

# Применение производной к исследованию функций

презентация учителя математики  
Верхнегерасимовской СШ I-III ступеней  
Горбань Натальи Геннадиевны

Понятие **«производная»** возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики.

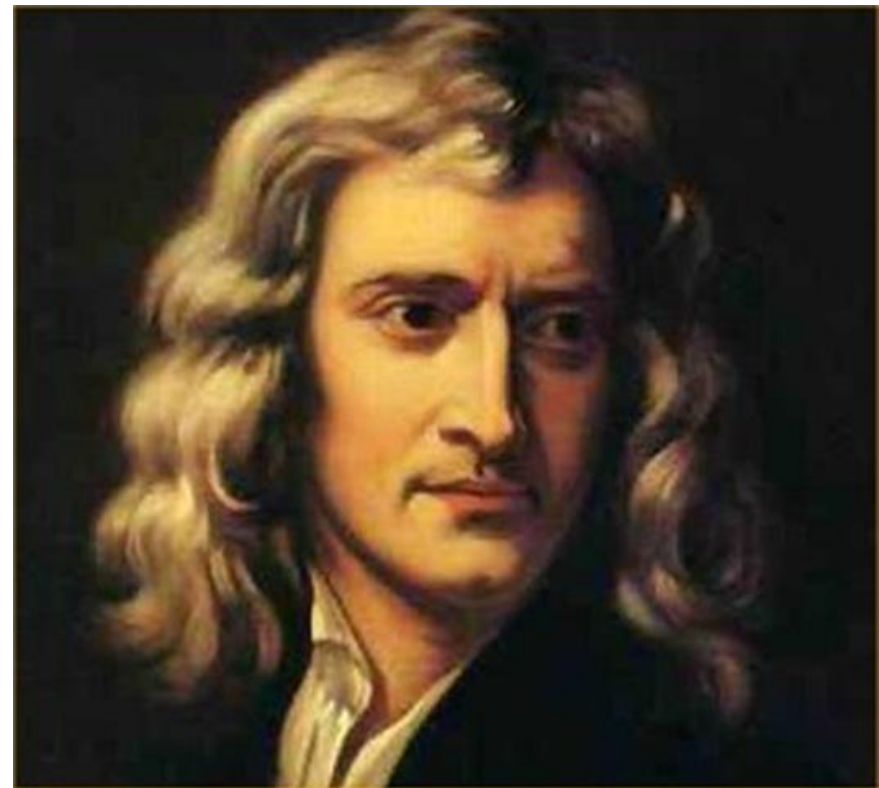
~~Готфрид Вильгельм фон~~

Лейбниц

Исаак Ньютон



1 июля 1646 — 14 ноября  
1716,



25 декабря 1642 — 20 марта 1727

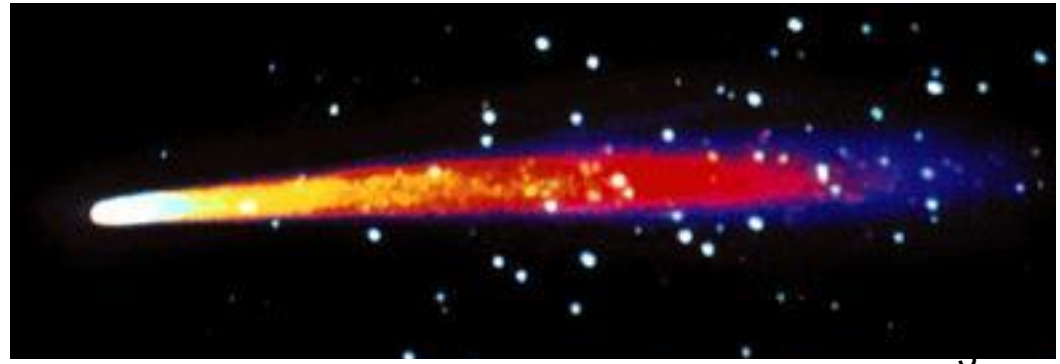


Используя методы дифференциального исчисления английский астроном, математик **Эдмон Галлей** ещё в XVII веке предсказал возвращение кометы Галлея.

В 1705 году Эдмонд Галлей предсказал, что комета, которую наблюдали в 1531, 1607 и 1682 годах, должна возвратиться в 1758 году (что, увы, было уже после его смерти). Комета действительно возвратилась, как было предсказано, и позже была названа в его честь.



