

# Понятие производной

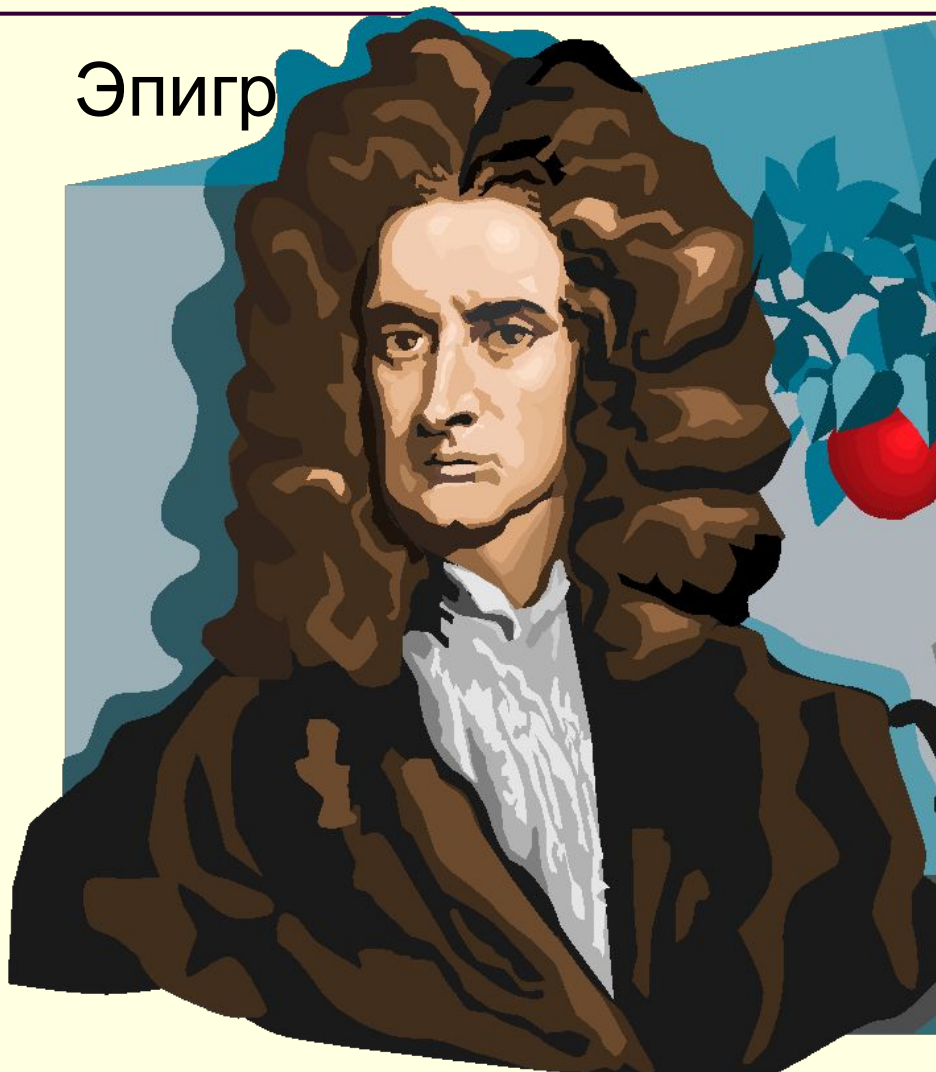
Алгебра и начала анализа  
11 класс





