Решение простейших тригонометрических уравнений.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin x = a$$

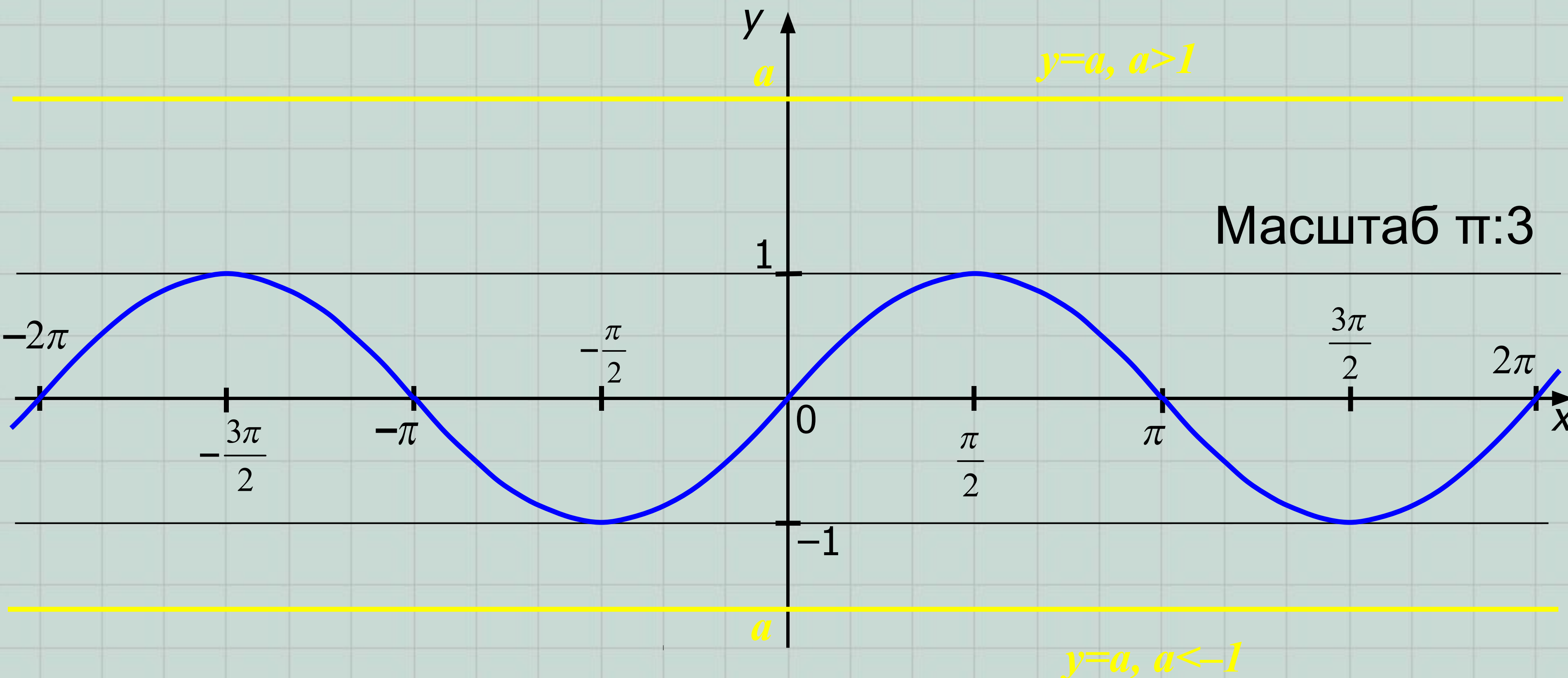
$$\cos x = a$$

,где x – выражение с переменной, $a \in$ □.

$$tgx = a$$

$$ctgx = a$$

Рассмотрим решение уравнения $\sin x = a$ с помощью графического способа решения. Для этого нам надо найти абсциссы точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = a$. Сразу же изобразим синусоиду.