Комета Галлея вернется во внутреннюю Солнечную систему в следующий раз в 2061 году.





# Признак возрастания и убывания функции

---

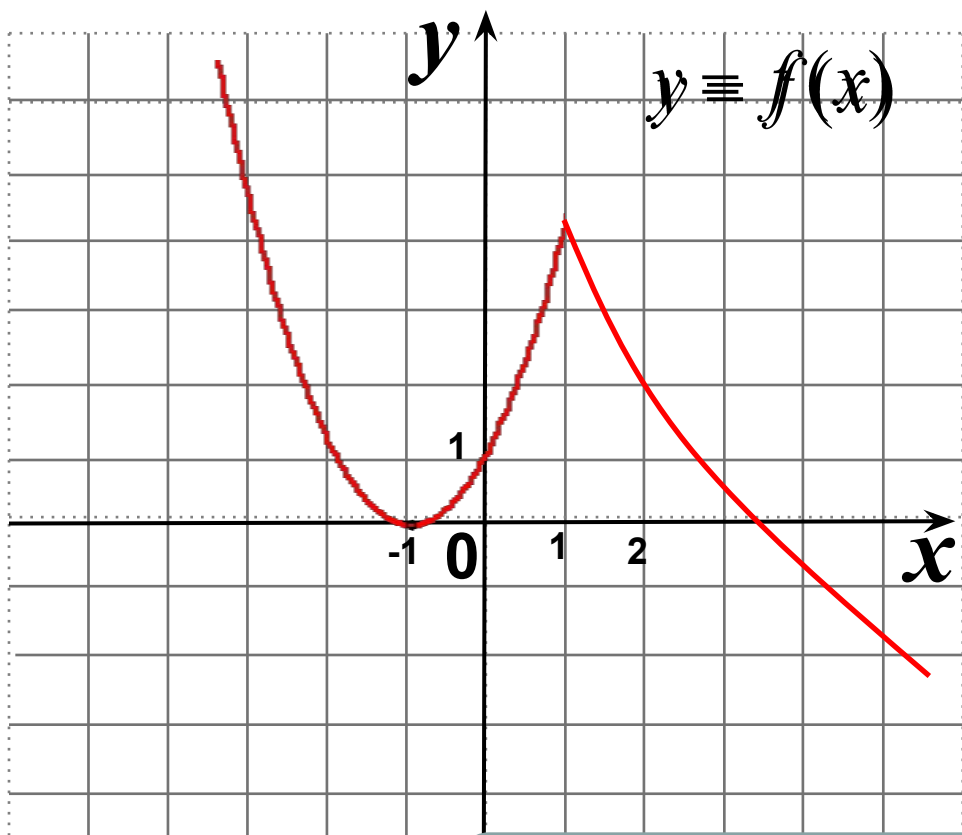
*Достаточный признак убывания функции*

*Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $(a; b)$ ,  
то функция  $f$  убывает на интервале  $(a; b)$*

*Достаточный признак возрастания функции*

*Если  $f'(x) > 0$  в каждой точкех интервала  $(a; b)$ ,  
то функция  $f$  возрастает на интервале  $(a; b)$*