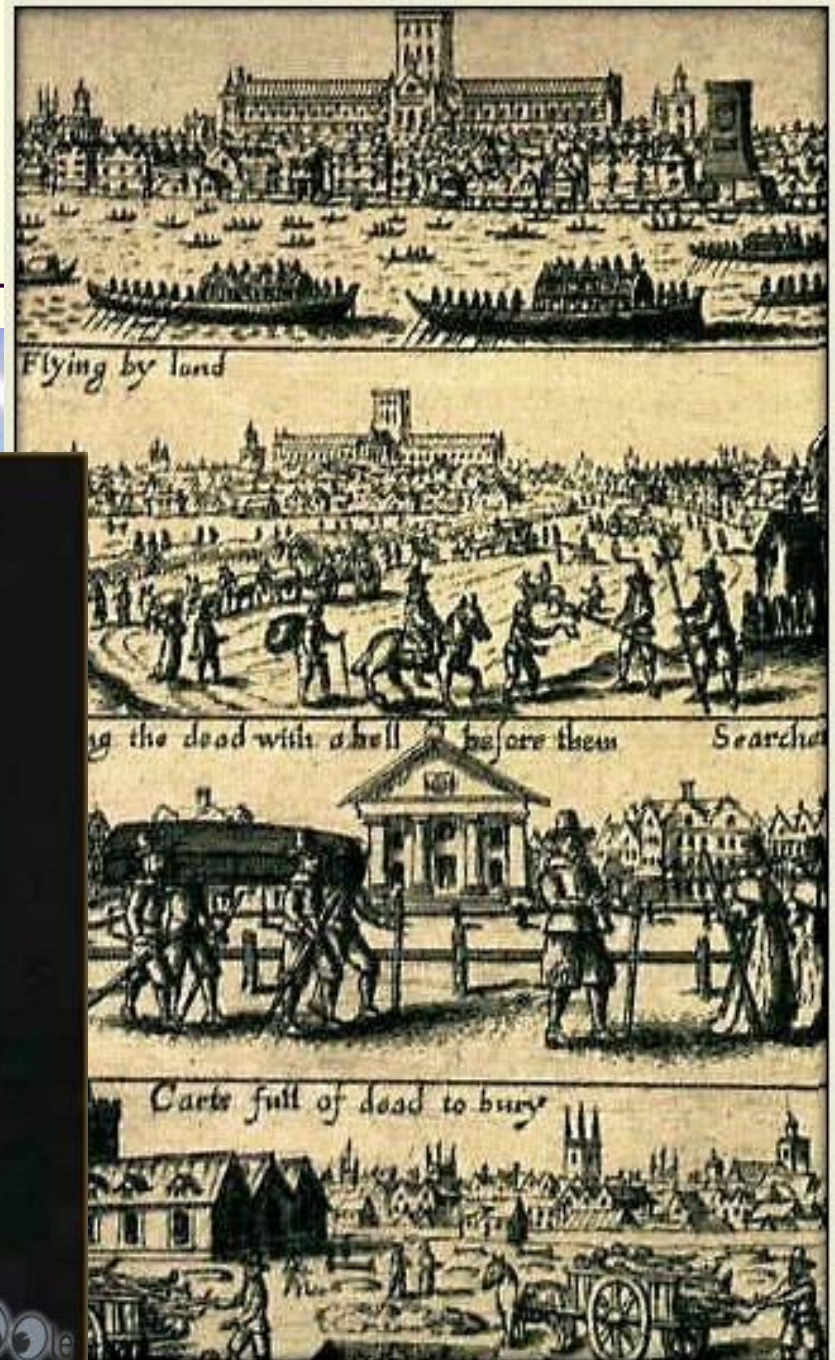
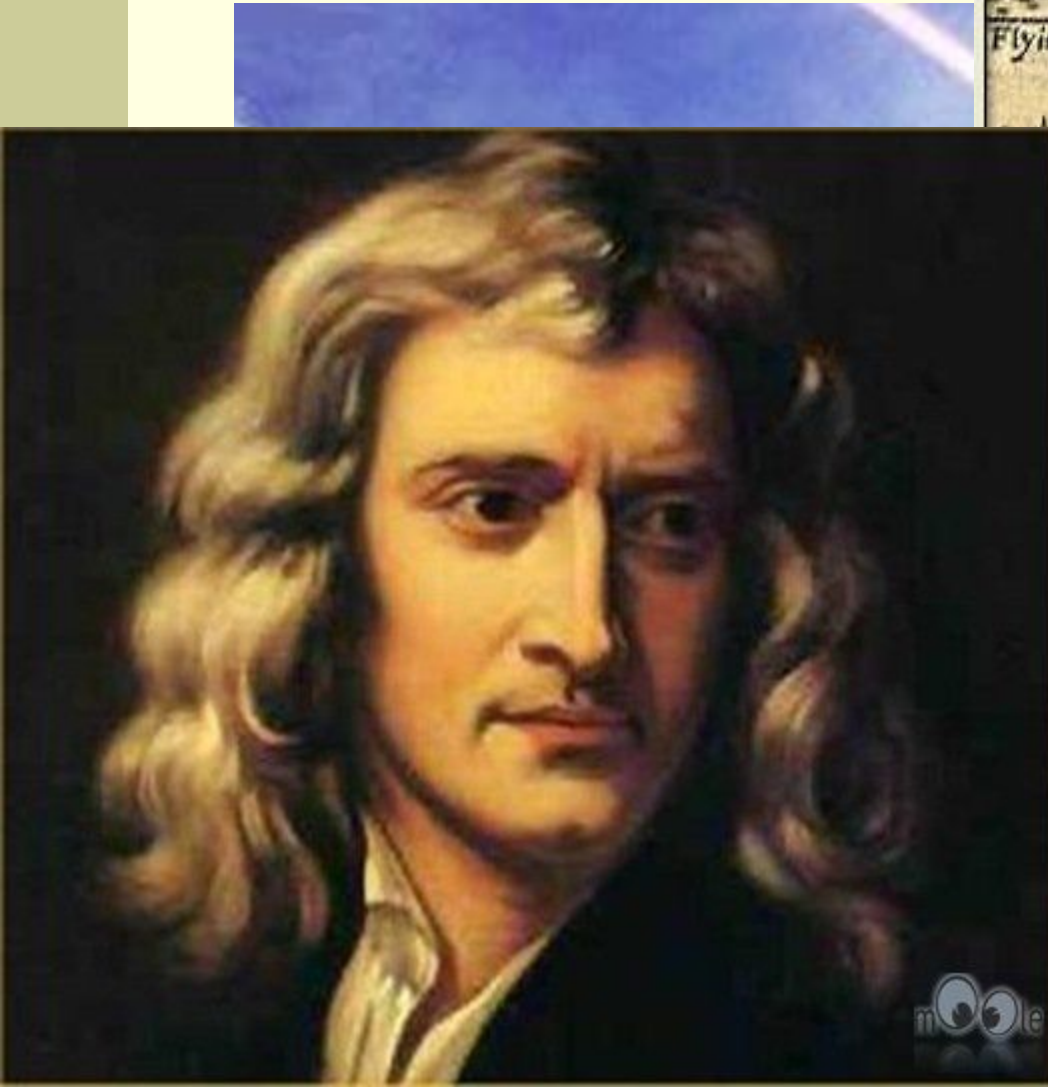
# Сегодня у нас праздник!

