$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Понятие обратной функции.

Определение логарифмической функции.

Алгебра и начала анализа, 11 класс

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Рассмотрим пример какой-либо функции, заданной в явном виде формулой y=f(x). Пусть, для определенности, это будет линейная функция y=2x–7. Вспомним, как выполняется такая задача: *найти значение функции по заданному значению аргумента*. Вспомнили?..

…Правильно: для этого надо данное значение аргумента подставить в формулу и произвести вычисления. Например, при x=2, значение функции равно y=2·2–7=–3.

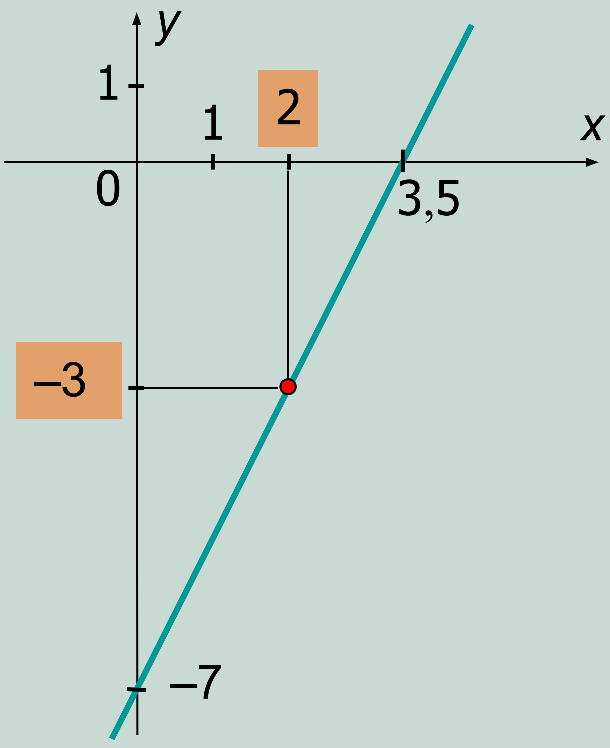
Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

1) построить график данной функции;

2) отметить на оси абсцисс значение 2;

3) получить на графике точку с отмеченной абсциссой 2;

4) найти ординату полученной в п.3 точки.



Для любой другой функции задача нахождения значения функции по заданному значению аргумента решается аналогично.

А теперь вспомним, как решается обратная задача по нахождению значения аргумента при заданном значении функции. В нашем примере с линейной функцией $y=2x–7$ это происходит по следующему алгоритму: в формулу, задающую данную функцию подставляют заданное значение функции и решают полученное уравнение с переменной x. Например, при $y=–5 \Rightarrow 2x–7=–5 \Rightarrow x=1$.

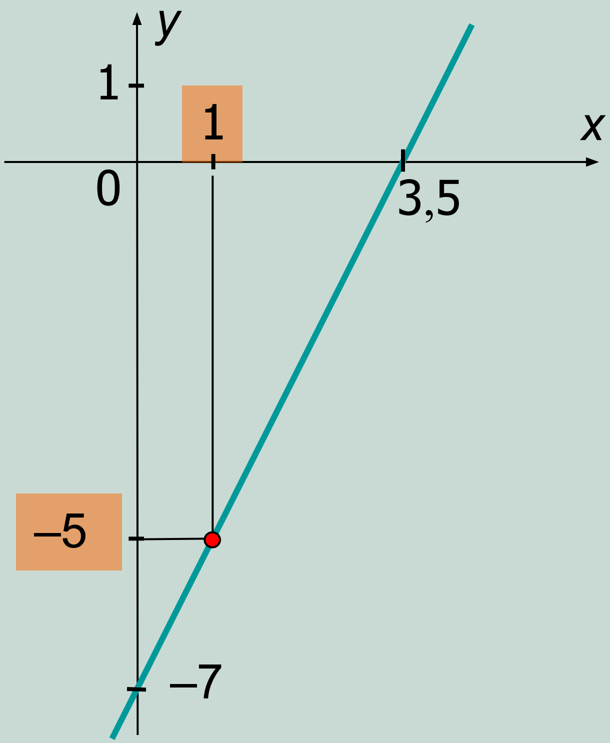
Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

1) построить график данной функции;

2) отметить на оси ординат значение –5;

3) получить на графике точку с отмеченной ординатой –5;

4) найти абсциссу полученной в п.3 точки.