---

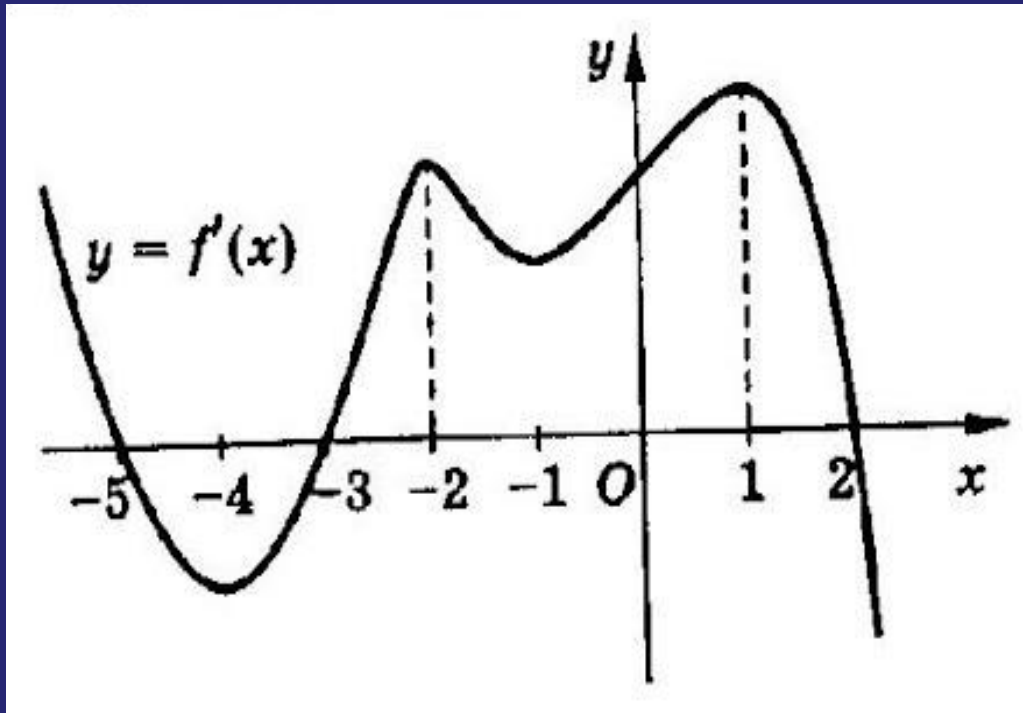


По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на  $\mathbb{R}$

**Ответ:**

$$f'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (-1; 1)$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{на} \quad (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



По графику производной функции  $y = f'(x)$  определите промежутки возрастания и промежутки убывания функции  $y = f(x)$