Эпигр



- 
- **Что такое высшая математика?**
  - **Когда она появилась?**
  - **Что такое производная?**

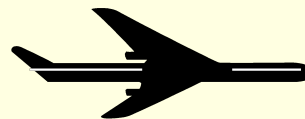
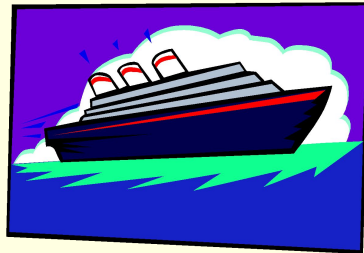
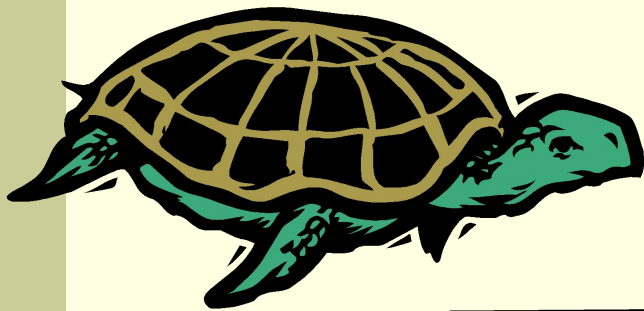
# Как это было...

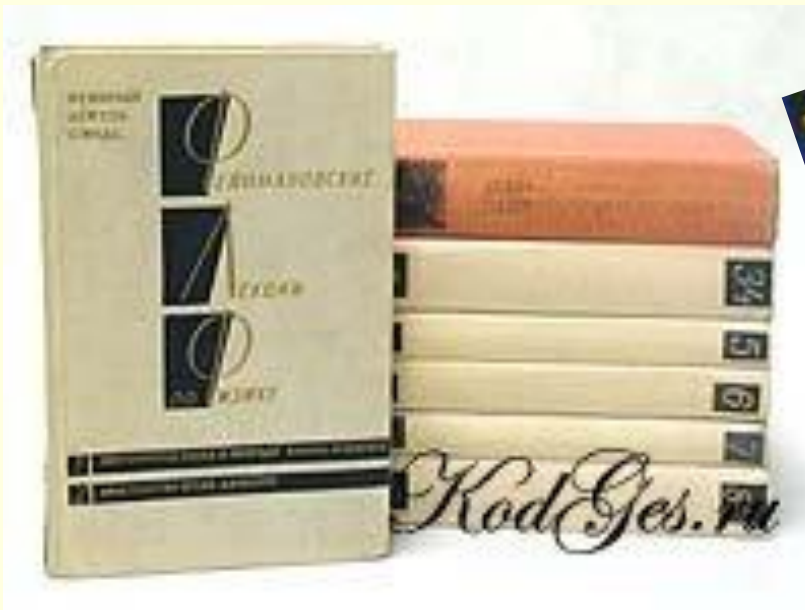




Ответим на вопрос:

# ■ Что такое скорость?





# Возможно, это было так...

---

- Пусть точка движется вдоль прямой по закону  $S(t)$ .

Тогда за промежуток времени  $t$  точка проходит расстояние  $S(t)$ .

Пусть  $\Delta t$  – малый промежуток времени.

Путь, пройденный за время  $t + \Delta t$ , равен  $S(t + \Delta t)$ .

Тогда средняя скорость

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$



- Очевидно, если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $V_{\text{ср.}} \rightarrow V_{\text{мгн.}}$

Значит,

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или  $v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ ,

где  $\Delta t$  – приращение времени

$\Delta S$  - приращение пути.