I случай: $a \notin [-1;1]$

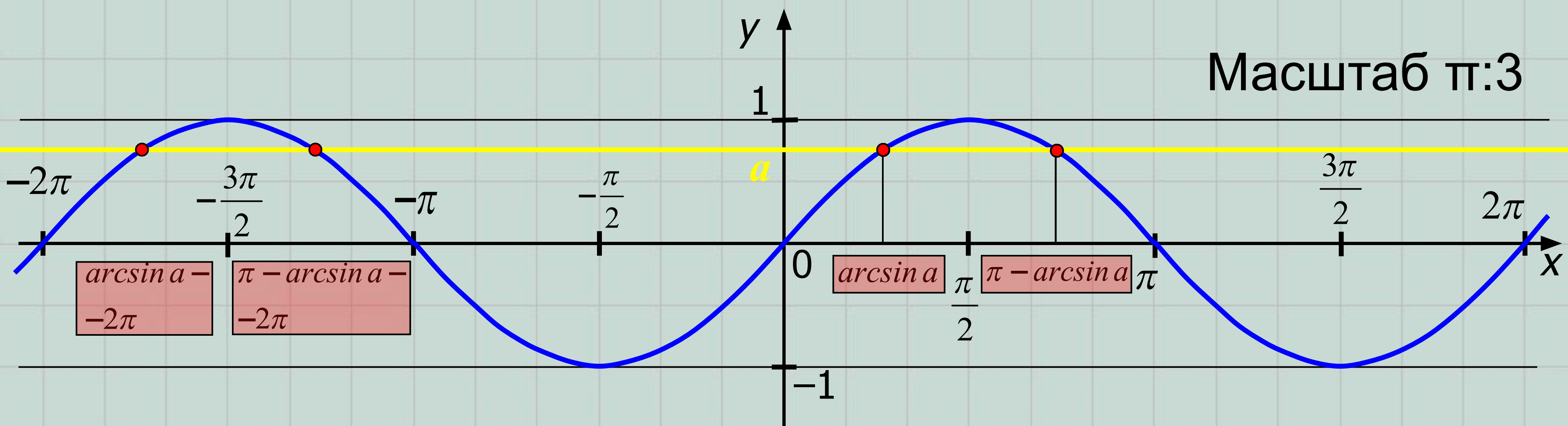
Очевидно, что в этом случае точек пересечения нет и поэтому уравнение корней не имеет!

II случай: $a \in [-1;1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения бесконечно много, причем их абсциссы определяются следующим образом:

1) Рассмотрим точку, абсцисса которой попадает на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Абсцисса этой точки – есть число(угол в радианной мере), синус которого равен a, т.е. значение этого числа равно ***arcsin****a*.



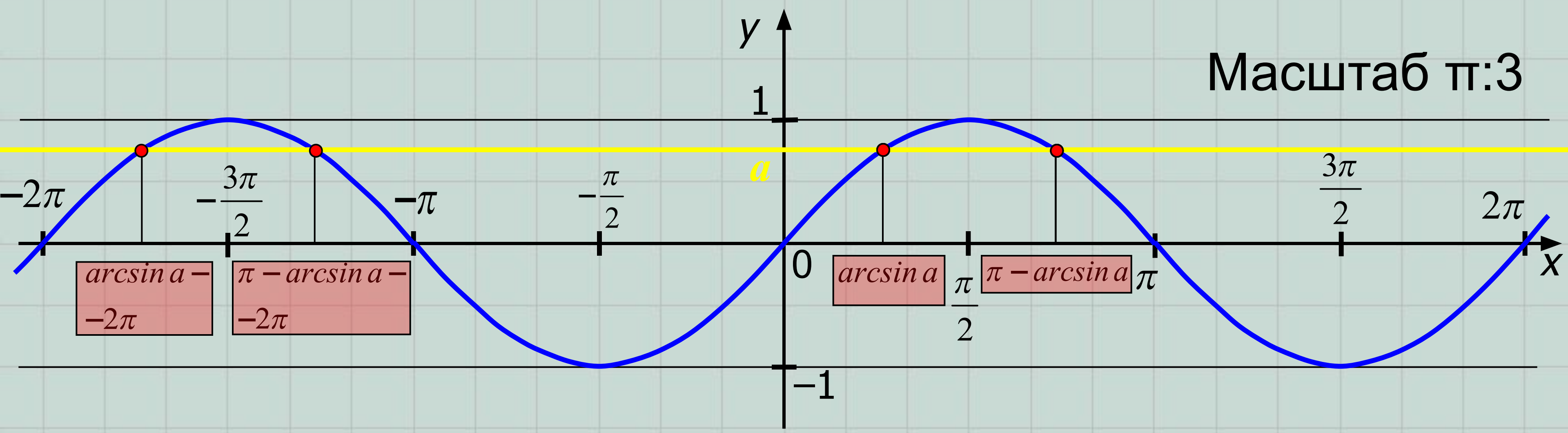
3) Абсцисса второй точки, попадающей на отрезок [–π; π], равна (π–***arcsin****a*). Для объяснения этого достаточно вспомнить, что $\sin x = \sin(\pi - x)$.