Для любой другой функции задача нахождения значения аргумента по заданному значению функции решается аналогично.

Однако, при решении обратной задачи можно поступить по-другому. Для этого составляют *обратную зависимость*, считая заданное значение данной функции аргументом этой зависимости. Сделать это можно двумя способами:

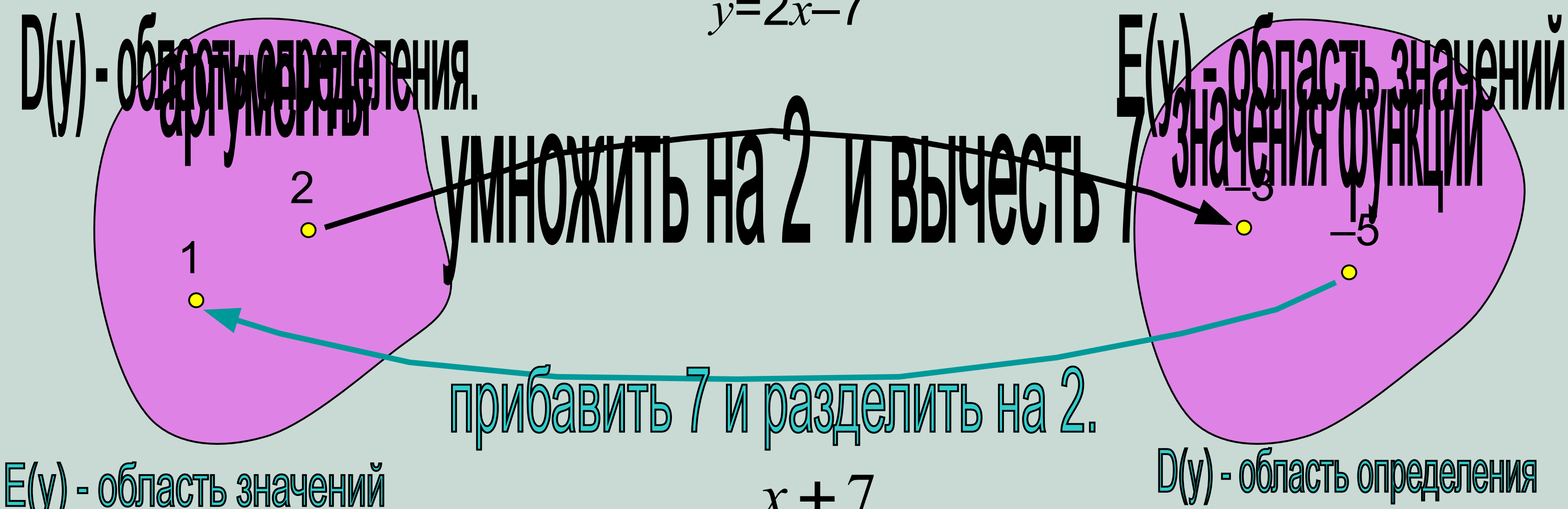
1) Выразить из формулы данной функции x через y. В нашем случае:

   $y=2x-7 \Rightarrow 2x=y+7 \Rightarrow x=0{,}5y+3{,}5$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде: $y=0{,}5x+3{,}5$. **<u>Или</u>**

2) Поменять в формуле данной функции x и y. В нашем случае:

   $y=2x-7 \Rightarrow x=2y-7$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде, выразив y через x : $2y=x+7 \Rightarrow y=0{,}5x+3{,}5$.

