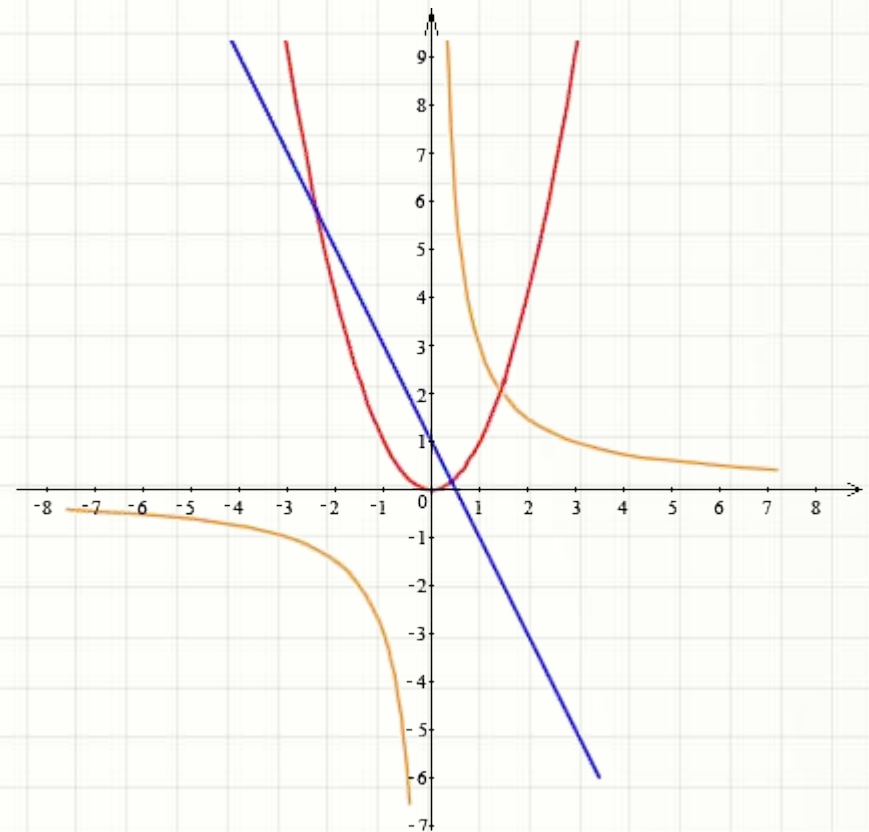


ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ



КИРИЧЕНКО Р.М.
СО-11

Схема исследования функции с целью построения ее графика

- 1) Область определения, непрерывность, четность/нечётность.
- 2) Асимптоты графика функции.
- 3) Возрастание, убывание и экстремумы функции.
- 4) Выпуклость, вогнутость и перегибы графика.

ЯК ЗНАЙТИ ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

п/п	Вид функції	Обмеження ($f(x)$ і $g(x)$ існують!)	Формулювання
1	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменник дробу не дорівнює нулю
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$	Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз
4	$y = \log_{f(x)} a \quad (a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (k — ціле)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$	Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює πk (k — ціле)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$ f(x) \leq 1$	Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$		
	а) α — натуральне	x — будь-яке	
	б) α — ціле від'ємне або нуль	$x \neq 0$	
	в) α — додатне не ціле число	$x \geq 0$	
	г) α — від'ємне не ціле число	$x > 0$	

Непрерывность функции

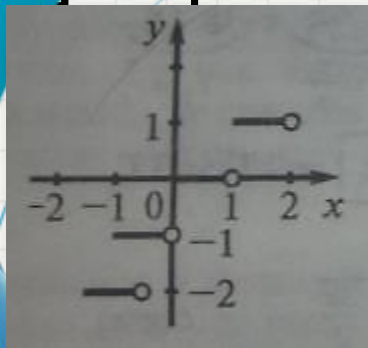
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если при $x \rightarrow a$ $f(x) \rightarrow f(a)$, то есть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I , то ее называют непрерывной на промежутке I .

(график функции, непрерывной на промежутке — непрерывная линия на этом промежутке.)