# А в это время...

---

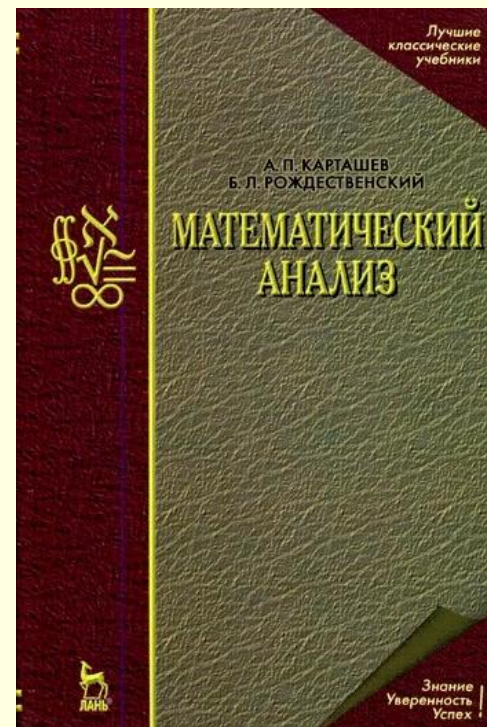
- **Лейбниц Готфрид Вильгельм, немецкий математик, физик, философ.**

**Лейбниц – прямая противоположность И.Ньютону**



# И еще:

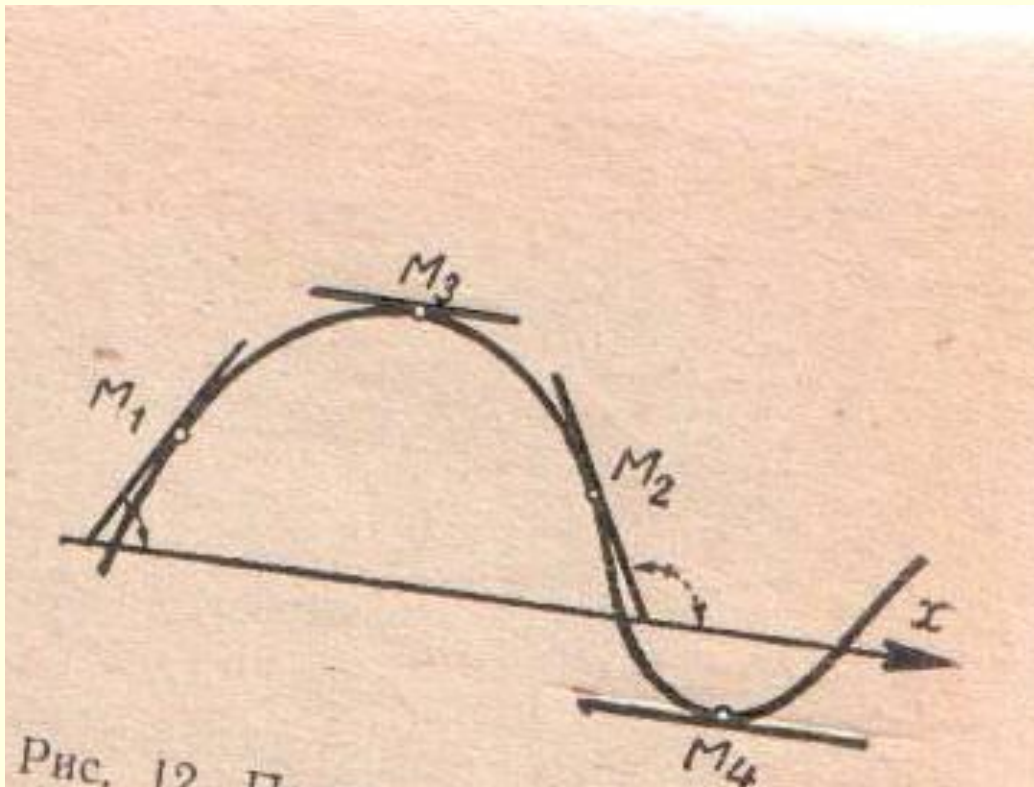
- Одновременно, но независимо друг от друга они подошли к открытию анализа бесконечно малых.





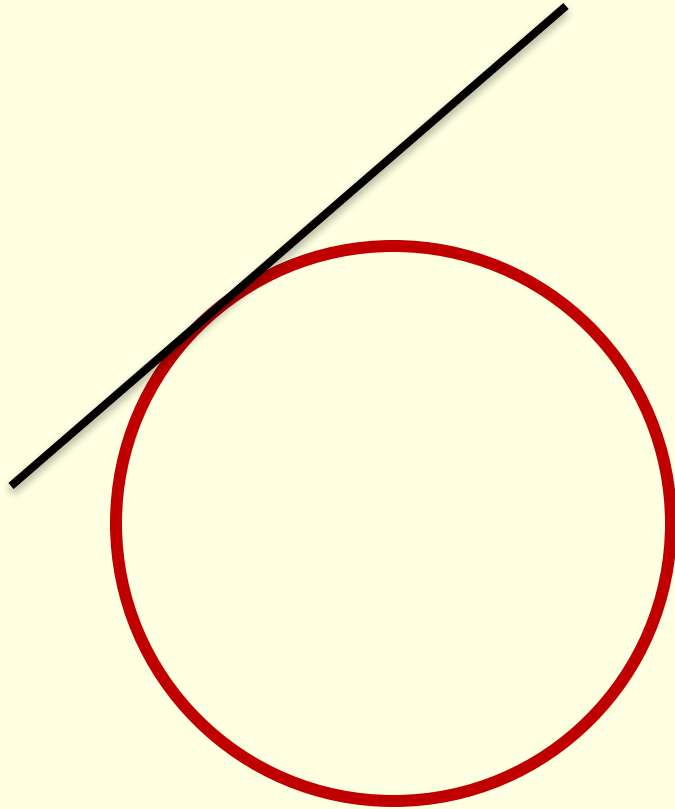
# Возможно, это было так...