$y=2x-7$



$$y=\frac{x+7}{2}$$

Таким образом, мы получили обратную для функции $y=2x-7$ зависимость, которая является в свою очередь также функцией $y=0{,}5x+3{,}5$. С помощью обратной функции мы можем решать обратную задачу по нахождению значения аргумента при заданном значении данной функции. Только для обратной функции это заданное значение функции является аргументом! Значит, для

$$y=x=-5 \Rightarrow y=0{,}5\cdot(-5)+3{,}5=1.$$

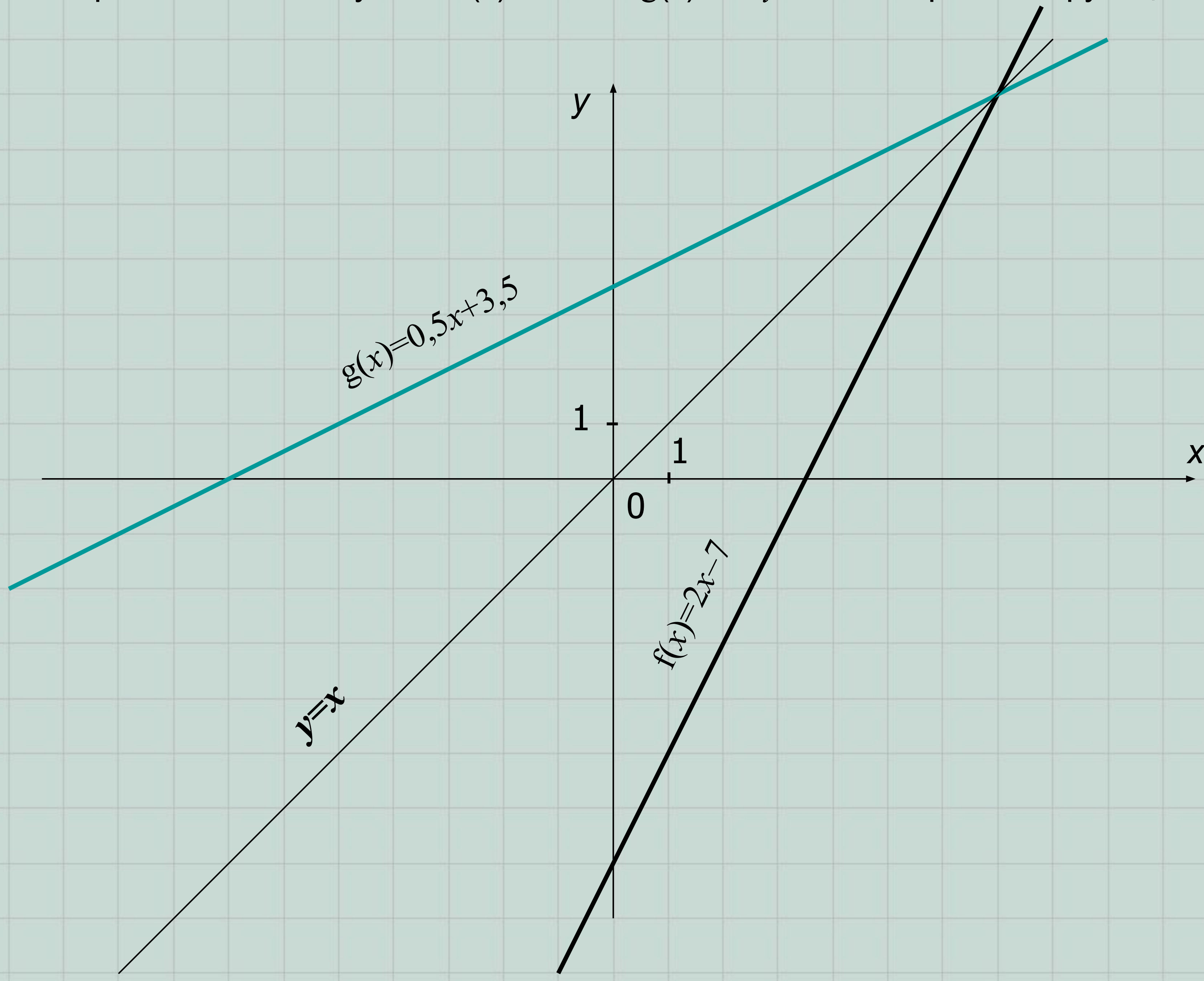
Примечание 1. Если для данной функции можно составить обратную зависимость, являющуюся также функцией, то говорят , что данная функция *обратима* и обратная зависимость является *обратной функцией*.

