Предел последовательности и функции

Цели:

- Сформировать понятие предела последовательности, функции;
- Ввести понятие сходящихся и расходящихся последовательностей, горизонтальной асимптоты;
- Сформировать умения вычисления пределов.

Пояснительная записка

Изучение данного учебного элемента разбито на несколько этапов. После каждого этапа вам необходимо будет выполнить практические задания в своей рабочей тетради.

По окончании изучения элемента вам предстоит выполнить контрольную работу по этой теме также в своей тетради. Рабочую тетрадь по окончании изучения сдать на проверку учителю.

Желаем удачи!

Сопутствующие учебные материалы

- Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл.: Учебник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. : 2-е – изд. – М.: Мнемозина, 2001;
- Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл.: Задачник для общеобразоват. Учреждений / А. Г. Мордкович, Л. О. Денисова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчикова. - 2-е – изд. – М.: Мнемозина, 2001;
- Рабочая тетрадь.

Опорные знания

Для успешного изучения данного учебного элемента вы должны знать:

- Что такое функция;
- Что такое числовая последовательность;
- Какими свойствами обладают числовые последовательности.

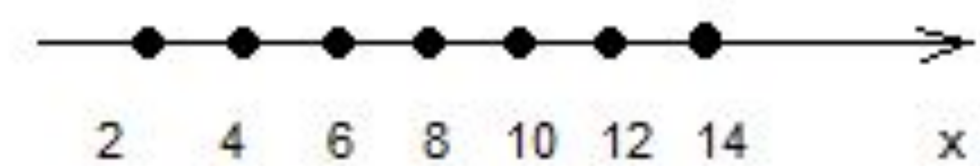
Предел числовой последовательности

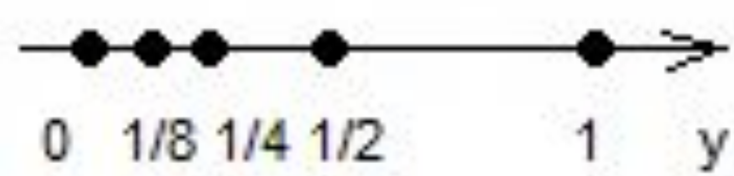
Рассмотрим две числовые последовательности:

(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, …, $2n$,…;

(y_n) : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … $\frac{1}{2^n}$, …

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.
Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



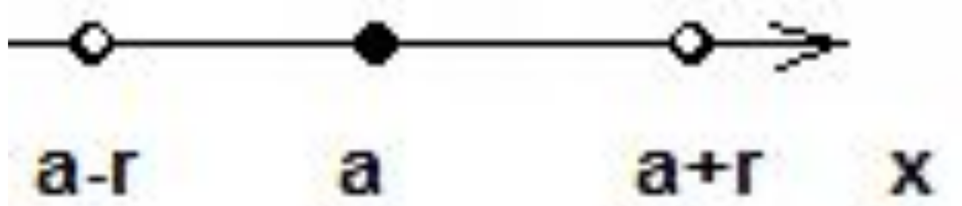


Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее…

<u>Определение 1.</u> *Пусть a - точка прямой, а r - положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют* ***окрестностью точки*** a *, а число r -* ***радиусом окрестности****.*

Геометрически это выглядит так:



Например

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Определение 2. *Число* b *называют* ***пределом последовательности*** y_n, *если в любой заранее выбранной окрестности точки* b *содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

Пишут: $y_n \to b$.

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Комментарий

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Возьмем окрестность точки r радиуса,

r, то есть $(b\text{-}r,\ b+r)$. Тогда существует такой номер n_1,
начиная с которого все последующие члены
последовательности содержатся внутри указанной
окрестности, например, y_{n+1}, y_{n+8} и т. д., а вне этой
окрестности содержится конечное числа членов
последовательности y_1, y_{n-1}, y_{n-5} и т. д.

При этом, если выбрать другую окрестность (другого
радиуса), то для нее также найдется какой – то номер, начиная с
которого все последующие члены последовательности будут
попадать в указанный интервал.

Пример.

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0.1$, если

1. $x_n = \dfrac{1}{n^2}, \;\; a = 0;$

Решение.

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow \left(\sqrt{10};+\infty\right) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Пример

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r=0.1, если a=0, $x_n=$ $\frac{1}{n^2}$

Решение

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<0.1$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right|<0.1$$

$$\frac{1}{n^2}<0.1$$

$$n^2>10 \Rightarrow \left(\sqrt{10};+\infty\right) \ni n \Rightarrow n_0=4$$

Ответ: начиная с n_0=4 все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность (-0.1;0.1)

Практические задания

1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

$$а)\ a = 0,\ r = 0.1; \qquad б)\ a = -3,\ r = 0.5;$$

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

$$а)\ (2.1,\ 2.3); \qquad б)\ (-7,\ -5)?$$

3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r, если:

$$а)\ x_1 = 1,\ a = 2,\ r = 0.5; \quad б)\ x_1 = -0.2,\ a = 0,\ r = 0.3?$$

Содержание

Итоговое задание

Итоговое практическое задание

1. Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r:

$$а)\ x_n = \frac{1}{2n},\ a = 0,\ r = 0{,}1; \quad б)\ x_n = 3 + \frac{1}{n^2},\ a = 3,\ r = 0{,}2.$$

2. Постройте график последовательности y_n и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$а)\ y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \qquad б)\ y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$

Итоговое практическое задание

3. Найдите n- й член геометрической прогрессии (b_n) , если:

$$a)\ S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3; \qquad б)\ S = 20,\ q = 22,\ n = 4.$$

4. Вычислить:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}; \qquad б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2};$$

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\left(12-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{8}{x^2}-2\right); \qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{x+3};$$

$$д)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}; \qquad г)\ \lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{64-x^3}.$$