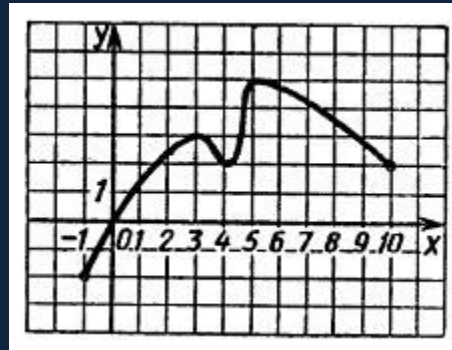


# Возрастание и убывание функций

- Познакомимся на примере с возрастанием и убыванием функции. На рисунке ниже изображен график функции, определенной на отрезке  $[-1;10]$ . Эта функция возрастает на отрезках  $[-1;3]$  и  $[4;5]$ , и убывает на отрезках  $[3;4]$  и  $[5;10]$ .



- Рассмотрим еще один пример. Очевидно, что функция  $y=x^2$  убывает на промежутке  $(-\infty; 0]$  и возрастает на промежутке  $[0; \infty)$ . Видно, что график этой функции при изменении  $x$  от  $-\infty$  до 0 сначала опускается до нуля, а затем поднимается до бесконечности.

**Определение.** Функция  $f$  возрастает на множестве  $P$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ .

**Определение.** Функция  $f$  убывает на множестве  $P$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

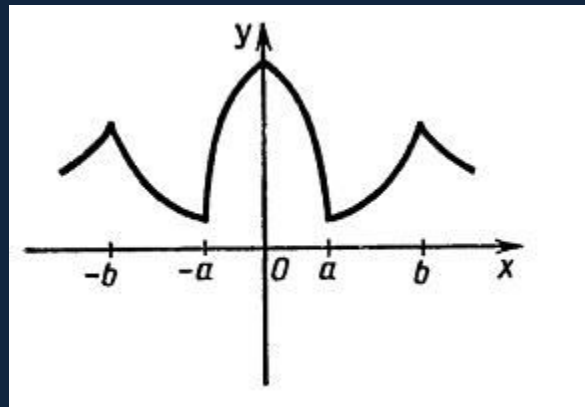
Иначе говоря, функция  $f$  называется возрастающей на множестве  $P$ , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция  $f$  называется убывающей на множестве  $P$ , если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

# Возрастание и убывание четных функций

- Для четных функций задача нахождения промежутков возрастания и убывания сильно упрощается. Достаточно всего лишь найти промежутки возрастания и убывания при  $x \geq 0$  (см. рисунок внизу).

Пусть, например, функция  $f$  четна и возрастает на промежутке  $[a; b]$ , где  $b > a \geq 0$ . Докажем, что эта функция убывает на промежутке  $[-b; -a]$ .

Действительно, пусть  $-a \geq x_2 > x_1 \geq -b$ . Тогда  $f(-x_2) = f(x_2)$ ,  $f(-x_1) = f(x_1)$ , причем  $a \leq -x_2 < -x_1 \leq b$ , и, поскольку  $f$  возрастает на  $[a; b]$ , имеем  $f(-x_1) > f(-x_2)$ , то есть  $f(x_1) > f(x_2)$ .



# Возрастание и убывание функции синус

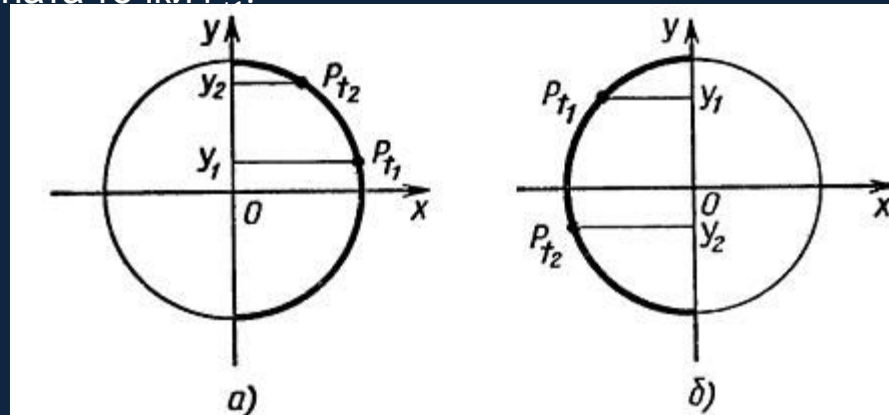
- Докажем, что синус возрастает на промежутках  $[-\pi/2 + 2\pi n ; \pi/2 + 2\pi n]$ ,  $n$  - целое. В силу периодичности функции синуса доказательство достаточно провести для отрезка  $[-\pi/2 ; \pi/2]$ . Пусть  $x_2 > x_1$ . Применим формулу разности синусов и найдем:

