Харківський коледж Державного Університету телекомунікацій

{

Виконав: студент групи СО-11
Лутинський Максим Олександрович
Перевірив: викладач
Мілютіна Ольга Святославівна

- Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa).

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

*Неопределенным интегралом от непрерывной функции **f(x)** на интервале **(a; b)** называют любую ее **первообразную** функцию.*

- *Где **C** =**const***

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

1. $f(x) = x^n$
2. $f(x) = C$
3. $f(x)=\sin x$
4. $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5. $f(x) =\cos x$
6. $f(x)= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

1. $F(x) =Cx+C$
2. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
3. $F(x) =\mathrm{tg}\, x+C$
4. $F(x) = \sin x+C$
5. $F(x) = \mathrm{ctg}\, x+C$
6. $F(x) = -\cos x+C$

Свойства интеграла

$$\int (f(x) + g(x))dx =$$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

Первообразная и неопределенный интеграл

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем $\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$.

Таблица неопределенный интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Свойства дифференциалов

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Методы интегрирования

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$= \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2)+C.$$