4) Все остальные абсциссы точек пересечения получаются из этих двух добавлением к ним чисел вида $2\pi n$, где $n \in$ □ (ведь мы помним свойство периодичности функции $y=\sin x$). ***Задание:*** назовите, какие абсциссы «улетевших» за край чертежа двух точек?

Ответ: $(\arcsin a + 2\pi)$ и $(3\pi - \arcsin a)$.

Таким образом, все корни в этом случае можно записать в виде совокупности:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + \pi \cdot 2n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ -\arcsin a + \pi \cdot (2k+1),\ k \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

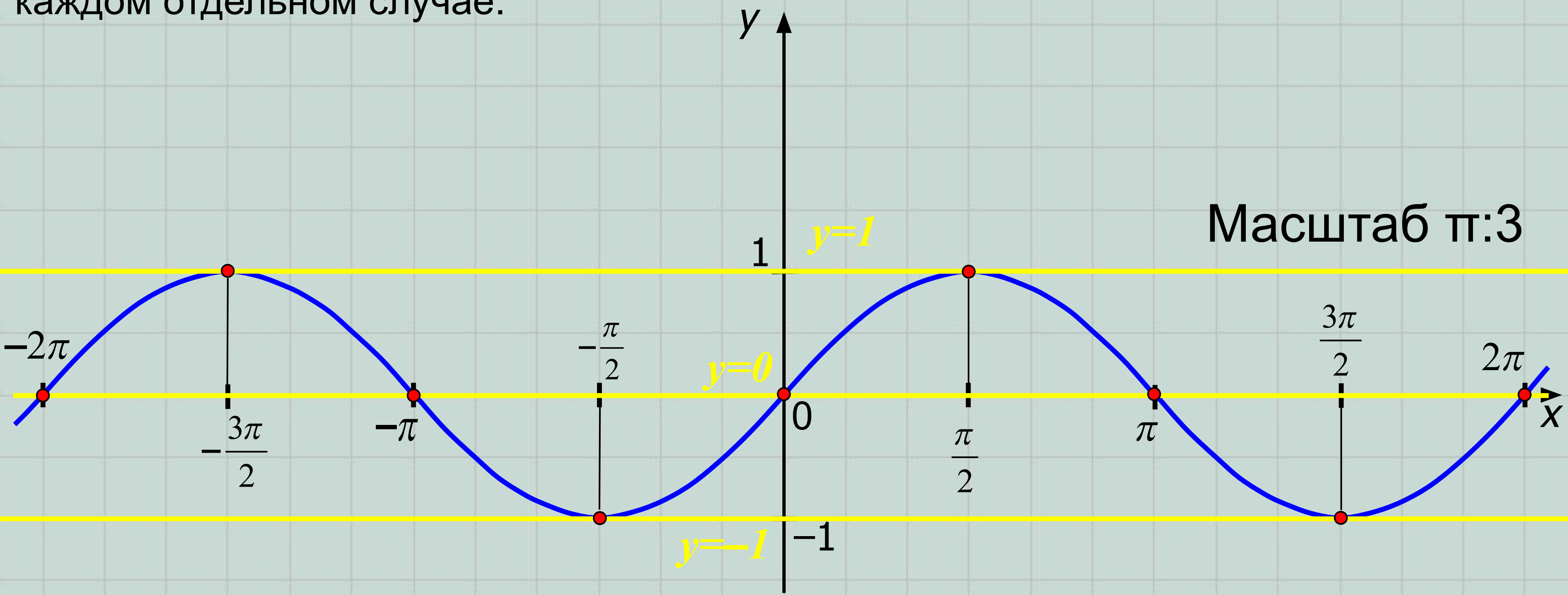


Или, принято эти две записи объединять в одну (подумайте, как это обосновать):

$$\boxed{x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.}$$

III случай: ***a= –1; 0 или 1.***

Эти три значения – особые! Для них общая формула корней, выведенная нами в предыдущем случае не годится. Проследите самостоятельно за выводом в каждом отдельном случае.