Примечание 2. Если функция $y=\mathrm{f}(x)$ является обратимой и $y=\mathrm{g}(x)$ – обратная для неё функция, то:

1) $D(\mathrm{f})=E(\mathrm{g})$ и $E(\mathrm{f})=D(\mathrm{g})$; 2) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\mathrm{g}(\mathrm{f}(x))=x$.

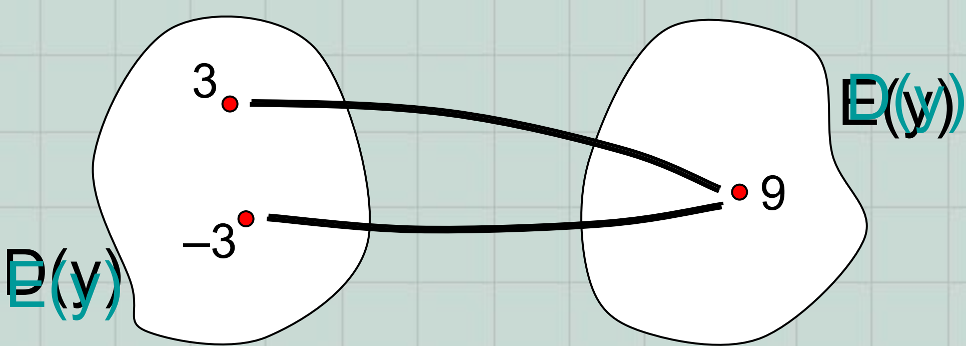
Примечание 3. Графики данной и обратной для неё функций симметричны относительно прямой $y=x$.

В рассмотренном нами случае: $f(x)=2x–7$ и $g(x)=0{,}5y+3{,}5$ – обратные функции.



Чтобы обратная для данной функции зависимость была также функцией *необходимо и достаточно*, чтобы каждое свое значение функция принимала только при одном значении аргумента. Значит, чтобы функция была обратимой, данная функция должна быть *монотонно возрастающей* или *монотонно убывающей* на всей своей области определения.

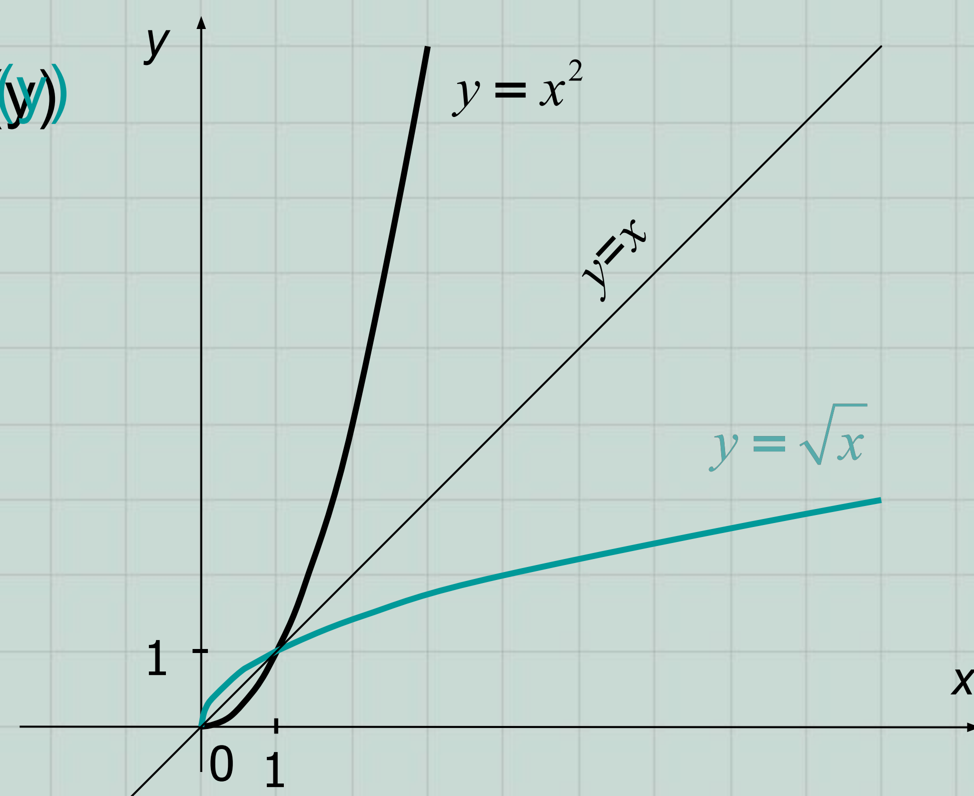
Пример 1. Функция $y=x^2$ не является обратимой на $D(y)=$□, т.к. при $x=3$ или -3 функция принимает одно и то же значение 9, а значит, обратная зависимость функцией не является. Однако, на области x∈[0; +□) данная функция обратима и обратной для неё является знакомая Вам функция $y=\sqrt{x}$.