$f(x)$  возрастает на  $(-\infty; -5) \cup (-3; 2)$

$f(x)$  убывает  $(-5; -3) \cup (2; +\infty)$

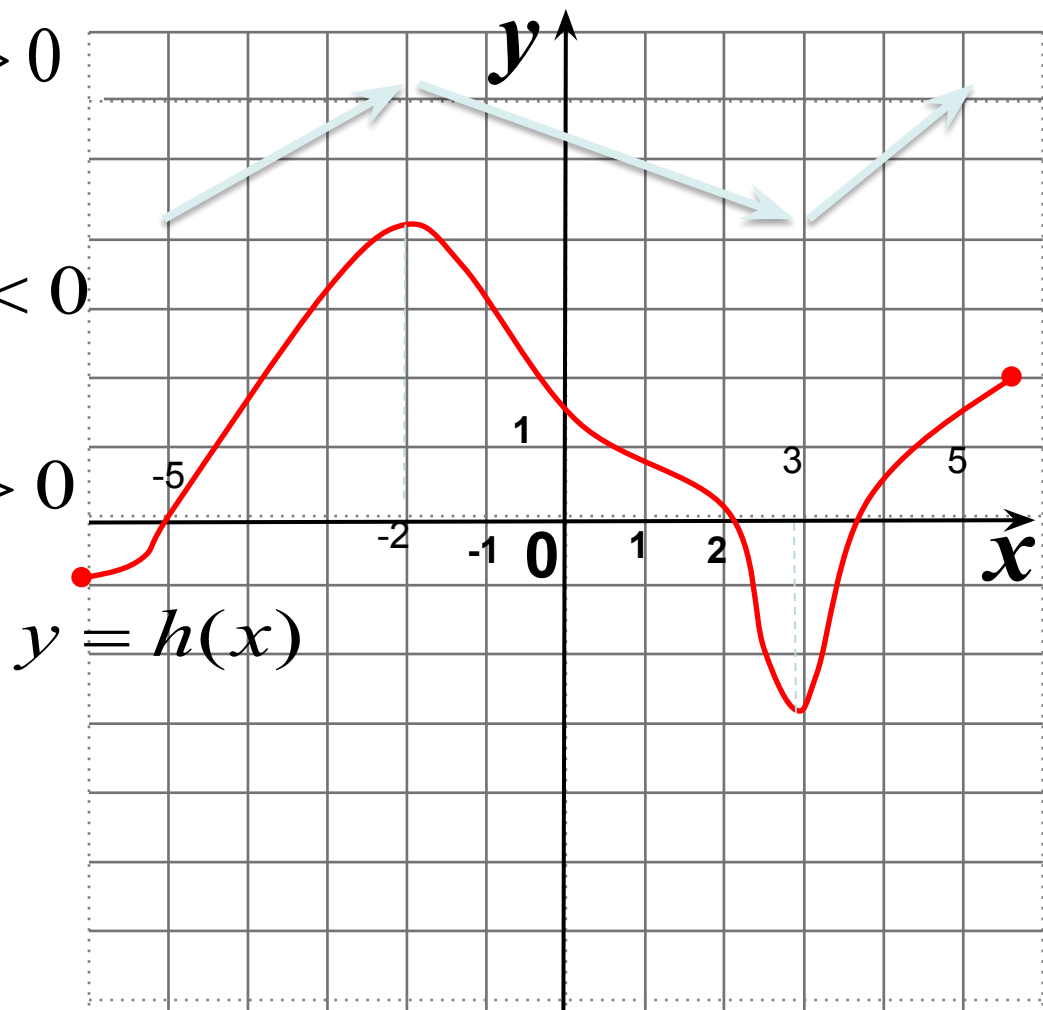
**Ответ:**

На рисунке изображен график дифференцируемой функции  $y = h(x)$ . Определите знак производной функции на промежутках

