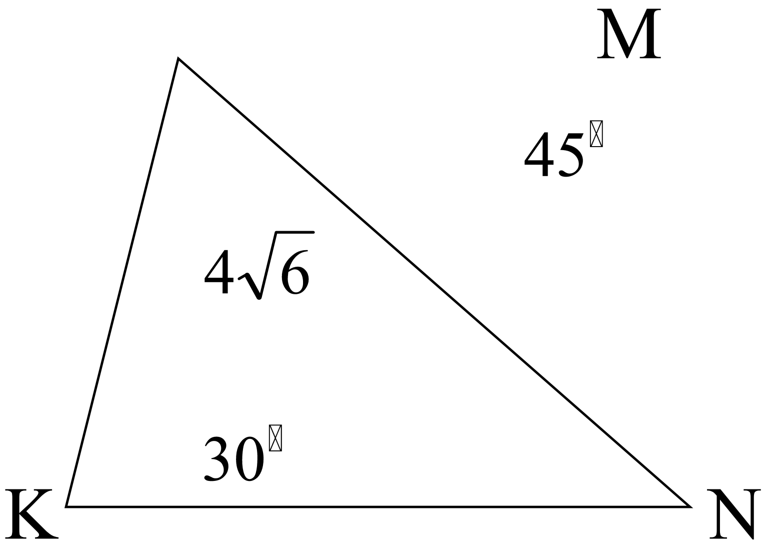
Найдите длину стороны AB.



$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cos C$$

$$BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 38 \Rightarrow BC = \sqrt{38}$$



$\angle M = 45^\circ, \angle K = 30^\circ,$

$KN = 4\sqrt{6}$

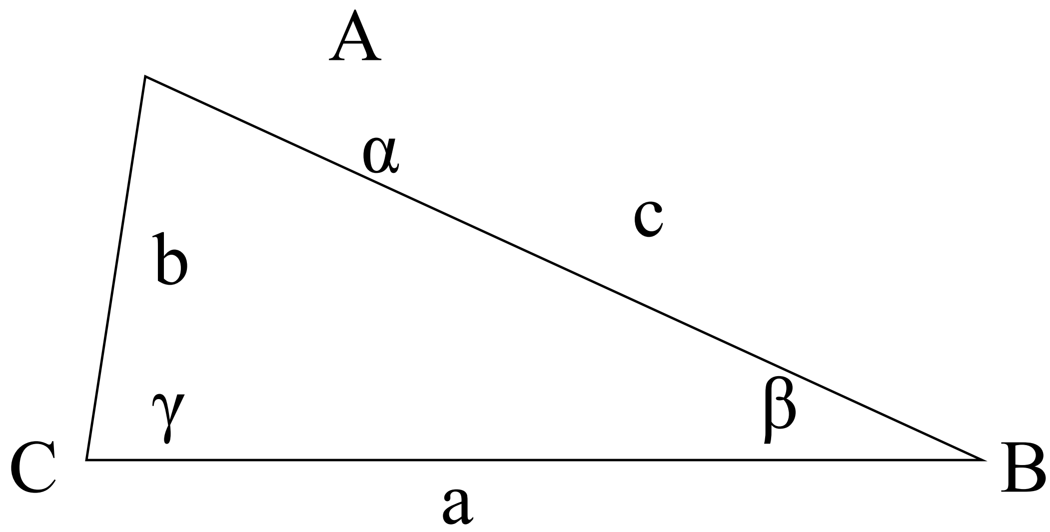
Найдите MN.

$$\frac{MN}{\sin K} = \frac{KN}{\sin M}$$

$$MN = \frac{4\sqrt{6}\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$MN = \frac{KN \sin K}{\sin M}$$

$$MN = 4\sqrt{3}$$



Запишите формулу для вычисления:

AB, если $\angle C = \gamma$, $\angle B = \beta$, $AC = b$.

BC, если $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$

$\angle C$, если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$

$$AB = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\angle B = 180^\circ \qquad \sin(\gamma + \beta)$$

Используемые источники:

- http://ppt4web.ru/geometrija/teoremy-sinusov-i-kosinusov0.html
- http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2014/10/15/teorema-sinusov-i-kosinusov
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/14/Johannes_Regiomontanus2.jpg/500px-Johannes_Regiomontanus2.jpg
- http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/10/110/217/110217775_Nesreddi_tusi.jpg
- http://www.biografguru.ru/about/evklid/?q=3117