$$D\left(x^2\right)=E\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$$

$$E\left(x^2\right)=D\left(\sqrt{x}\right)=[0;+\infty)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{x^2}=x$$

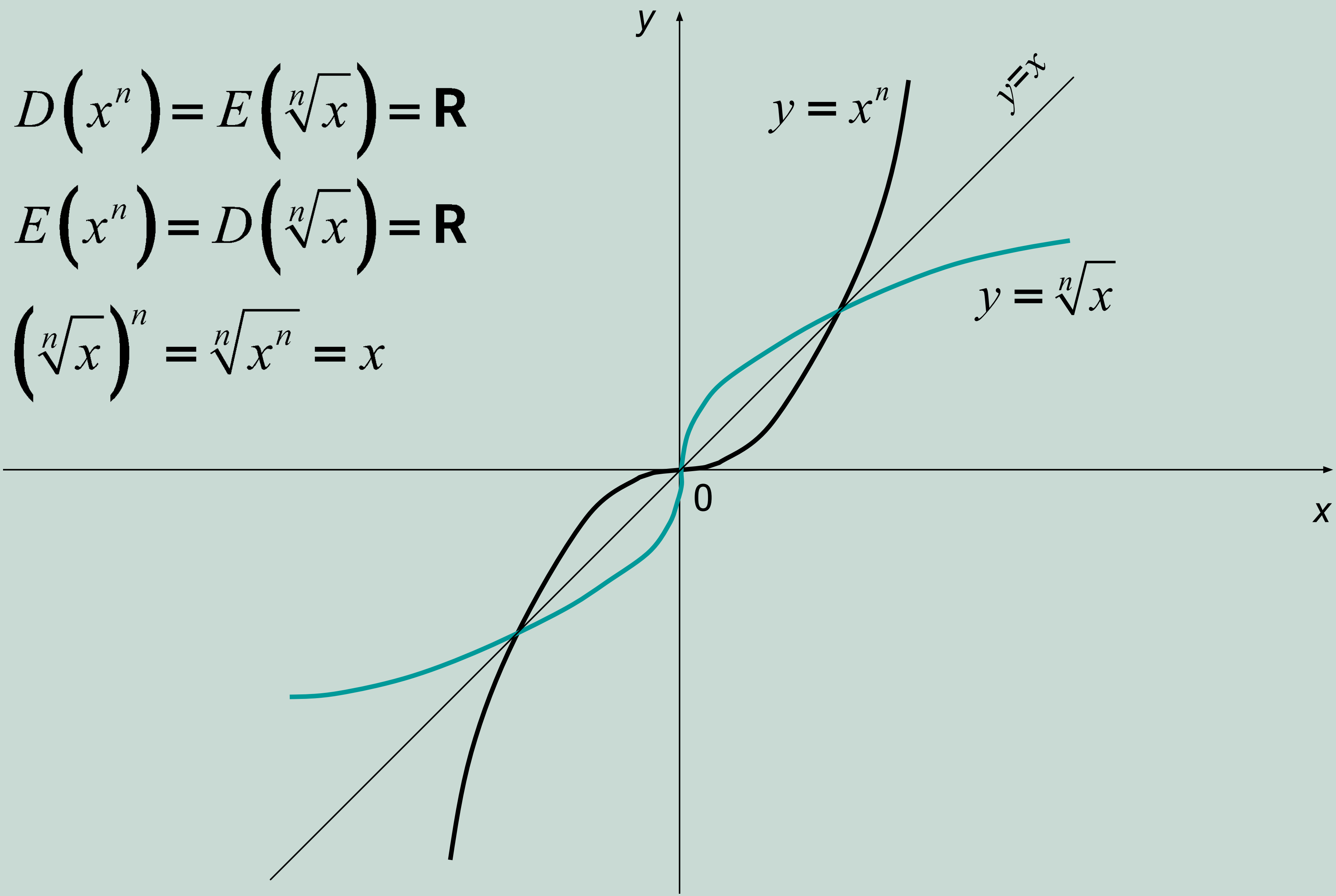


Пример 2. Любая степенная функция $y = x^n$ с нечетным натуральным показателем является обратимой (проверьте самостоятельно).