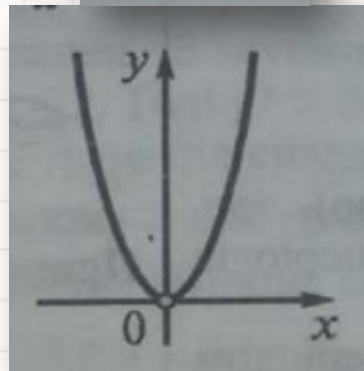
Примеры функций, которые имеют точки разрыва

$y = [x]$ — целая часть x



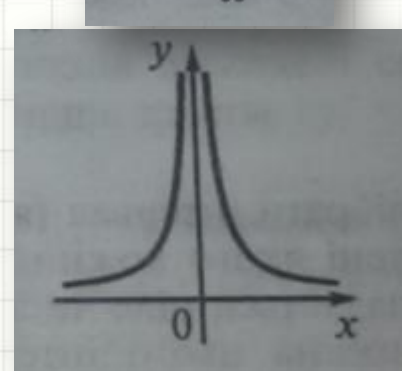
Точки разрыва — все целочисленные точки.

$$y = \frac{x^3}{x}$$



0 — точка разрыва.

$$y = \frac{1}{x^2}$$



0 — точка разрыва.

Чётные и нечётные функции

Функция f называется **парной**, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из её области определения

$$f(-x) = f(x)$$

Свойства

График парной функции симметричен относительно оси O_y

Функция f называется **не парной**, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из её области определения