Из неравенства  $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$  следует, что и , поэтому и , следовательно и .

Это доказывает, что на указанных промежутках синус возрастает.

Аналогичным образом легко доказать, что промежутки  $[\pi/2 + 2\pi n ; 3\pi/2 + 2\pi n]$ ,  $n$  - целое, являются промежутками убывания функции синуса.

Полученный результат можно легко проиллюстрировать с помощью рисунка единичной окружности (см. рисунок ниже). Если  $-\pi/2 \leq t_1 < t_2 \leq \pi/2$ , то точка  $P_{t_2}$  имеет ординату большую, чем точка  $P_{t_1}$ . Если же  $\pi/2 \leq t_1 < t_2 \leq 3\pi/2$ , то ордината точки  $P_{t_2}$  меньше, чем ордината точки  $P_{t_1}$ .

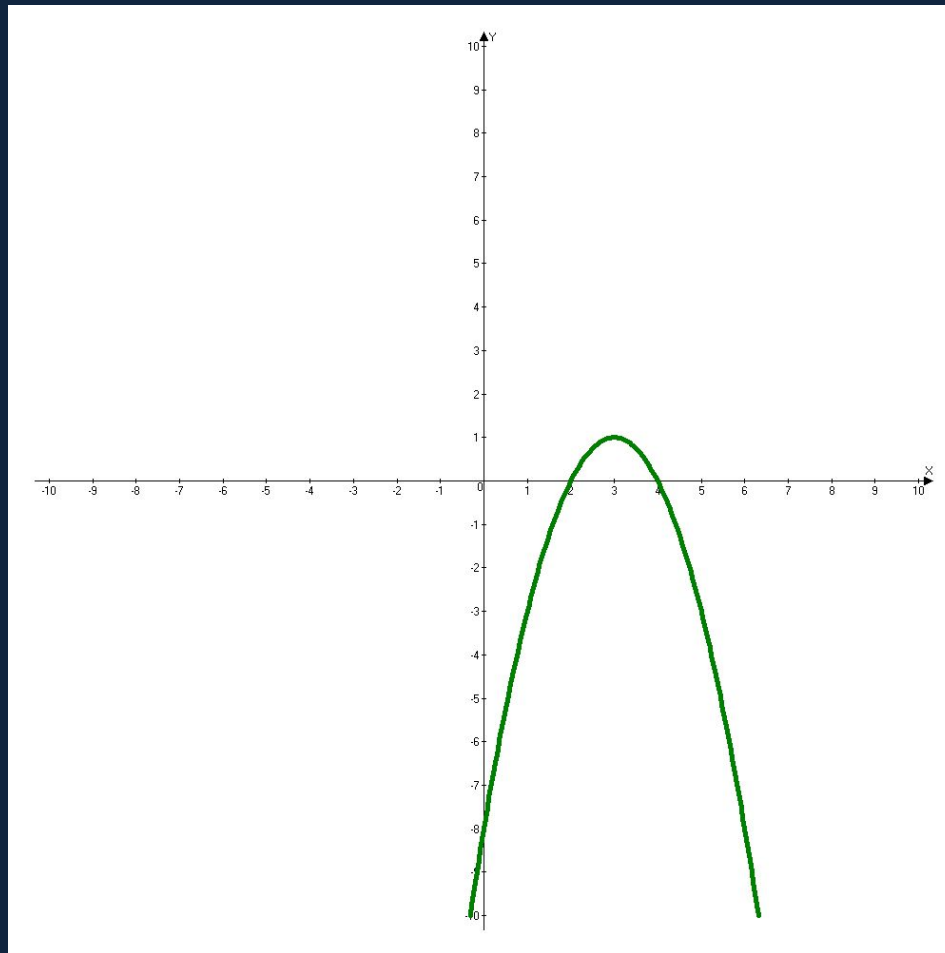


# Возрастание и убывание функции косинус

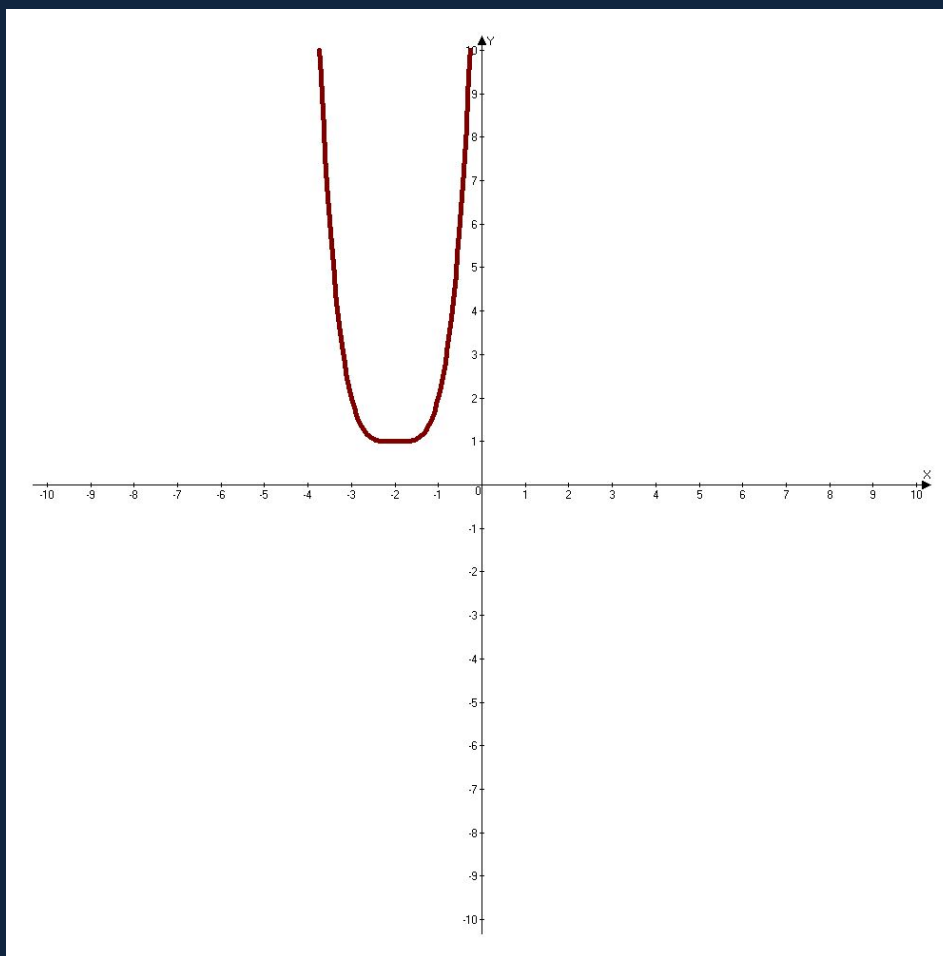
Промежутками возрастания косинуса являются отрезки  $[-\pi + 2\pi n ; 2\pi n]$ ,  $n$  - целое. Промежутками убывания косинуса являются отрезки  $[2\pi n ; \pi + 2\pi n]$ ,  $n$  - целое. Доказательство этих утверждений можно провести аналогично доказательству для синуса.

Однако, проще воспользоваться формулой приведения  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ , из которой сразу следует, что промежутками возрастания косинуса являются промежутки возрастания синуса, сдвинутые на  $\pi/2$  влево. Аналогичное утверждение можно сделать и для промежутков убывания.