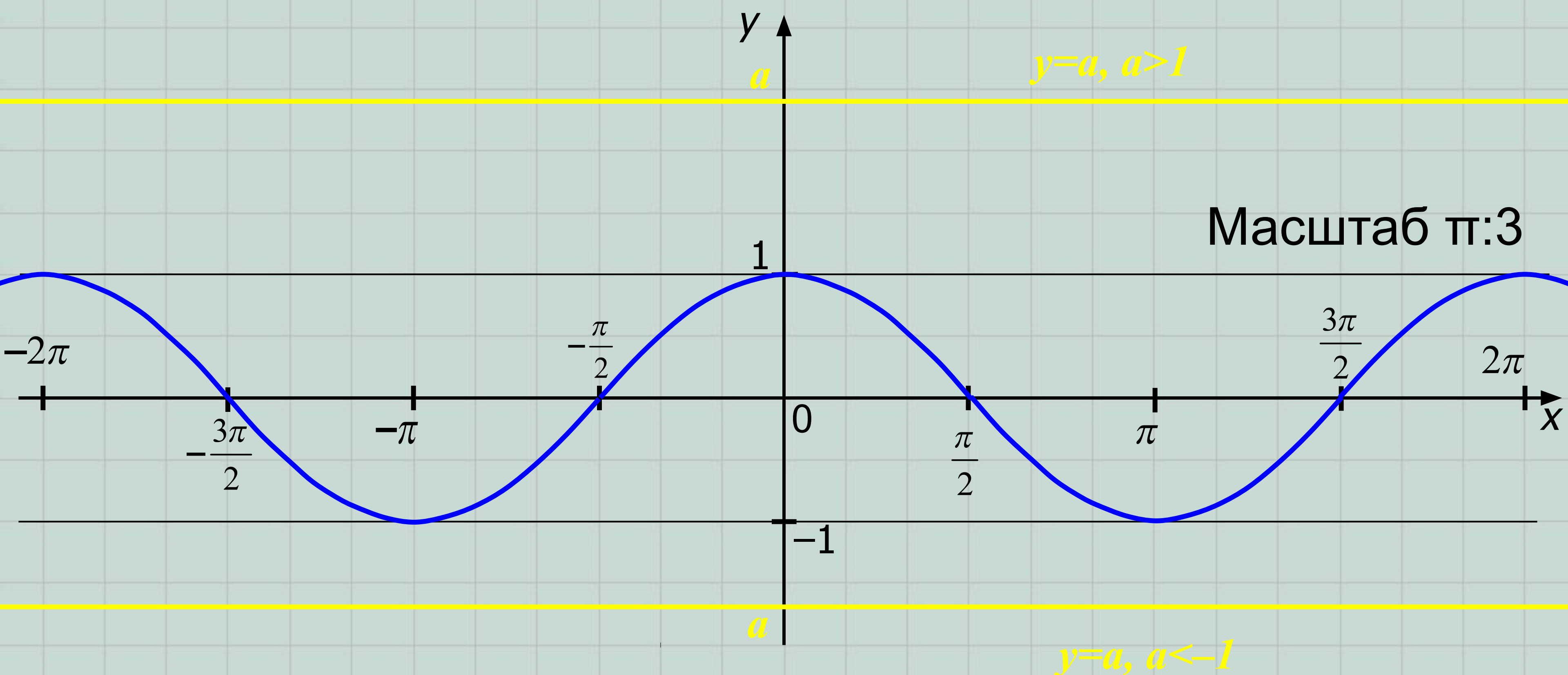
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi t, \; t \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi r, \; r \in \mathbf{Z}.$$

Запомните эти три особых случая!

Решение уравнения ***cosx=a*** рассмотрим тем же графическим способом. Для этого нам надо найти абсциссы точек пересечения косинусоиды ***y=cosx*** и прямой ***y=a***. Сразу же изобразим косинусоиду.