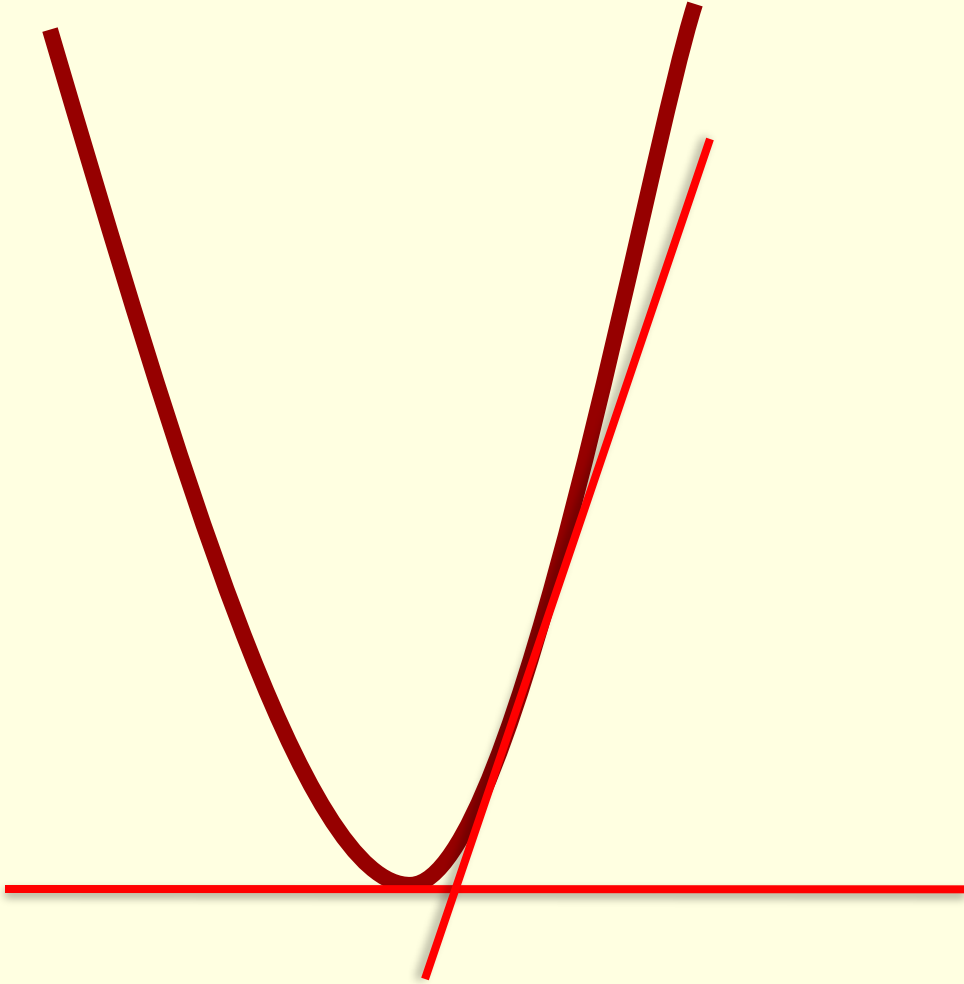
- **Началось все с касательной!!!**



# А что такое касательная?

---