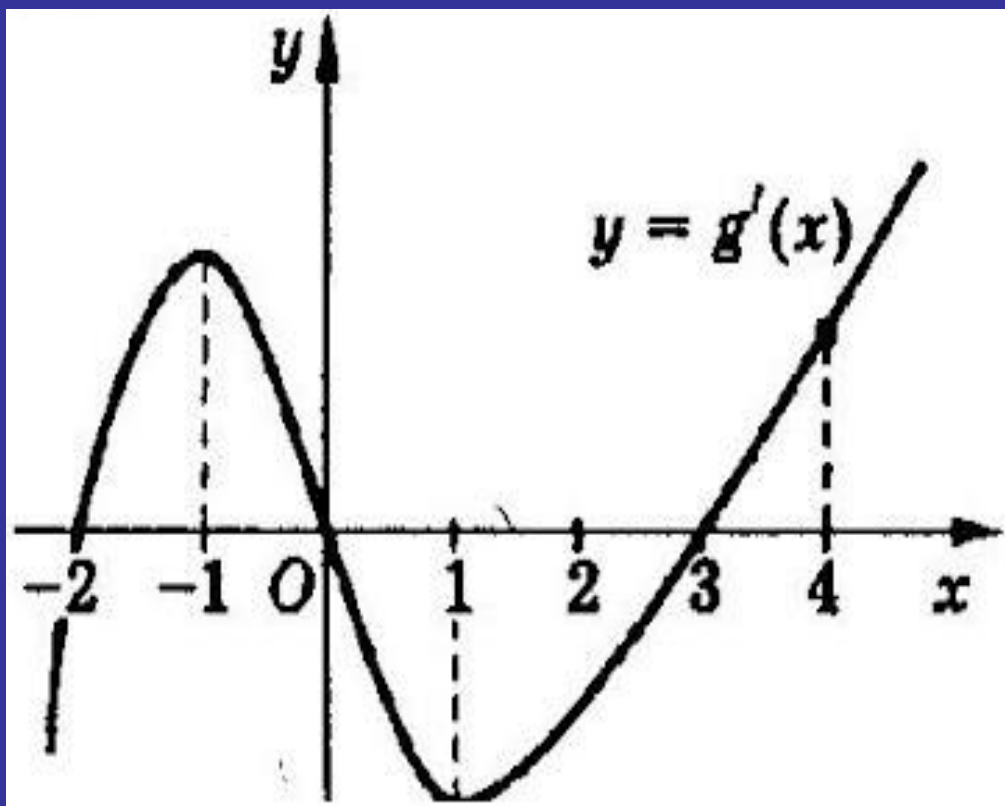
а)  $[-5; -2)$   $h'(x) > 0$

б)  $(-2; 3)$   $h'(x) < 0$

в)  $(3; 5]$   $h'(x) > 0$





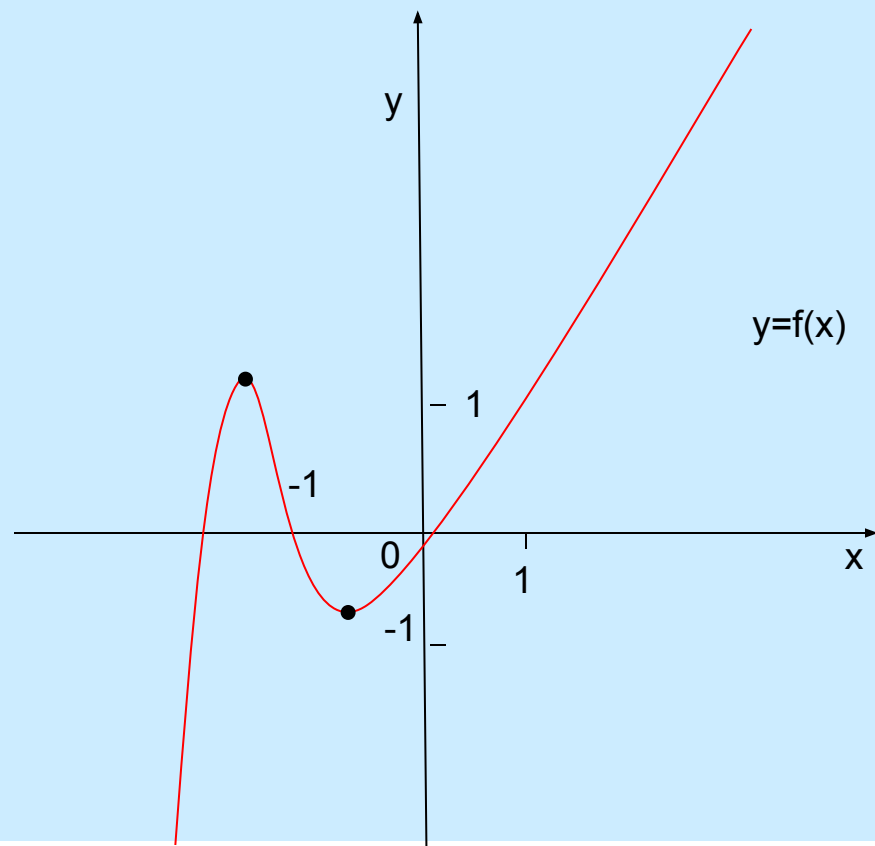


Укажите критические точки функции  $o = g(x)$ , используя график производной функции  $o' = g'(x)$

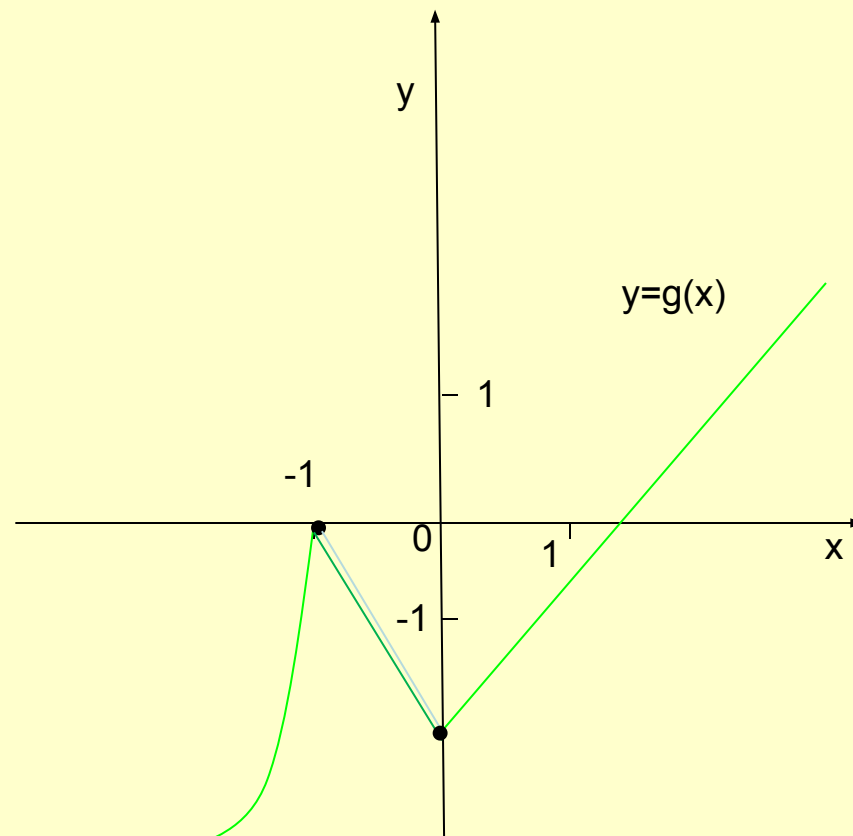
**Ответ:**

$$g'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = -2, x = 0, x = 3$$

Внутренние точки области определения функции, в которых **производная равна нулю** или **производная не существует**, называются **критическими**.