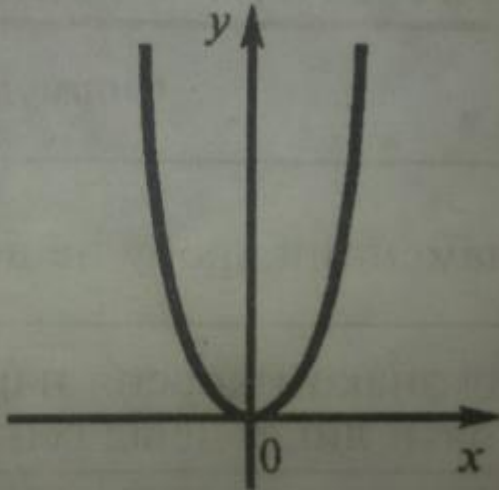
$$f(-x) = -f(x)$$

Свойства

График парной функции симметричен относительно началу координат

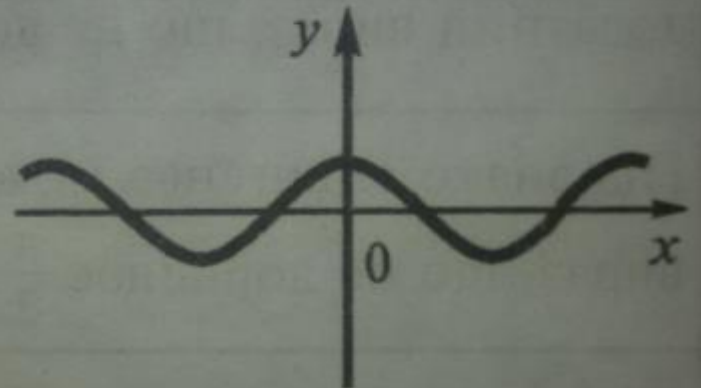
Примеры четной функции

$$y = x^2$$



$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

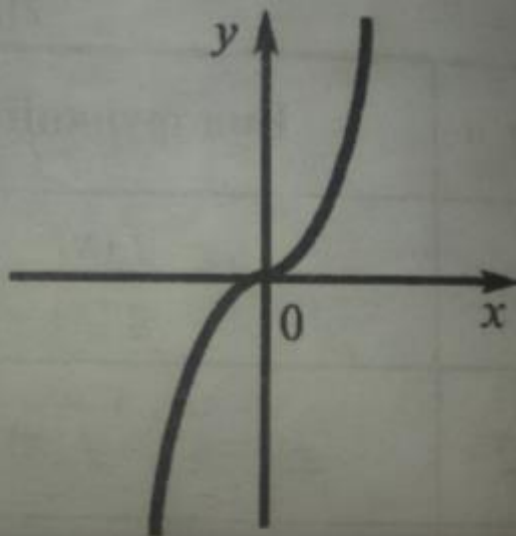
$$y = \cos x$$



$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

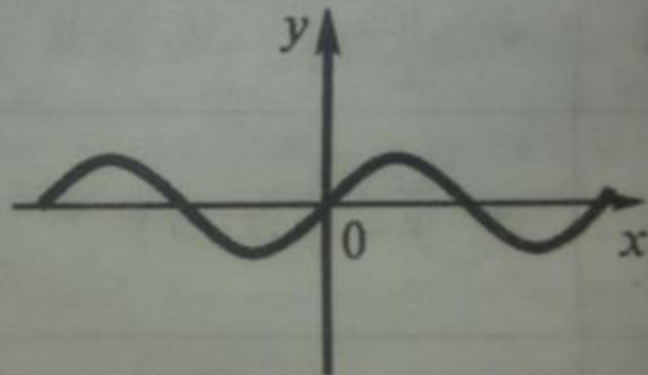
Примеры нечетной

$$y = x^3$$



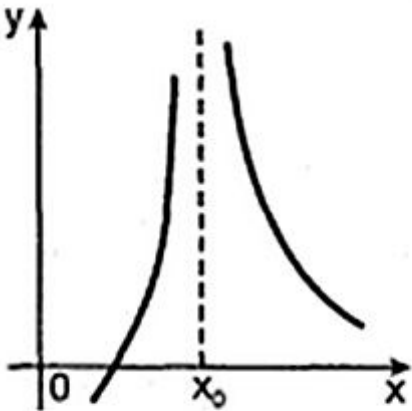
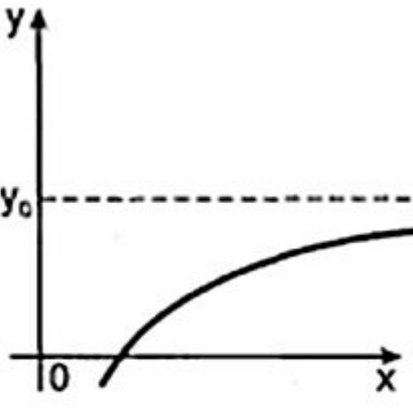
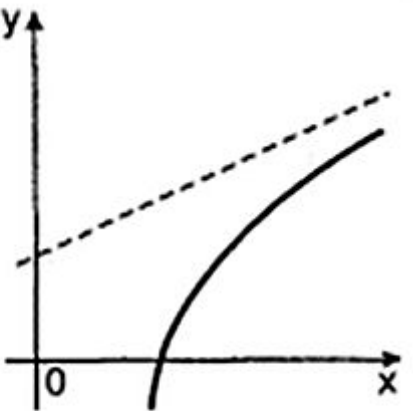
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

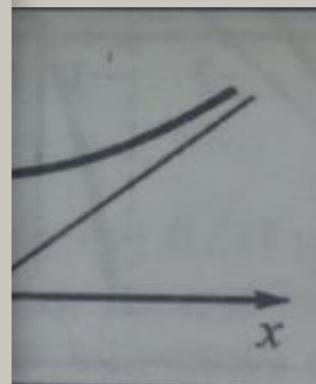
$$y = \sin x$$



$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Виды асимптот

Вертикальная $x = x_0$	Горизонтальная $y = y_0$	Наклонная $y = kx + b$ ($k \neq 0$)
		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$	$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$



Если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \infty$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой: при $k = 0$ — горизонтальной, а при $k \neq 0$ — наклонной.

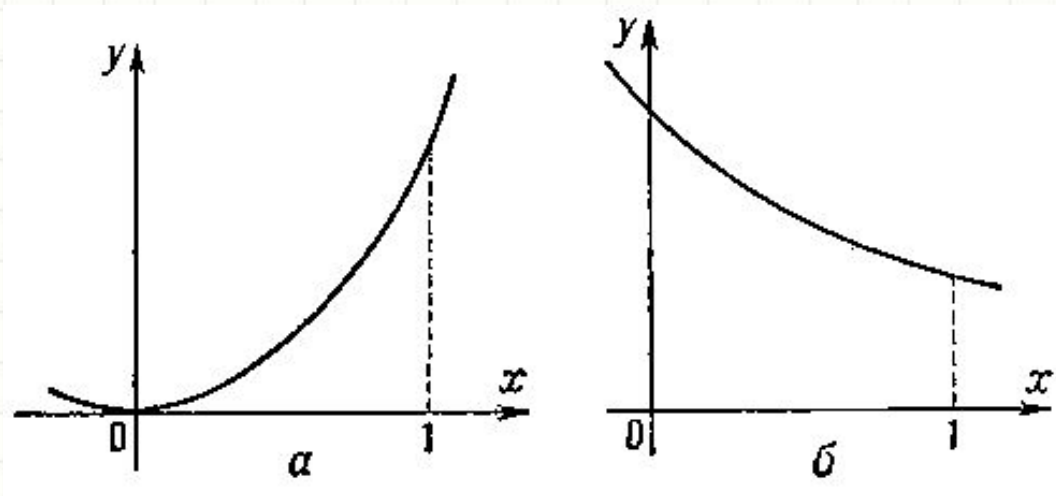
График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.