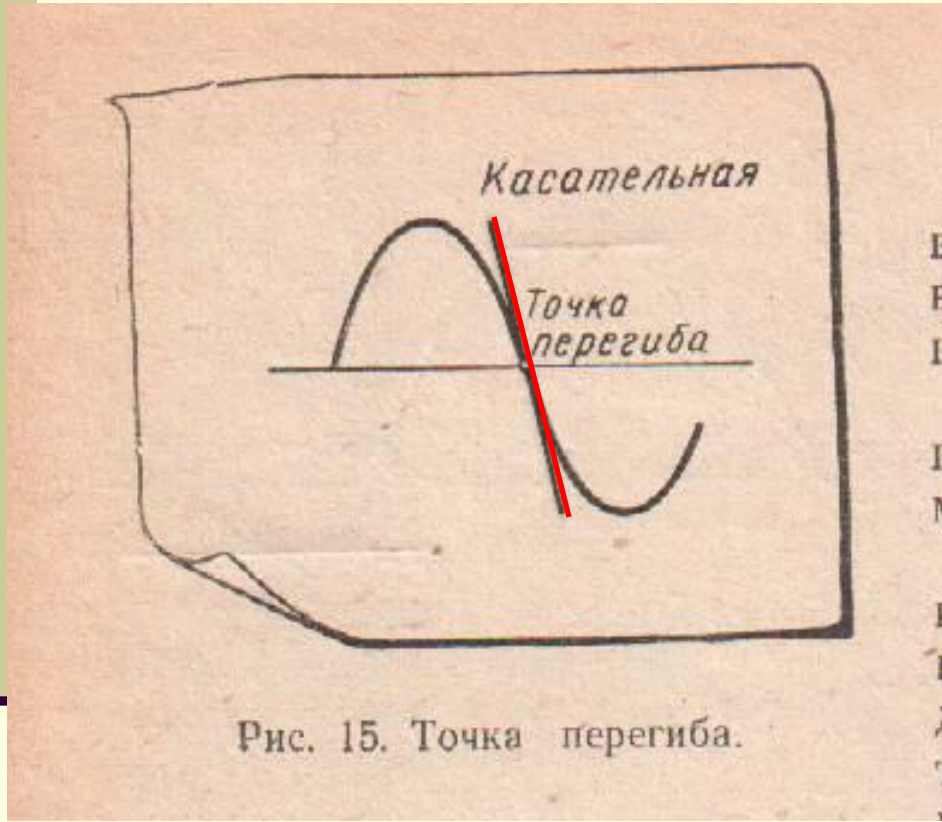
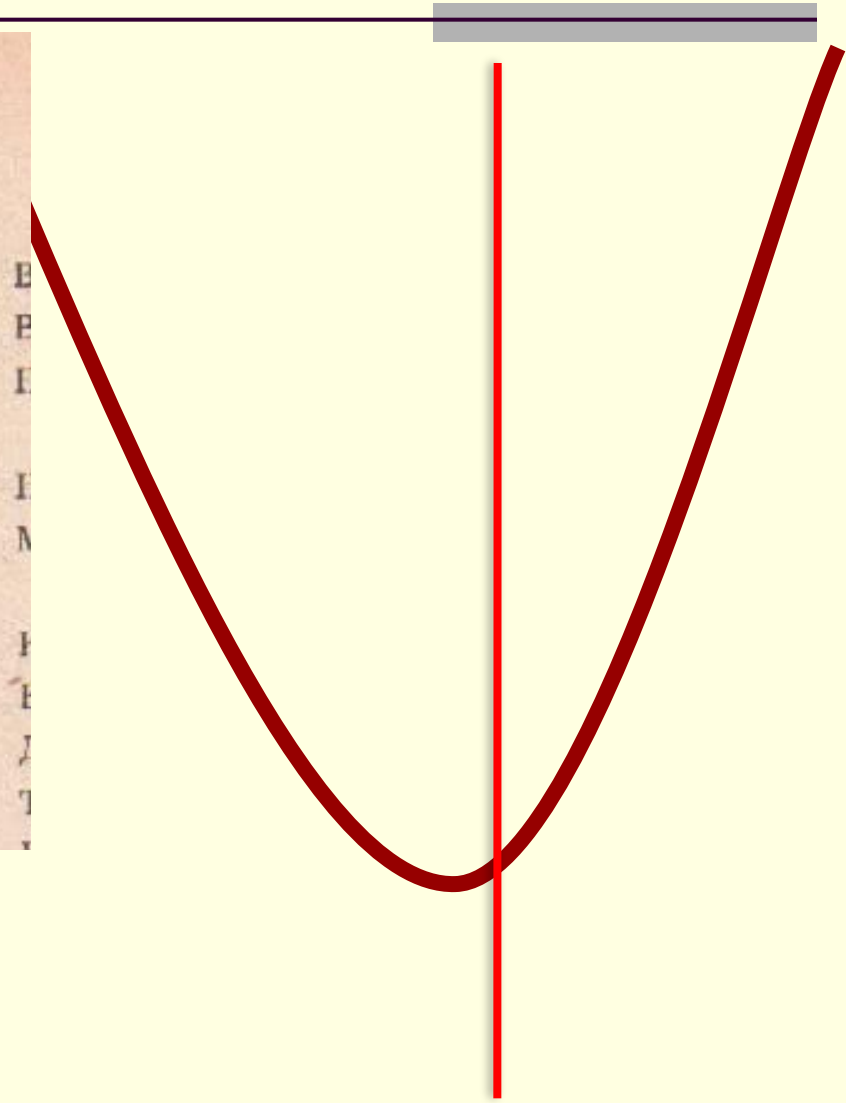
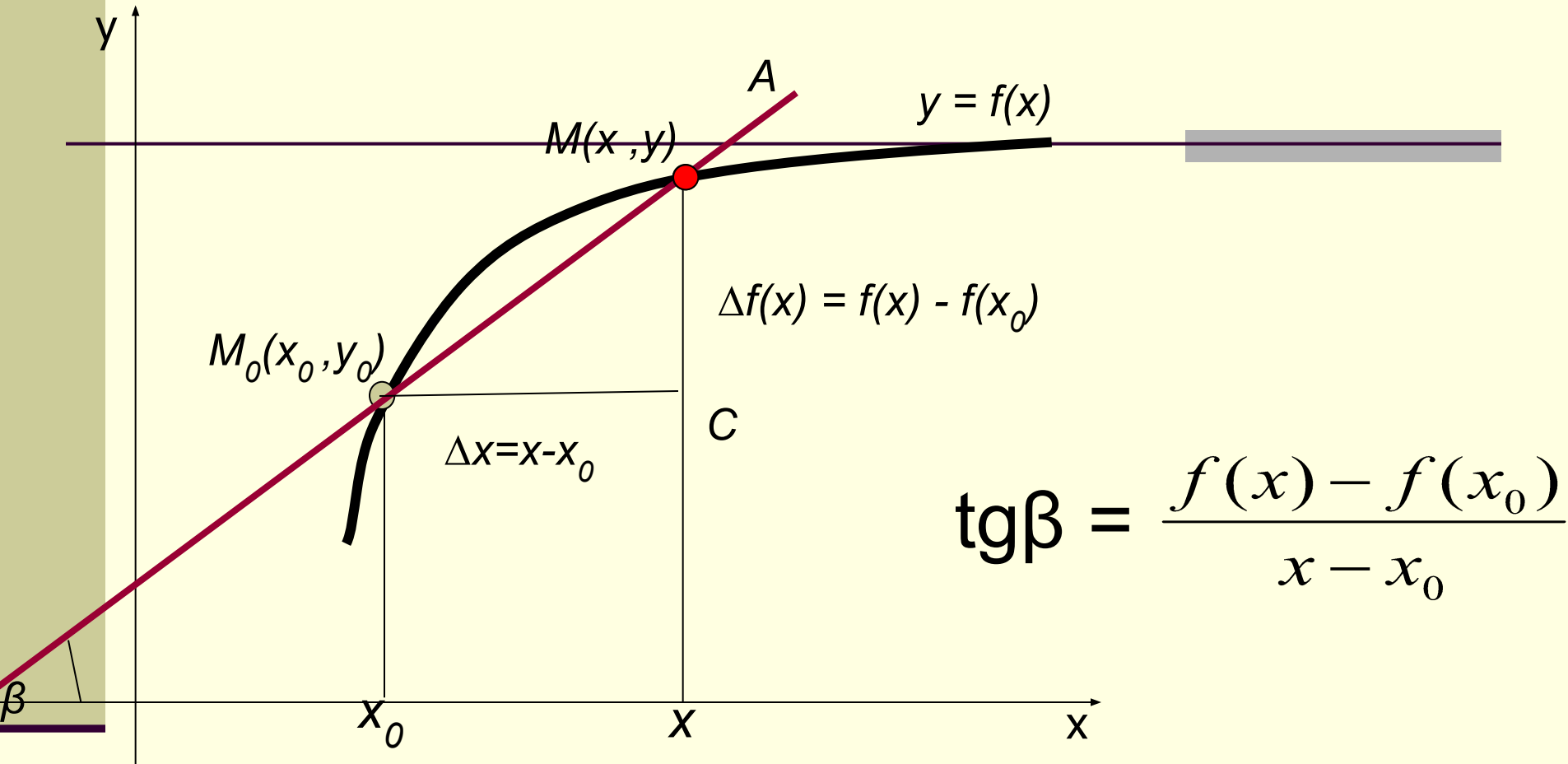


