Особые приёмы решения логарифмических неравенств с переменной в основании

Занятие №2

Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

В предыдущем занятии было доказано:

выражения

$\log_a b$ **и** $(b - 1)(a - 1)$

имеют один знак

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства:

неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) > 0$ **на ОДЗ**

неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) < 0$ **на ОДЗ**

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(<u>Условимся</u> далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{x-3}\left(x-1\right) < 2;$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ 0<x-3\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ 3<x\neq 4; \end{cases}$ $3<x\neq 4.$

2) Переписываем неравенство в виде

$$\log_{x-3}\left(x-1\right) < \log_{x-3}(x-3)^2;$$

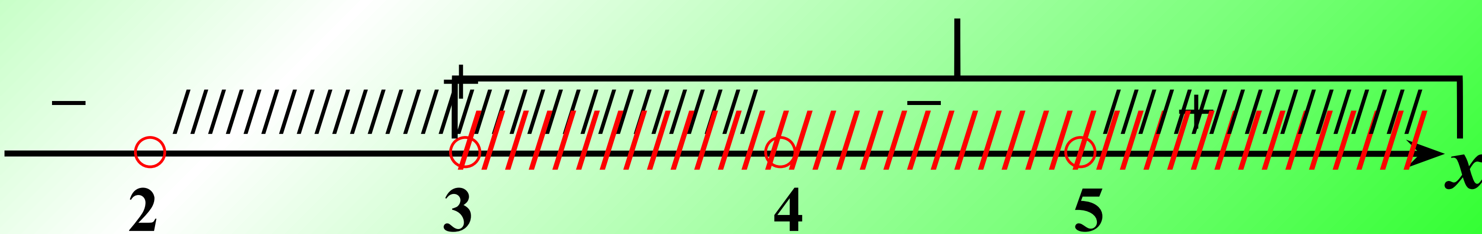
Решаем неравенство $(x-1-(x-3)^2)(x-3-1)<0;$

$(x-1-x^2+6x-9)(x-4)<0;$ $\quad -(x^2-7x+10)(x-4)<0;$

$(x^2-7x+10)(x-4)>0;$ $\quad (x-5)(x-2)(x-4)>0;$

ОДЗ

Ответ: $3<x<4;\ x>5$



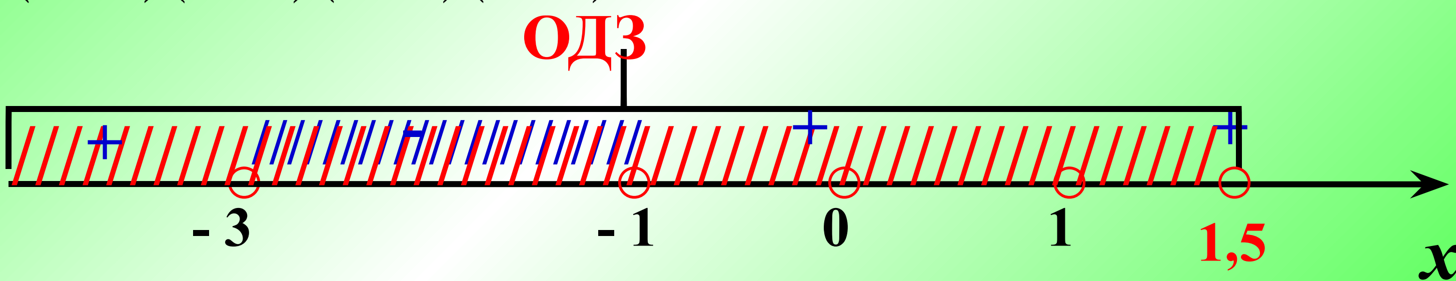
Решите неравенство: $\log_{x^2}(3-2x)>1$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3-2x>0, \\ 0<x^2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq \pm 1, \\ x\neq 0; \end{cases}$

2) $\log_{x^2}(3-2x)>1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x)>\log_{x^2}x^2$

$(3-2x-x^2)(x^2-1)>0;$ $(x^2+2\ x-3)(\ x-1)(\quad +1)<0;$

$(x+3)(x-1)(x-1)(x+1)<0;$



Ответ: (- 3; - 1)