$[a, b]$,

если для любой пары точек x и x' , $a \leq x < x' \leq b$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x')$, и строго возрастающей — если выполняется неравенство $f(x) < f(x')$. Аналогично

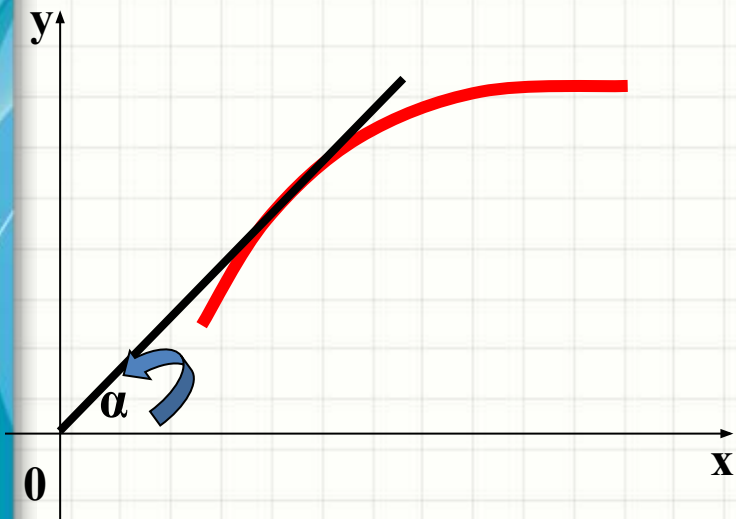
определяется **убывание** (рис., б) строго убывает на этом отрезке.

$$y = \frac{1}{x+1}$$



Теорема. Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f **возрастает** на интервале $(a;b)$.

Теорема. Если функция имеет неположительную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f **убывает** на интервале $(a;b)$.

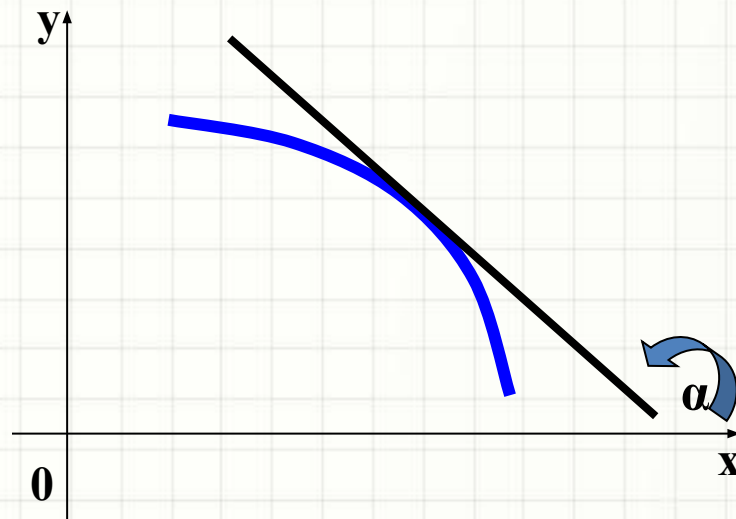


**Функция
возрастает**

$$\alpha < 90^0$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$f'(x) > 0$$



Функция убывает

$$\alpha > 90^0$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

$$f'(x) < 0$$

Исследование экстремумов функции

Необходимое условие экстремума.

(теорема Ферма)

