

Уравнения с параметрами

Что значит решить уравнение с параметрами?

Пусть дано равенство с параметрами x ; a ; $f(x;a)=0$ и поставлена задача: для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x , то уравнение $f(x;a)=0$ называется уравнением с переменной x и параметром a .

Решить это уравнение с параметром a – это значит для каждого значения a найти значения x , удовлетворяющие этому уравнению

С4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

Пусть $\sqrt{x-8} = t$, $t \geq 0$, тогда $x - 8 = t^2$; $x = t^2 + 8$ и уравнение примет вид:

$$t = -a t^2 - 8a + 3a + 2$$

$$a t^2 + t + 5a - 2 = 0$$

1) Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень

$$t - 2 = 0; t = 2; x = 4 + 8 = 12$$

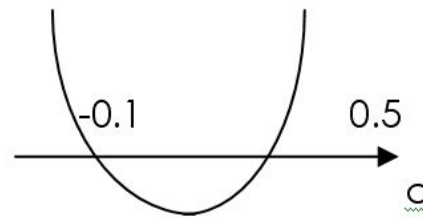
2) Если $a \neq 0$ и $a > 0$

$$D = 1 - 4a(5a - 2) = 1 - 20a^2 + 8a;$$

$$-20a^2 + 8a + 1 > 0$$

$$20a^2 - 8a - 1 < 0$$

- 1) Ветви вверх
 - 2) Нули функции
- 20 $a^2 - 8a - 1 = 0$

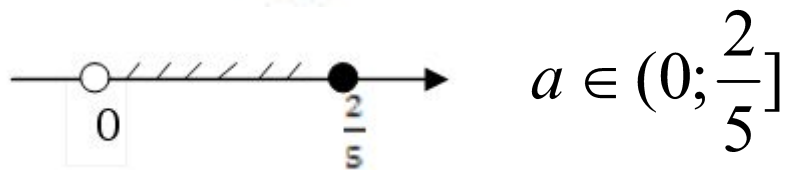


$$D = 16 + 20 = 36$$

$$a_1 = \frac{4 + 6}{20} = 0,5$$

$$a_2 = \frac{4 - 6}{20} = -0,1$$

Т.к. $t \geq 0$, то единственное неотрицательное решение будет, если $t_2 = \frac{5a - 2}{a}$



3. Если $a \neq 0$ и $\mathcal{D} = 0$

$\mathcal{D} = 0$ если:

$$a = -0.5 \quad \text{или} \\ -0.1t^2 + t + 2.5 = 0$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0$$

$$t = 5$$

$$a = 0.5 \\ 0.5t^2 + t + 0.5 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = -1 \quad (\text{неуд. } t \geq 0)$$

Ответ: $[0; 0,4]; -0.1$

Прежде всего при решении уравнения с параметрами надо сделать то, что делается при решении любого уравнения – привести заданное уравнение к более простому виду, то есть разложить на множители, избавиться от модулей, логарифмов и т. д.

Как решить задачи с параметром?

При решении задач с параметром иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики. Эскиз графиков иногда помогают увидеть «ход решения».

Необходимо в первую очередь рассмотреть решение при тех значениях параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при старшей степени x , тем самым понизив степень многочлена.

C2 Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + 2(a^2 + 1)|x| + a = 0 \quad \text{имеет 2 различных корня.}$$

Т.к. $|x^2| = x^2$, то сделаем замену переменных

$|x| = t, t \geq 0$ и уравнение примет вид: $t^2 + 2(a^2 + 1)t + a = 0$

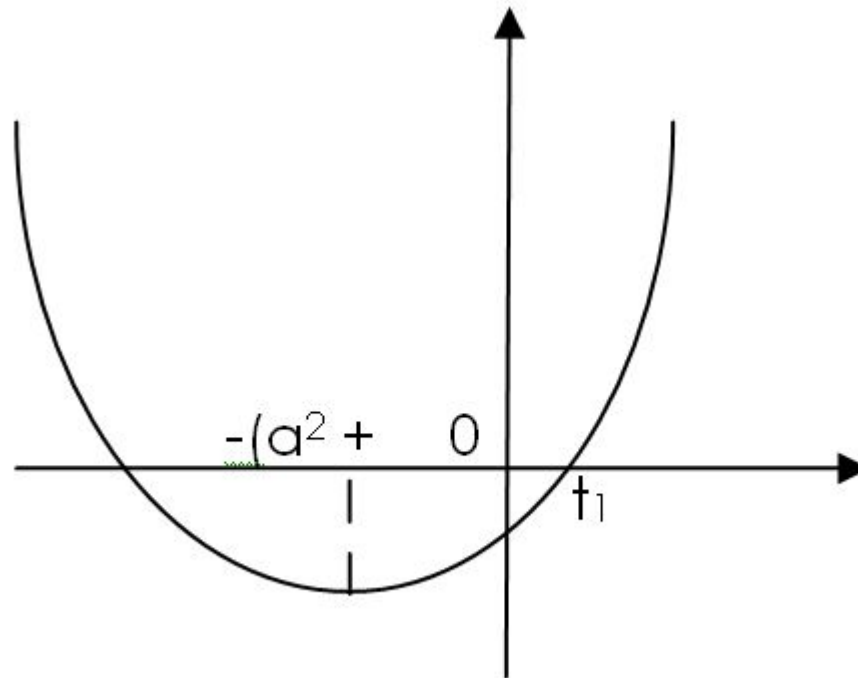
итак, надо найти те значения a , при которых квадратное уравнение имеет один положительный корень t (тогда $x = \pm t$).

Рассмотрим функцию $y = t^2 + 2(a^2 + 1)t + a$

График функции – парабола, ветви – вверх.

$$t_0 = \frac{(a^2 + 1)2}{(-1)2} = -(a^2 + 1)$$

Иллюстрируем схематически



Квадратное уравнение будет иметь один положительный корень, если $y(0) < 0$
 $y(0) = 0 + 2(a^2 + 1) \cdot 0 + a$
 $y(0) = a$, значит $a < 0$