Решите неравенство: $\log_{x^2+3}(x+3)<1$

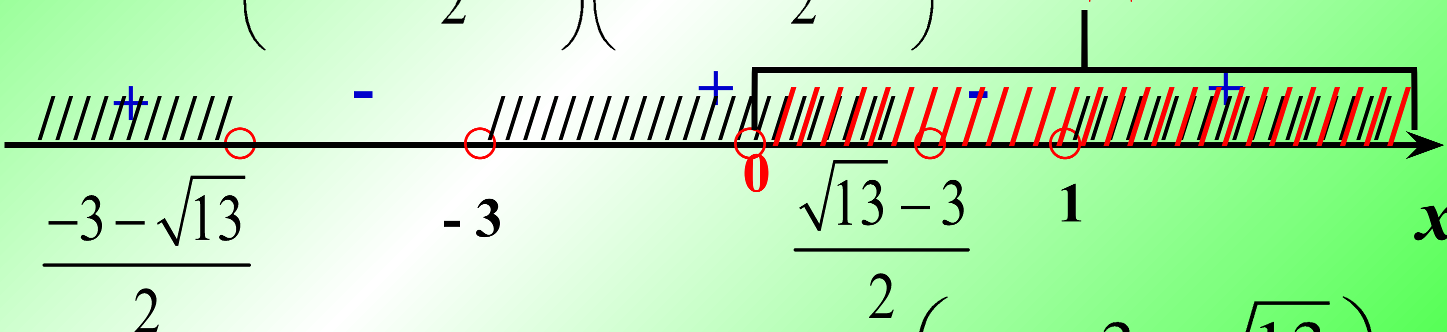
1) ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x^2+3x>0, \\ x^2+3x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x(x+3)>0, \\ x^2+3x-1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x>-3, \\ x(x+3)>0; \end{cases}$ $0<x\neq \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}.$

2) $\log_{x^2+3}(x+3)<1 \Leftrightarrow \log_{x^2+3}(x+3)<\log_{x^2+3}(x^2+3x)$

$\left(x+3-x^2-3x\right)\left(x^2+3x-1\right)<0;$ $\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+3\quad -1\right)>0;$

$\sqrt{13}\approx 3{,}6$

$(x+3)(x-1)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)>0;$



Ответ: $\left(0;\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$

Решите неравенство: $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2$

1) ОДЗ: $\begin{cases} \frac{15}{1-2x} > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1-2x > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,5, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\underline{0 < x < 0,5.}$

2) $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2 \quad \Big| \cdot (-1);$ $\quad -1 \cdot \log_x \frac{15}{1-2x} > 2;$

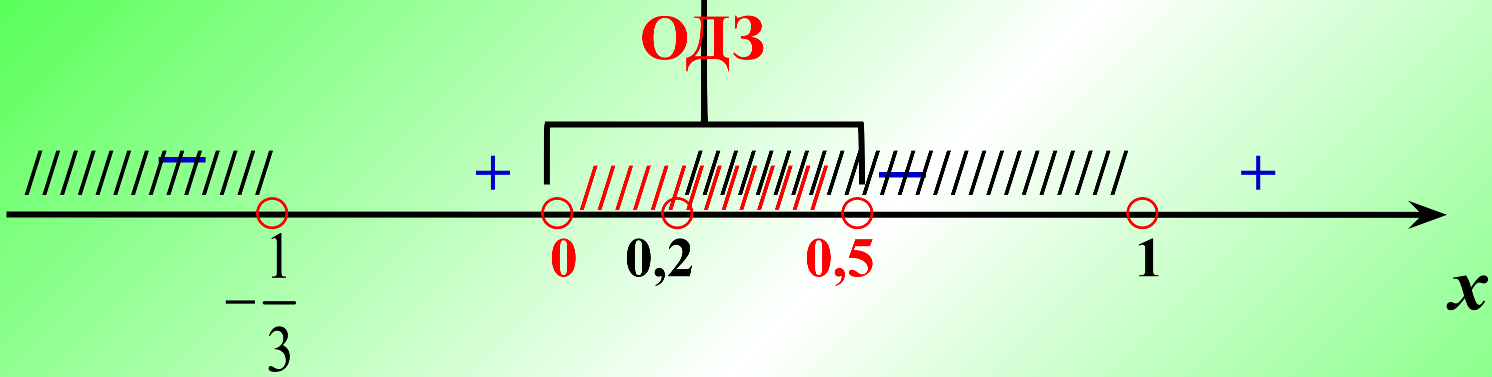
$\log_x \left(\frac{15}{1-2x}\right)^{-1} > \log_x x^2;$ $\quad \log_x \frac{1-2x}{15} > \log_x x^2;$

$\left(\frac{1-2x}{15} - x^2\right)(x-1) > 0;$ $\quad \frac{(1-2x-15x^2)(x-1)}{15} > 0 \quad \Big| \cdot (-15);$

$$\left(15x^2+2x-1\right)(x-1)<0;\quad 15\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1)<0 \ \Big| \ \mathbf{:15;}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-0{,}2)(x-1)<0;$$

ОДЗ: $0<x<0{,}5.$



Ответ: $0{,}2<x<0{,}5$

1) Решите неравенство: $\log_{3-x}\frac{1}{|x|} > 1$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};0\right) \cup \left(0;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

2) Решите неравенство: $$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

Продолжение следует,
до новых встреч