Касательная в таких точках графика параллельна оси **OX**, а поэтому производная в этих точках **равна 0**;



Касательная в таких точках графика **не существует**, а поэтому производная в этих точках **не существует**.

# критические точки

производная равна нулю  
(стационарные точки)

производная не существует

точка  
максимума  
«+» на «-»

точка  
минимума  
«-» на «+»

точка  
перегиба  
знак  
не меняется

точка  
максимума  
«+» на «-»

точка  
минимума  
«-» на «+»

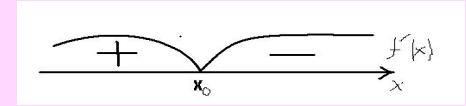
точка  
излома  
знак  
не меняется

*плавные линии*

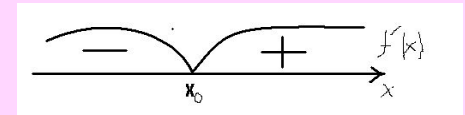
*угловатые линии*

## Достаточное условие существования экстремума функции:

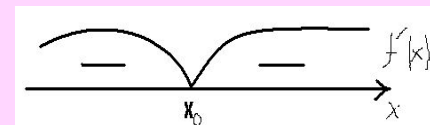
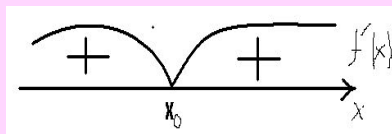
- 1) Если при переходе через критическую точку  $x_0$  функции  $f(x)$  ее производная меняет знак с «+» на «-», то  $x_0$  – точка максимума функции  $f(x)$ .



- 2) Если при переходе через критическую точку  $x_0$  функции  $f(x)$  ее производная меняет знак с «-» на «+», то  $x_0$  – точка минимума функции  $f(x)$ .



- 3) Если при переходе через критическую точку  $x_0$  функции  $f(x)$  ее производная не меняет знака, то в точке  $x_0$  экстремума нет.





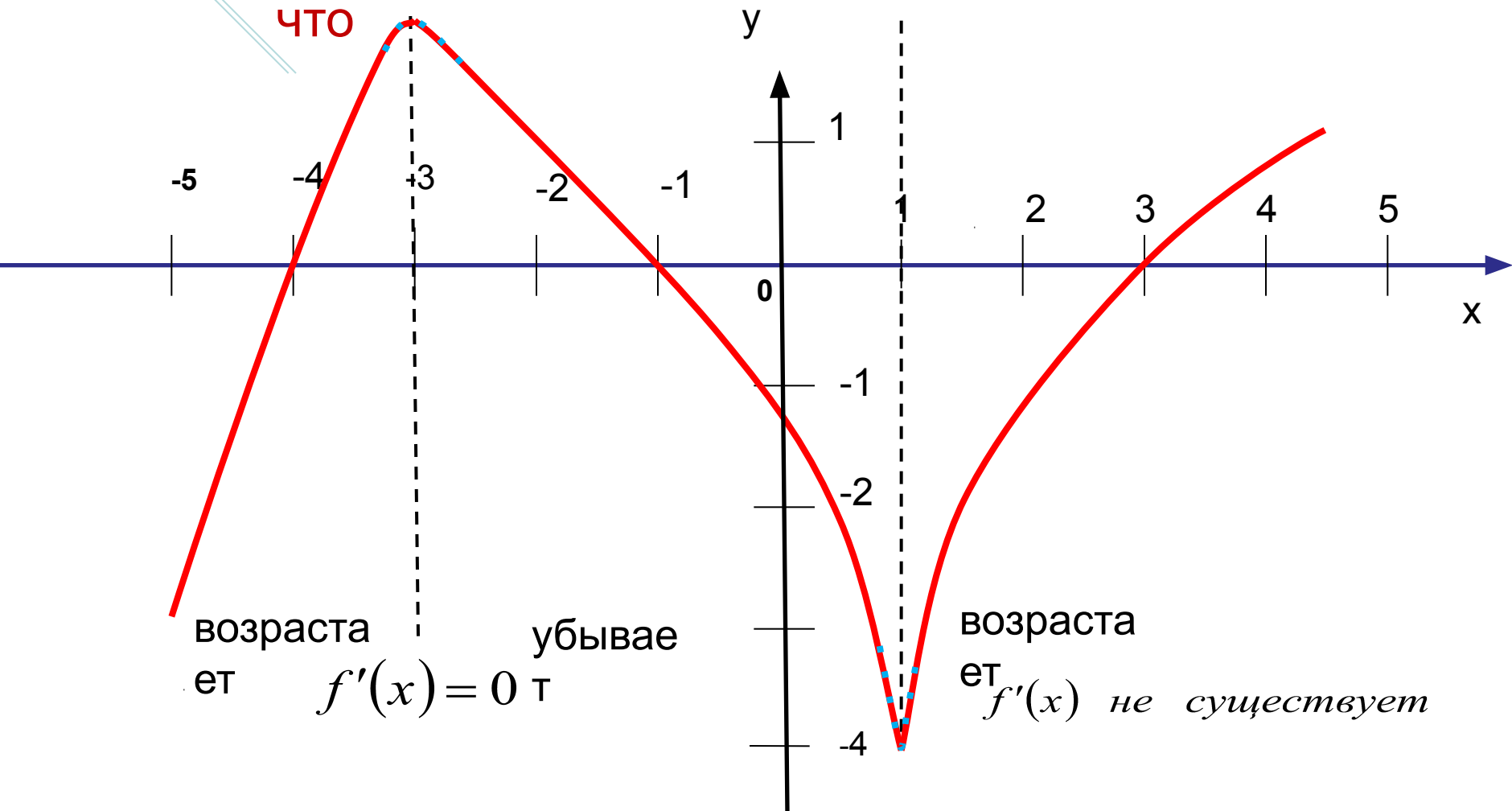
Исследование функций с помощью производной и построение графиков функций.



# Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

Построить эскиз графика функции, зная, что



| x       | $(-\infty; -3)$ | -3  | $(-3; 1)$  | 1             | $(1; +\infty)$ |
|---------|-----------------|-----|------------|---------------|----------------|
| $f'(x)$ | +               | 0   | -          | Не существует | +              |
| $f(x)$  | $\nearrow$      | 2   | $\searrow$ | -4            | $\nearrow$     |
|         |                 | max |            | min           |                |

## Образец выполнения работы.

$$y = \frac{1}{5}(x^3 + 4x^2 - 11x - 30)$$

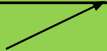
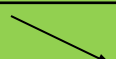

### Оформление работы учеником.

а)  $(-\infty; +\infty)$ ;

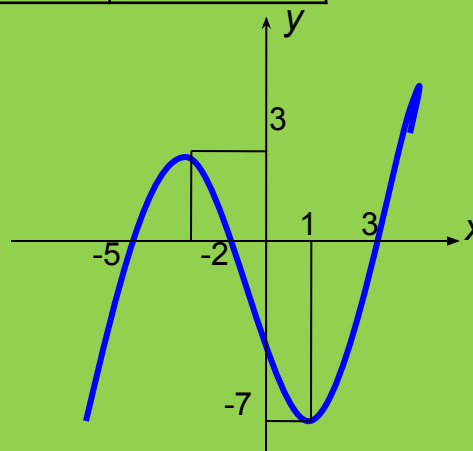
б)  $y'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 8x - 11) = \frac{3}{5}\left(x + \frac{11}{3}\right)(x - 1)$ ;

в) критические точки:  $-\frac{11}{3}$ ; 1.

г) по результатам исследования составляем таблицу:

|           |   |                  |   |                 |   |
|-----------|---|------------------|---|-----------------|---|
| $x$       | $\left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$   | $-3\frac{2}{3}$  | $\left(-3\frac{2}{3}; 1\right)$   | $1$             | $(1; +\infty)$  |
| $y'(x)$   | +   | 0                | -   | 0               | +   |
| $y(x)$    |  | $2\frac{26}{27}$ |  | $-7\frac{1}{5}$ |  |
| экстремум |   | <i>max</i>       |   | <i>min</i>      |   |

д) строим график функции:







# Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений



## Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $[a;b]$ , нужно

1. вычислить её значения  $f(a)$  и  $f(b)$  на концах данного промежутка
2. вычислить её значения в критических точках, принадлежащих этому промежутку
3. выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Записывают так:  **$\max_{[a;b]} f(x)$**  и  **$\min_{[a;b]} f(x)$**