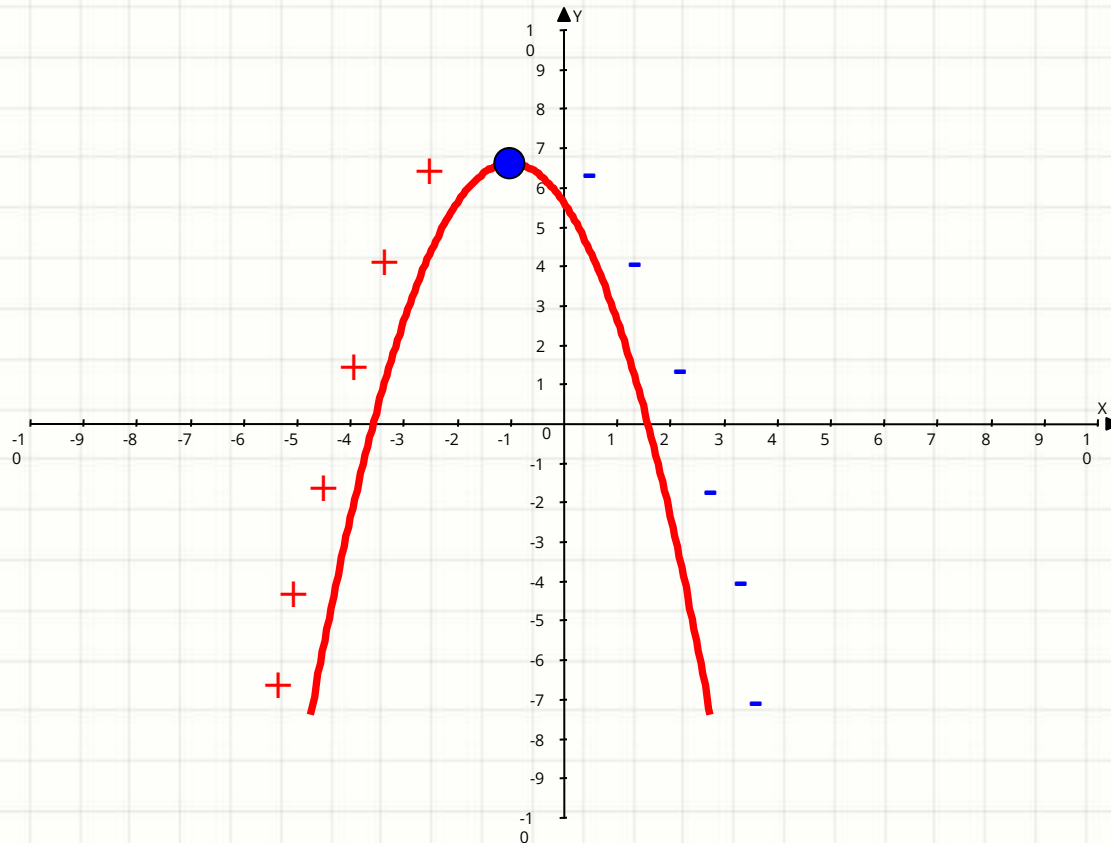
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$



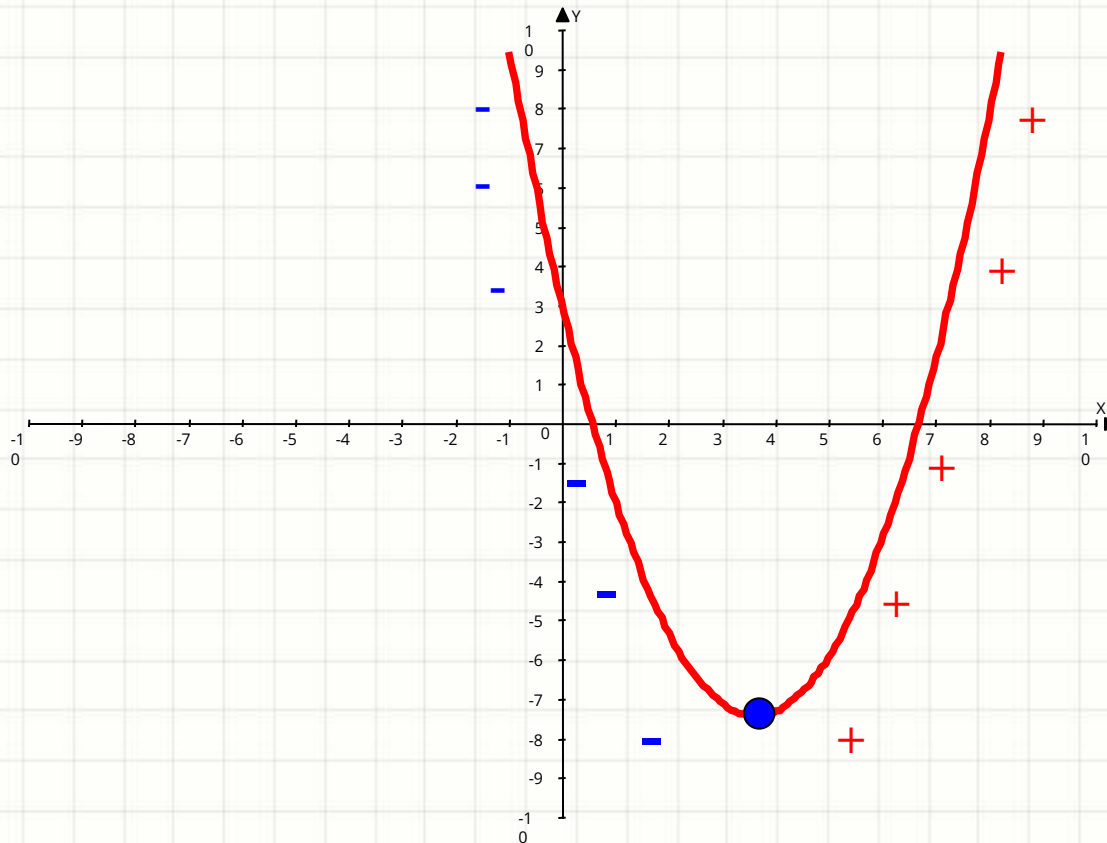
Достаточные условия существования экстремума в точке