$$D\left(x^n\right) = E\left(\sqrt[n]{x}\right) = \mathbf{R}$$

$$E\left(x^n\right) = D\left(\sqrt[n]{x}\right) = \mathbf{R}$$

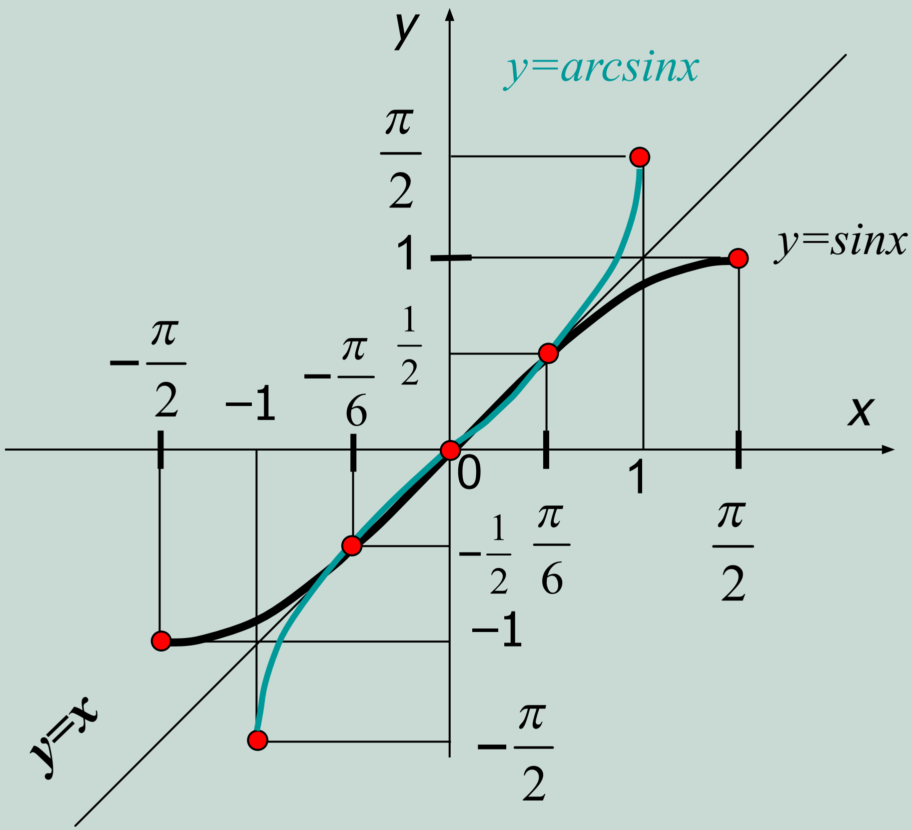
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$



Пример 3. Рассмотрим тригонометрическую функцию $y = \sin x$.