I случай: $a \notin [-1;1]$

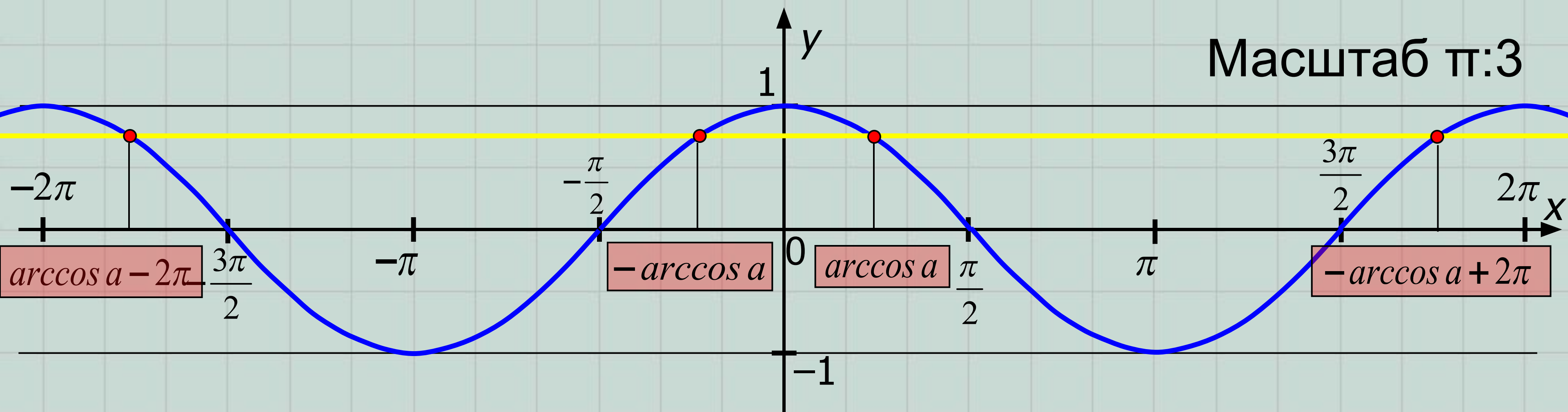
Очевидно, что в этом случае точек пересечения нет и поэтому уравнение корней не имеет!

II случай: $a \in [-1;1]$

Очевидно, что в этом случае точек пересечения бесконечно много, причем их абсциссы определяются следующим образом:

1) Рассмотрим точку, абсцисса которой попадает на отрезок $[0;\pi]$.

2) Абсцисса этой точки – есть число(угол в радианной мере), косинус которого равен a, т.е. значение этого числа равно $\arccos a$.

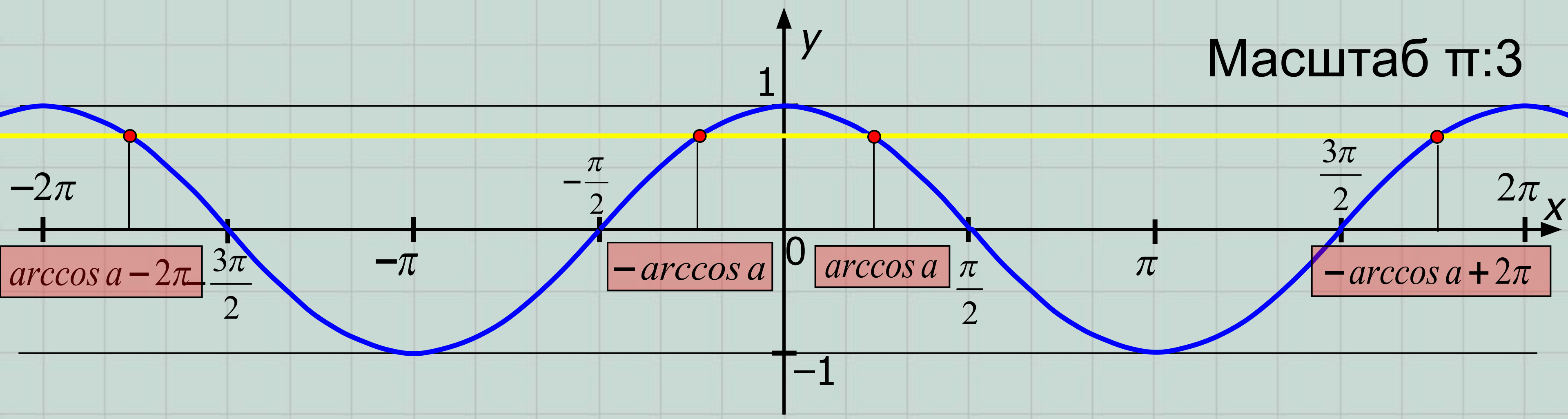


3) Абсцисса второй точки, попадающей на отрезок [–π; 0], равна $-\arccos a$. Для объяснения этого достаточно вспомнить, что $\cos x = \cos(-x)$.