- **Признак максимума функции.** Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f .



Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f



Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то на интервале $(a;b)$ график функции $f(x)$ выпуклый вверх, если же $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a;b)$.

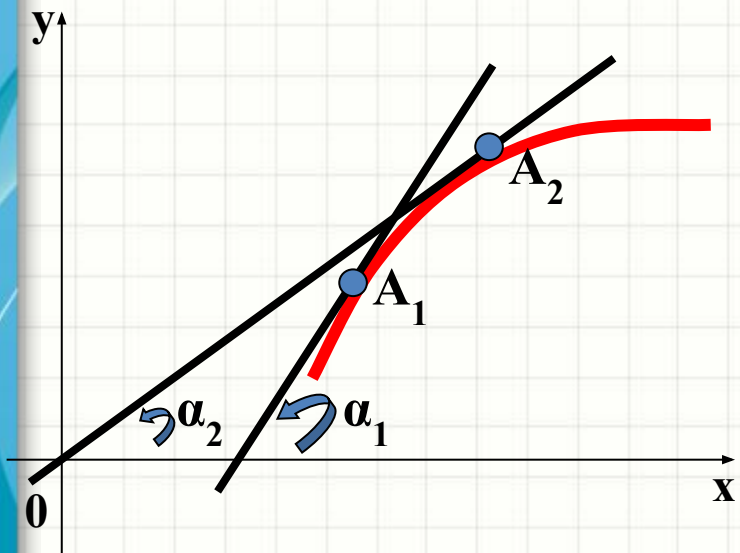


График выпуклый

α - убывает

$\text{tg } \alpha$ - убывает

$f'(x)$ - убывает

$$f''(x) < 0$$

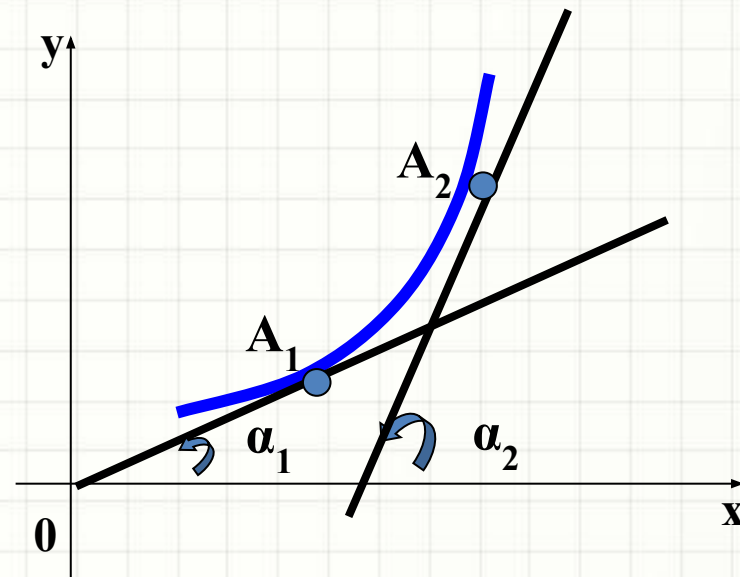


График вогнутый

α - возрастает

$\text{tg } \alpha$ - возрастает

$f'(x)$ - возрастает

$$f''(x) > 0$$

Точки перегиба

1) Найти критические точки функции по второй производной.

2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

Если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0 , то $(x_0; f(x_0))$ - точка **перегиба** графика данной функции