Постарайтесь самостоятельно ответить на вопросы: 1) является ли данная функция обратимой на своей области определения? 2) на какой области данная функция обратима? 3) назовите обратную на этой области функцию; 4) постройте графики обеих функций.

Ответ: 1) нет; 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $y = \arcsin x$; 4) см.рис..



Рассмотрим теперь показательную функцию $y=a^x$, которую Вы изучили. Так как эта функция является монотонной, в зависимости от основания степени a – монотонно возрастающей или монотонно убывающей (вспомните соответствующие условия этого), то она обратима на всей своей области определения. Составим обратную функцию описанным выше методом:

$$y = a^x \Rightarrow x = a^y.$$

Теперь перед нами встает проблема выражения из последнего равенства переменной y (показателя степени, в который возводится положительное число a) через x, чтобы получить привычную формулу зависимости. Это делается с помощью нового понятия – ***логарифма числа по основанию a***:

$$\boxed{x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x.}$$

Читают так: «логарифм икс по основанию a».

Определение. **Логарифмом** числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число x.

Число a называется *основанием логарифма*, число x называют *подлогарифмическим выражением*.

Пример. $log_3 9 = 2$, т.к. $3^2=9$; $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

А теперь постарайтесь ответить на вопрос: в какую степень нужно возвести число 3, чтобы результатом этой степени получилось число 10?

$$3^{?} = 10$$

$$3^{log_3 10} = 10$$

Примечание 1. Если основанием логарифма является число **10**, то такой логарифм называется ***десятичным*** и обозначается lg.

Пример: $lg\, 0,0001 = -4$

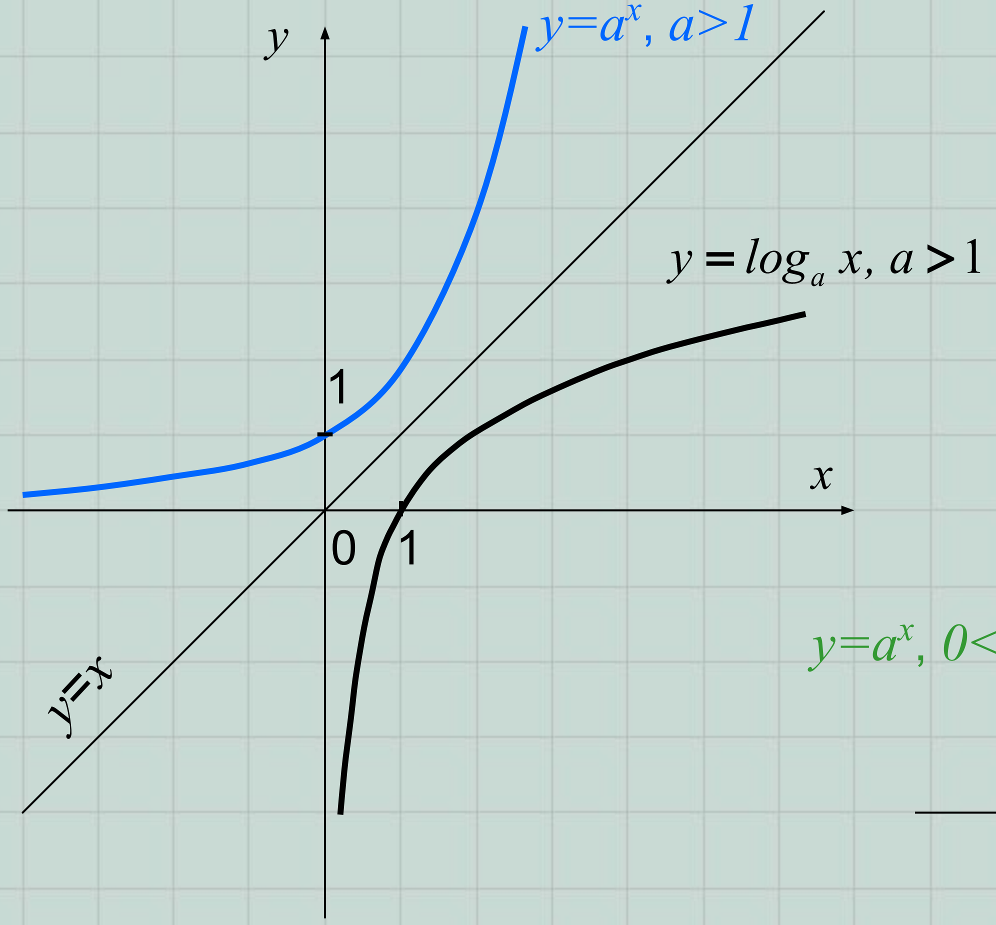
Примечание 2. Если основанием логарифма является число **е**, то такой логарифм называется ***натуральным*** и обозначается ln.