4) Все остальные абсциссы точек пересечения получаются из этих двух добавлением к ним чисел вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, все корни в этом случае можно записать в виде совокупности:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

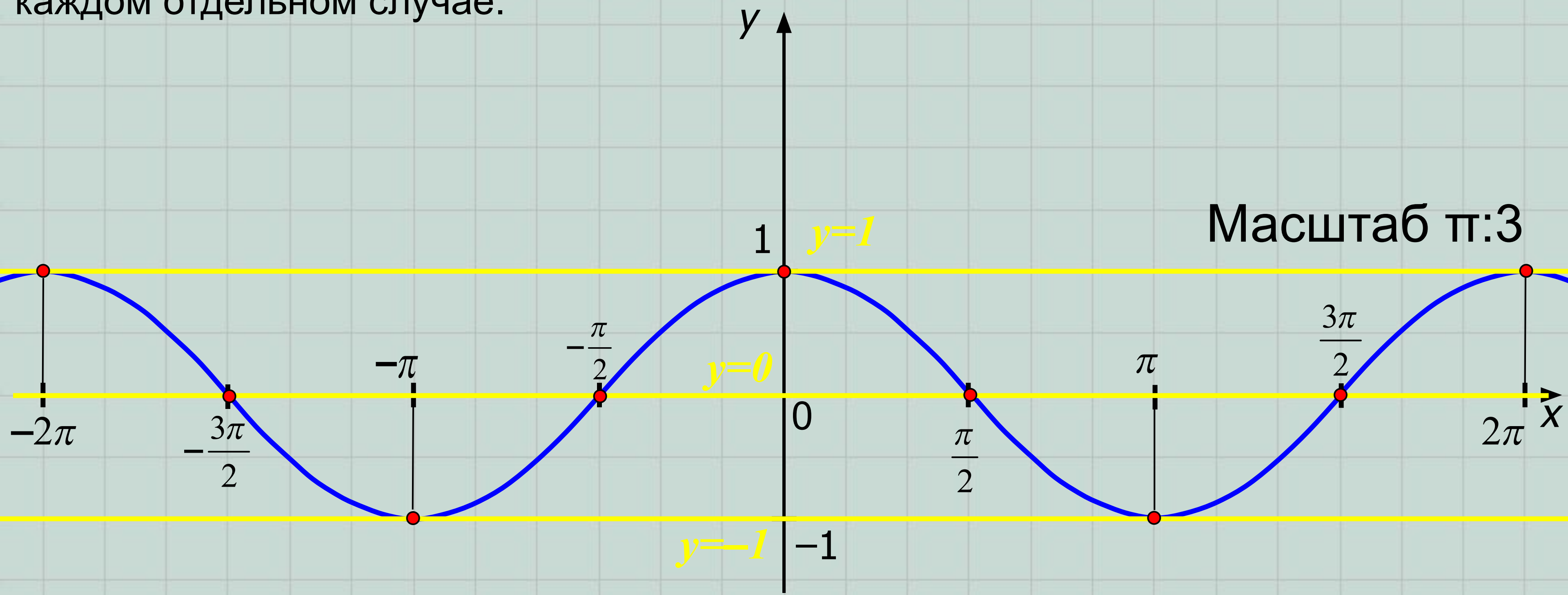


Или, принято эти две записи объединять в одну:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}.}$$

III случай: $a = -1;\ 0$ или 1.

Эти три значения – особые! Для них общая формула корней, выведенная нами в предыдущем случае не годится. Проследите самостоятельно за выводом в каждом отдельном случае.