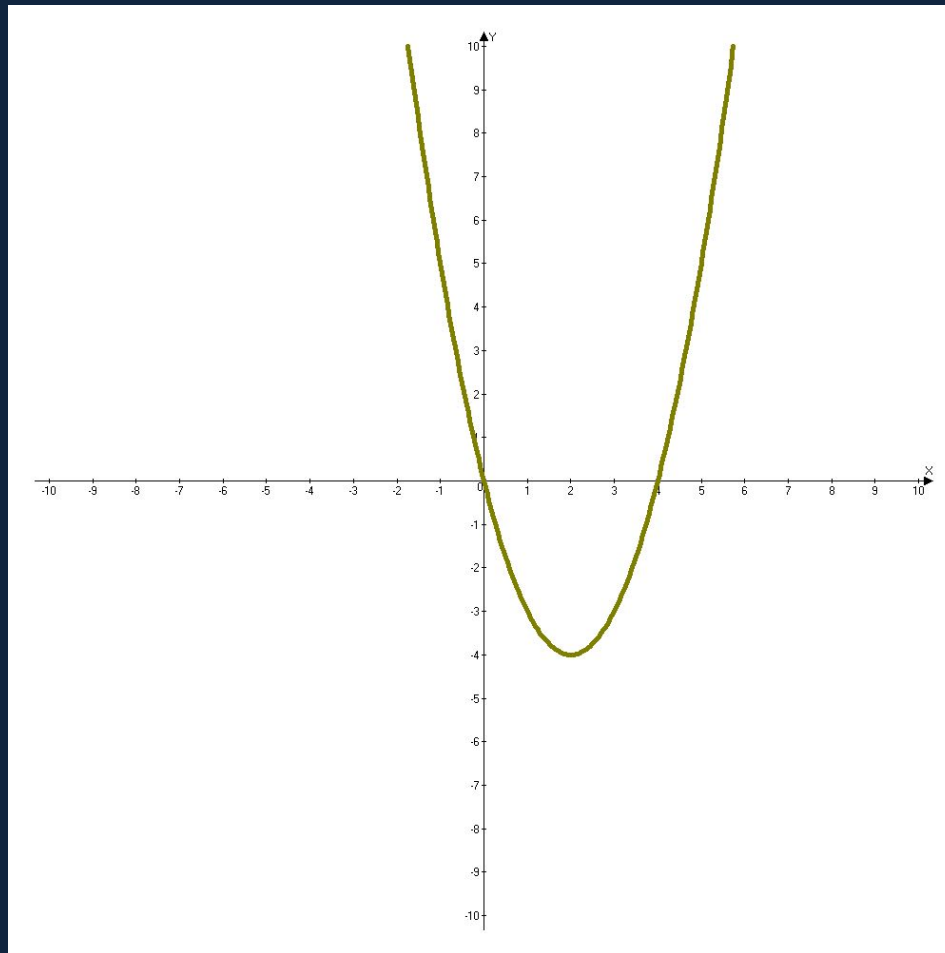
# Упражнение №82а



# Упражнение №82б

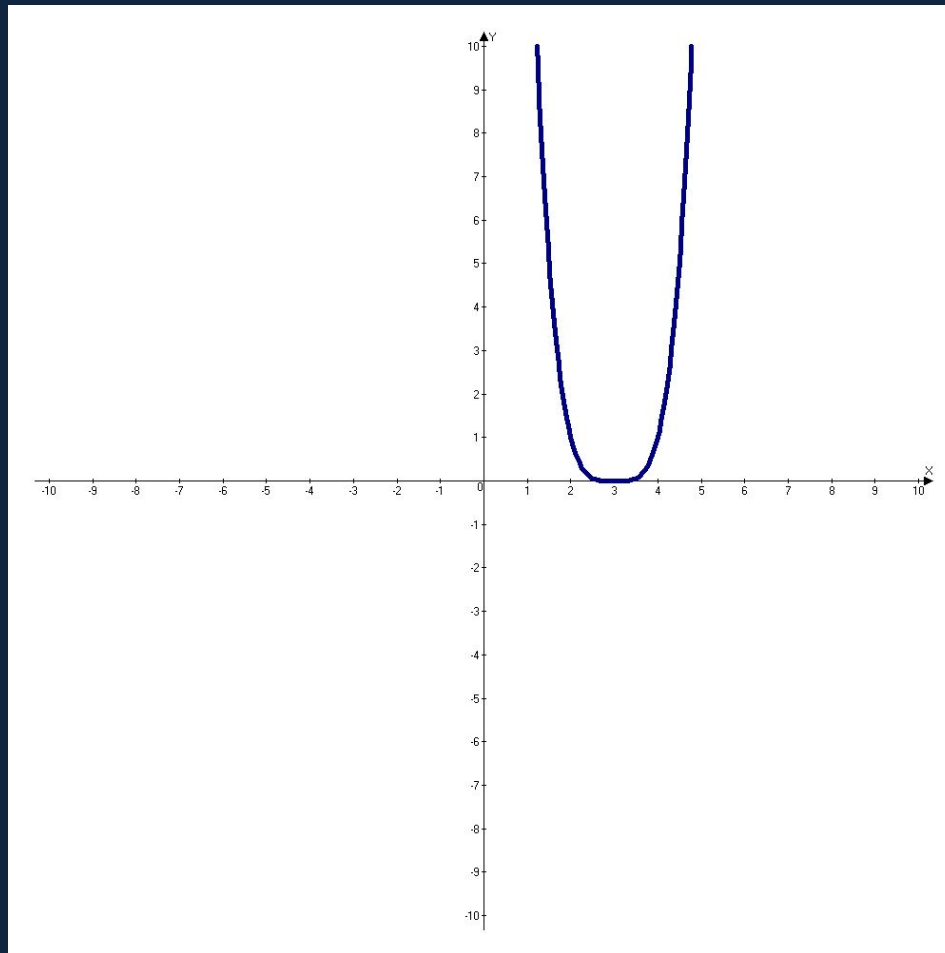