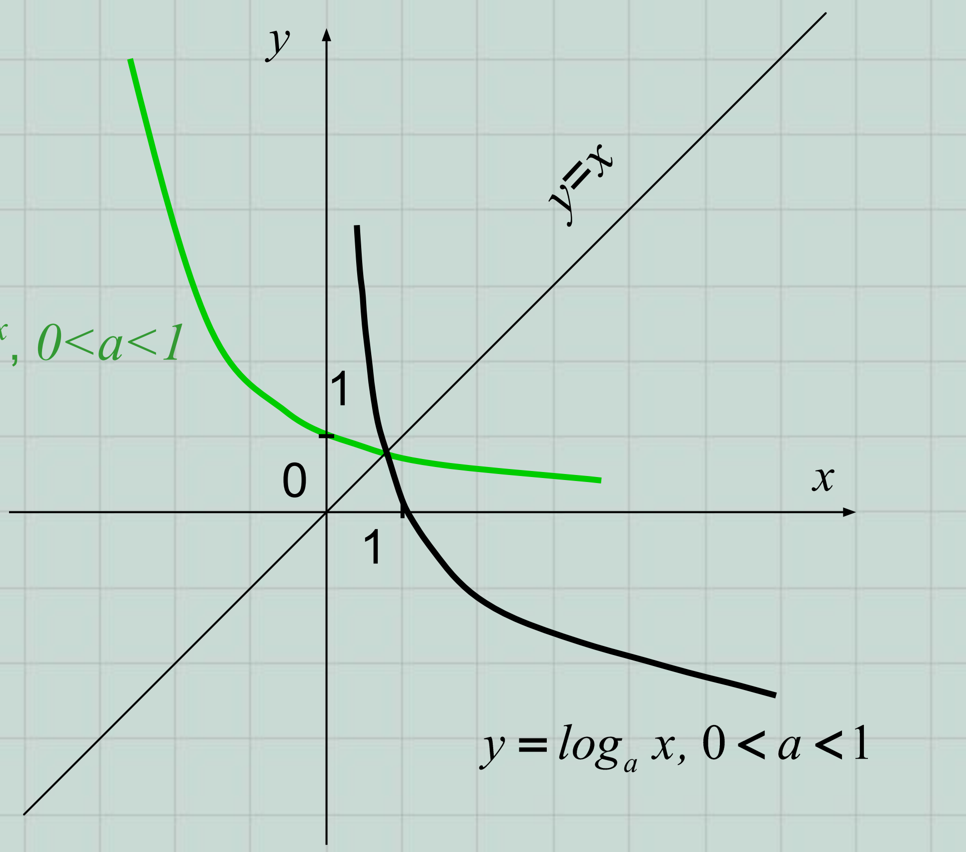
Пример: $ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$

Примечание 3. Т.к. основание показательной функции $y=a^x$ число $a>0$, $a \neq 1$, то основание логарифма обладает такими же свойствами.

Примечание 4. Функция, заданная формулой $y=log_a x$, где $a>0$, $a \neq 1$ называется ***логарифмической*** функцией.

Взаимное расположение графиков показательной и логарифмической функций:





Используя данные рисунки сформулируйте и запишите свойства логарифмической функции.

Некоторые полезные свойства логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b$$ - основное логарифмическое тождество

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y| \qquad \log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n} \qquad \log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$ - формула перехода к новому основанию