

Харківський коледж Державного Університету телекомунікацій

{

Виконав: студент групи СО-11
Лутинський Максим Олександрович
Перевірив: викладач
Мілютіна Ольга Святославівна



- Символ \int введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова *summa*).

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называют любую ее *первообразную* функцию.

□ Где $C = \text{const}$

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$



Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

5. $f(x) = \cos x$

6. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

1. $F(x) = Cx + C$

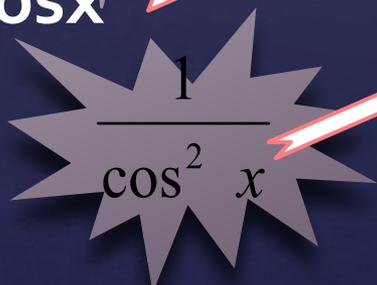
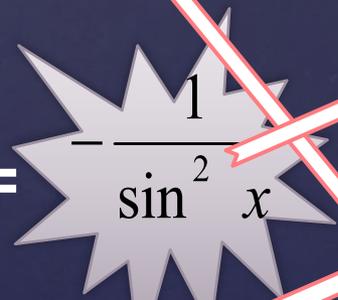
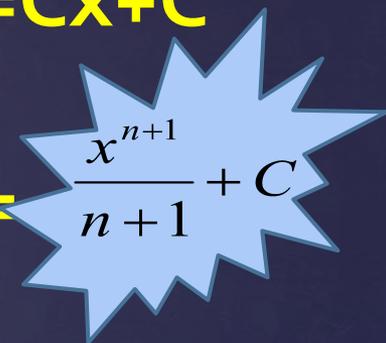
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $F(x) = \operatorname{tg} x + C$

4. $F(x) = \sin x + C$

5. $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$

6. $F(x) = -\cos x + C$



Свойства интеграла

$$\int (f(x) + g(x)) dx =$$

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$$

Первообразная и неопределенный интеграл

Очевидно, если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$

также имеет первообразную, причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx ;$$

$$5. \int Kf(x) dx = K \int f(x) dx ;$$

$$6. \int f'(x) dx = f(x) + C ;$$

$$7. \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C .$$

Таблица неопределенный интегралов

$$1. \int dx = x + C .$$

$$2. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C .$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C .$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C .$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C .$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Свойства дифференциалов

$$1. \quad dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2. \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3. \quad xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4. \quad x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Методы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx$$



Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Решение. Преобразуем $x^2 + 4x + 5$,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + 5 = \\ &= \left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 \right) + 1 = (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left. \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$