# Упражнение №82в

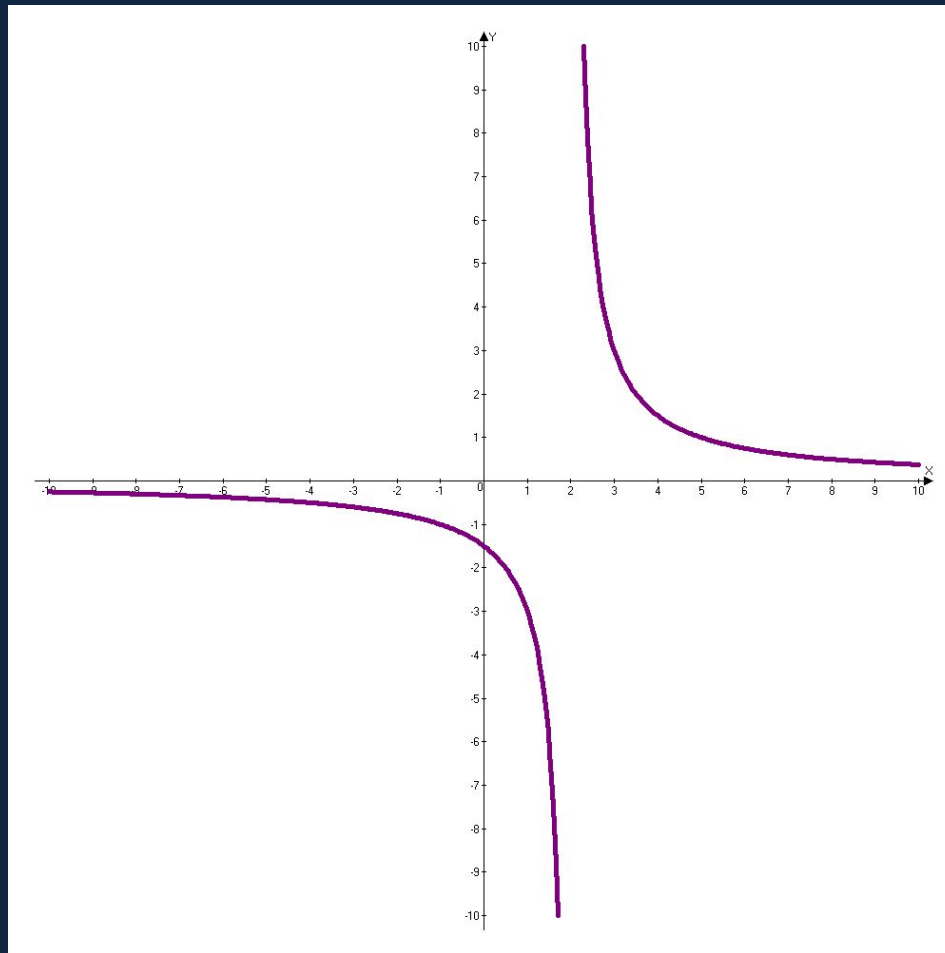




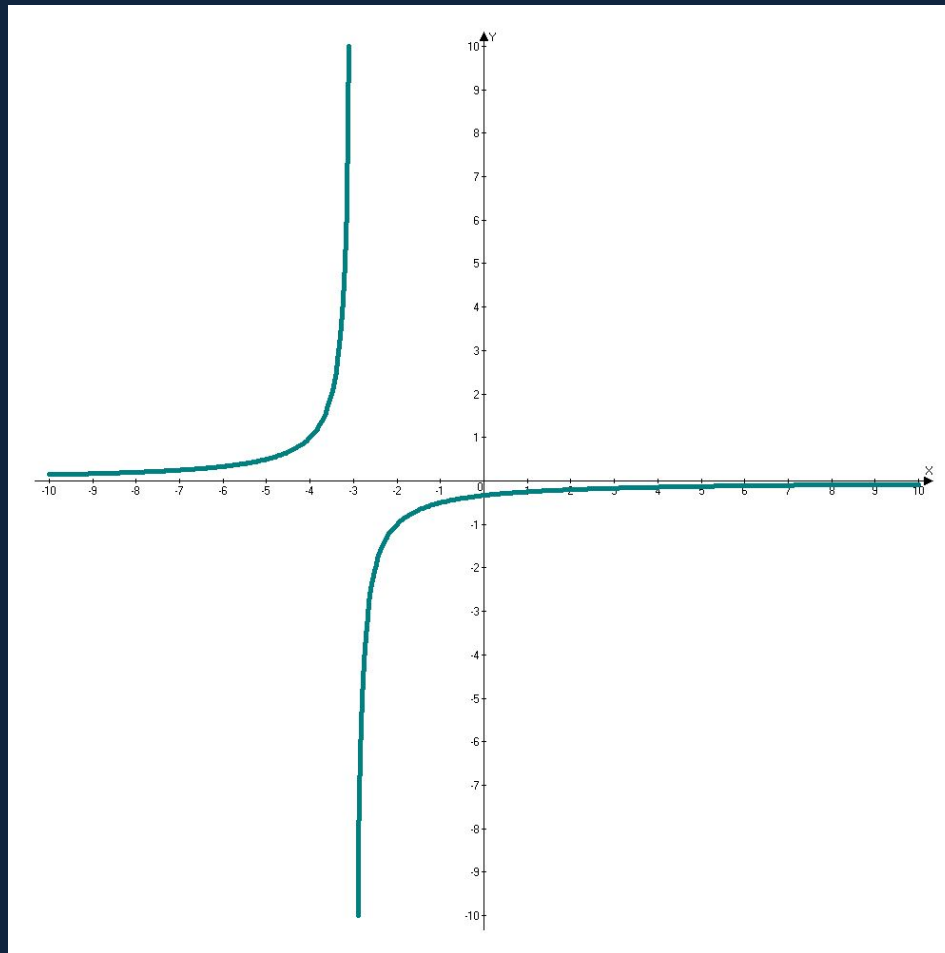
# Упражнение №82г



# Упражнение №83а



# Упражнение №83в



- Упражнение №77,78



Автор: Сабитова  
Файруза Рифовна  
учитель математики  
1 квалификационной  
категории