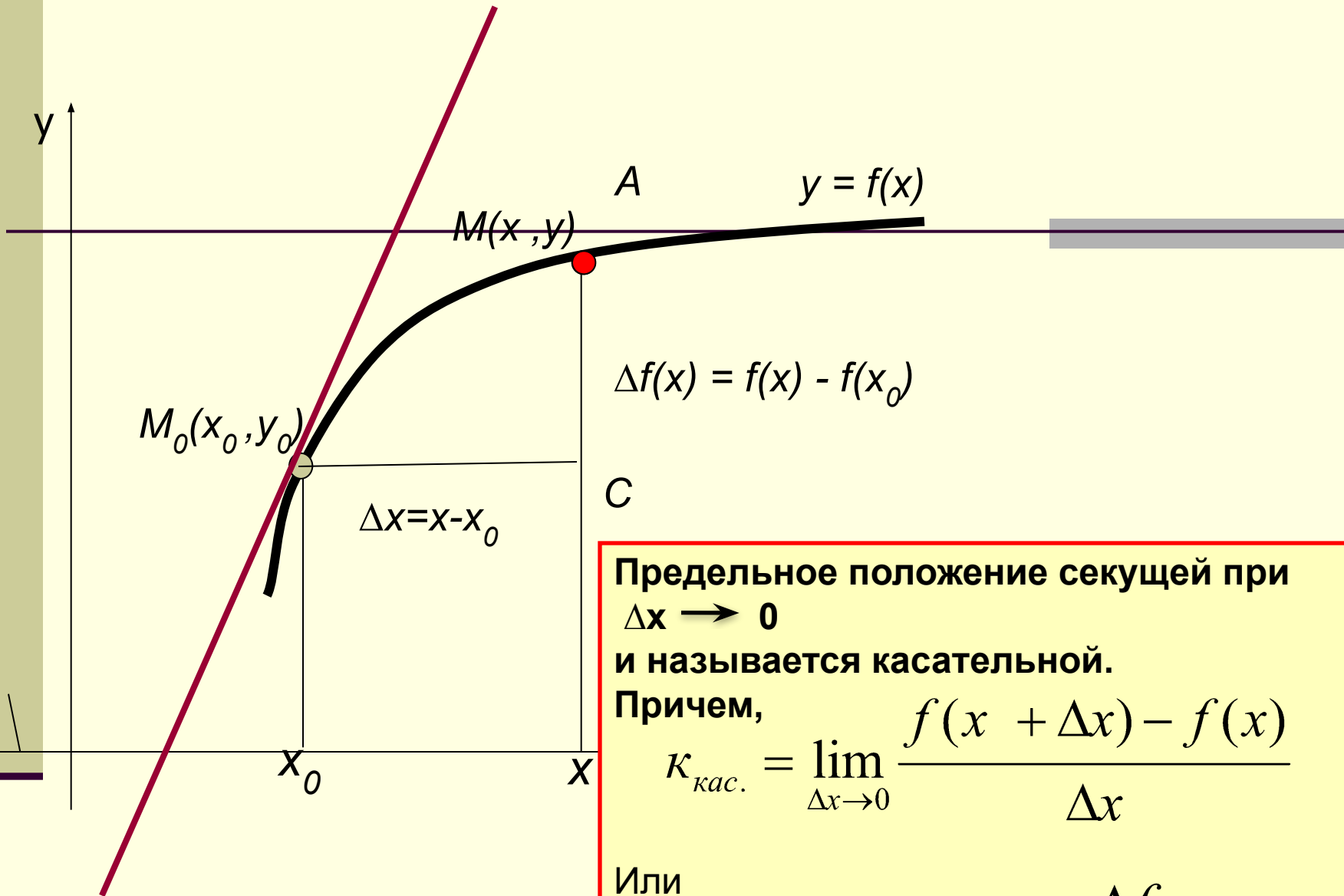
Рис. 15. Точка перегиба.