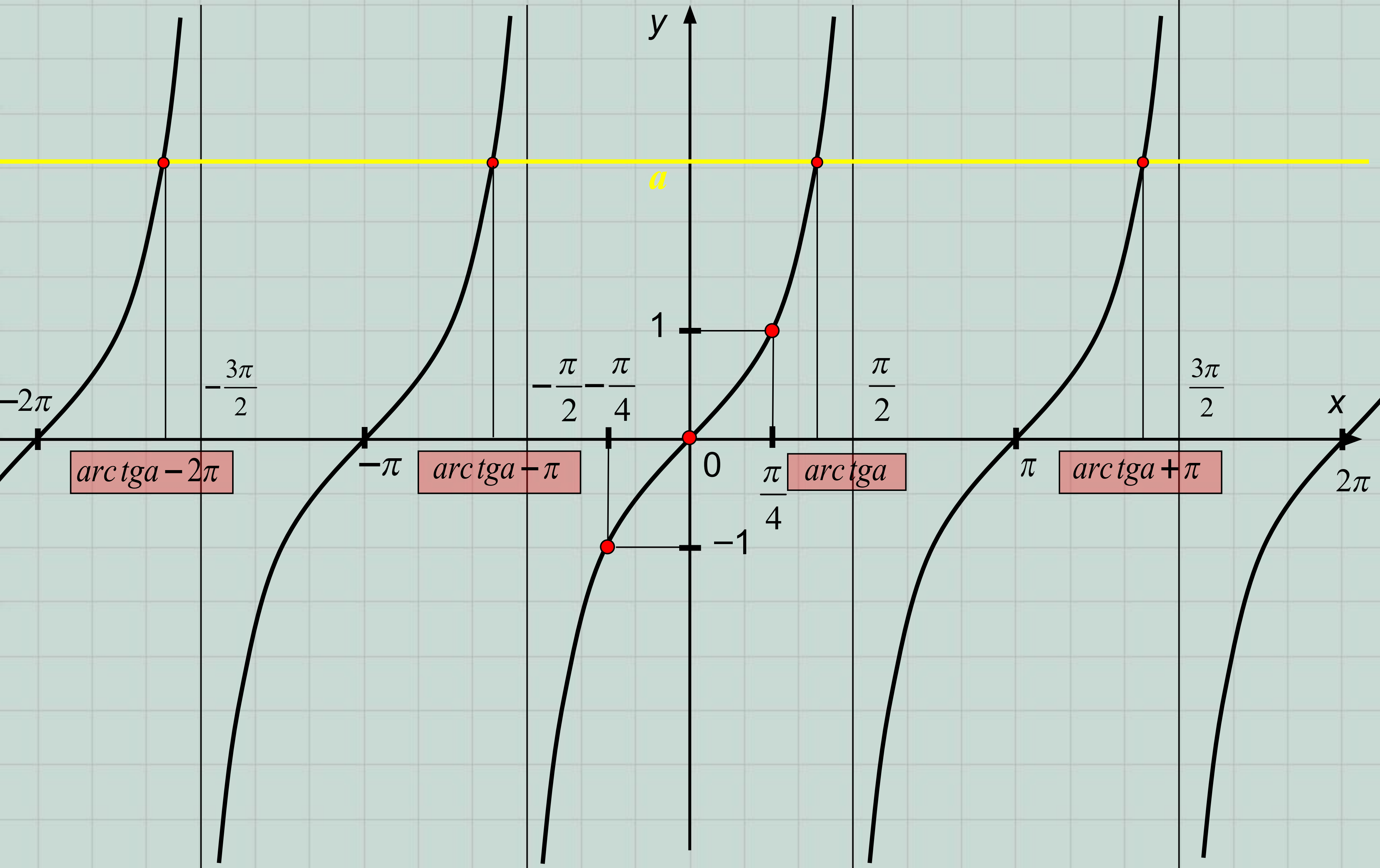
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi t,\ \ t \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi r,\ \ r \in \mathbf{Z}.$$