# Задача о касательной к графику функции



При  $x \rightarrow x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



**Предельное положение секущей при  $\Delta x \rightarrow 0$  и называется касательной.**

**Причем,**

$$K_{кас.} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Или**

$$K_{кас.} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Сравните:

---

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad K_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

По секрету:

**ЭТО И ЕСТЬ  
ПРОИЗВОДНАЯ!**

Задача функции  $y = f(x)$  на  $(a; b)$

Пусть  $x_0$  - некоторое значение аргумента  
из интер.  $(a; b)$

$f(x_0)$  - значение функции в т.  $x_0$ .

Дадим  $x_0$  приращение  $\Delta x$ , получим  
точку  $x = x_0 + \Delta x$  (т.е.  $\Delta x = x - x_0$ )

Значение функции в этой т.

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Найдем отношение:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Найдем  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ . Это и есть производная

# Определение:

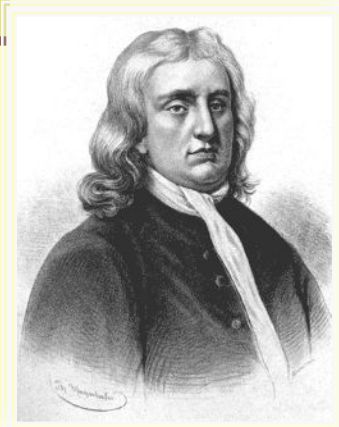
**Производной функции  $y = f(x)$ , заданной на интервале  $(a, b)$ , в точке  $x$  этого интервала называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Итак,

- **Ньютон, а затем Лейбниц, независимо друг от друга, пришли к открытию дифференциального и интегрального исчисления.**

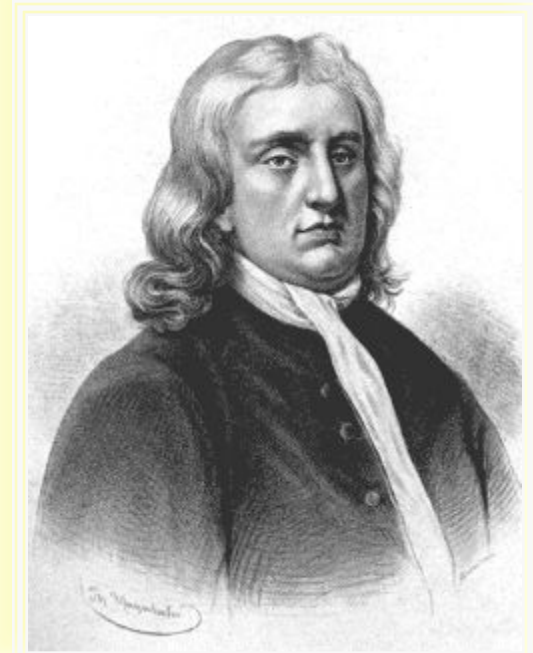


# Механический смысл производной:

---

- Производная пути по времени есть скорость

$$V(t) = S'(t)$$



# Геометрический смысл производной:

---

- **Тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке  $x_0$ , равен значению производной в этой точке.**

$$K_{\text{кас.}} = f'(x_0)$$