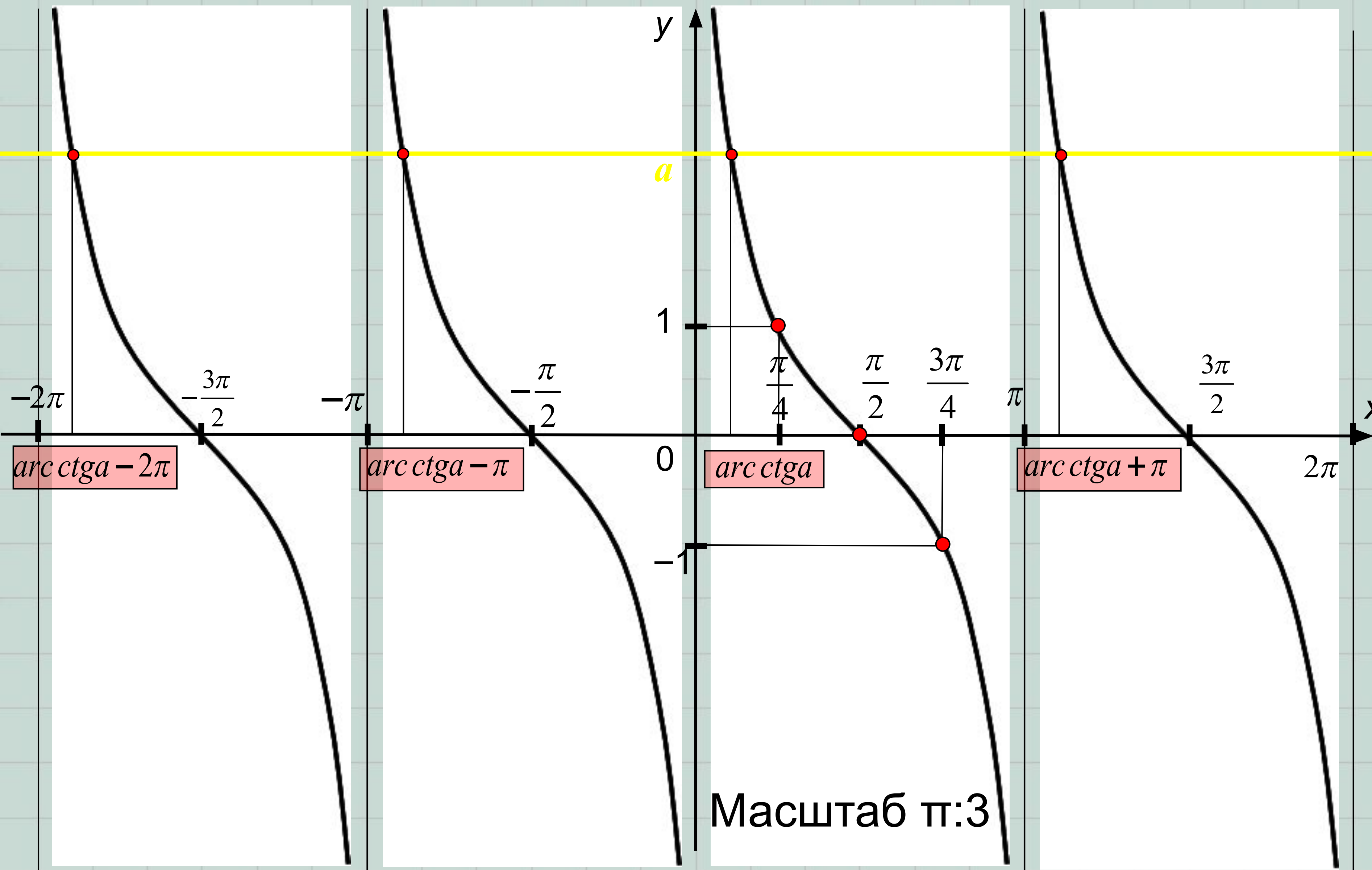
Запомните эти три особых случая!

Решение уравнения ***tgx=a*** исследуйте самостоятельно:



$$x = arctga + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$$

Решение уравнения ***ctgx=a*** исследуйте самостоятельно:



$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$$

Решение *любых* тригонометрических уравнений сводится к решению рассмотренных выше простейших тригонометрических уравнений. Для этого применяются тождественные преобразования, изученные Вами ранее: различные тригонометрические формулы, различные способы решения алгебраических уравнений, формулы сокращенного умножения и т.д..

Итак, запомним:

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z \qquad a \in [-1;1],$$

$-1;0;1$ îńîáűĺ ňî÷ęč !

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$tgx = a \Rightarrow x = arctga + \pi p,\ p \in Z$$

$$a \in R$$

$$ctgx = a \Rightarrow x = arcctga + \pi l,\ l \in Z$$