

---

# *Выпуклость и вогнутость функции*

Презентация к уроку по учебнику «Алгебра и начала анализа, 10-11»

под редакцией Ш.А.Алимова , § 53

Автор презентации Бартош Наталья Владимировна,  
учитель математики 587 гимназии г. Санкт-Петербурга

---

# Самостоятельная работа

Построить график функции

Вариант 1

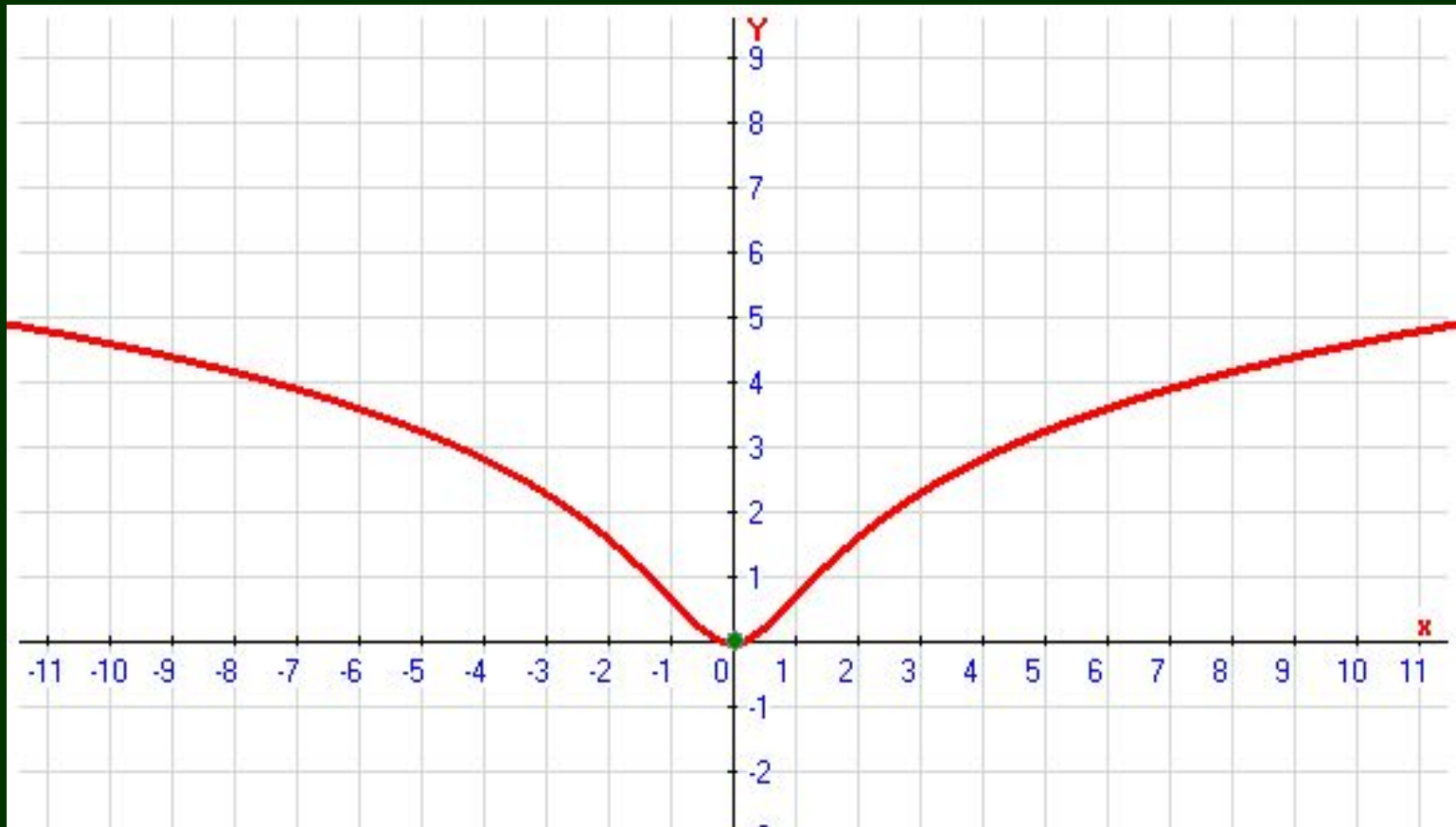
$$y = e^{x^3}$$

Вариант 2

$$y = \ln(x^2 + 1)$$



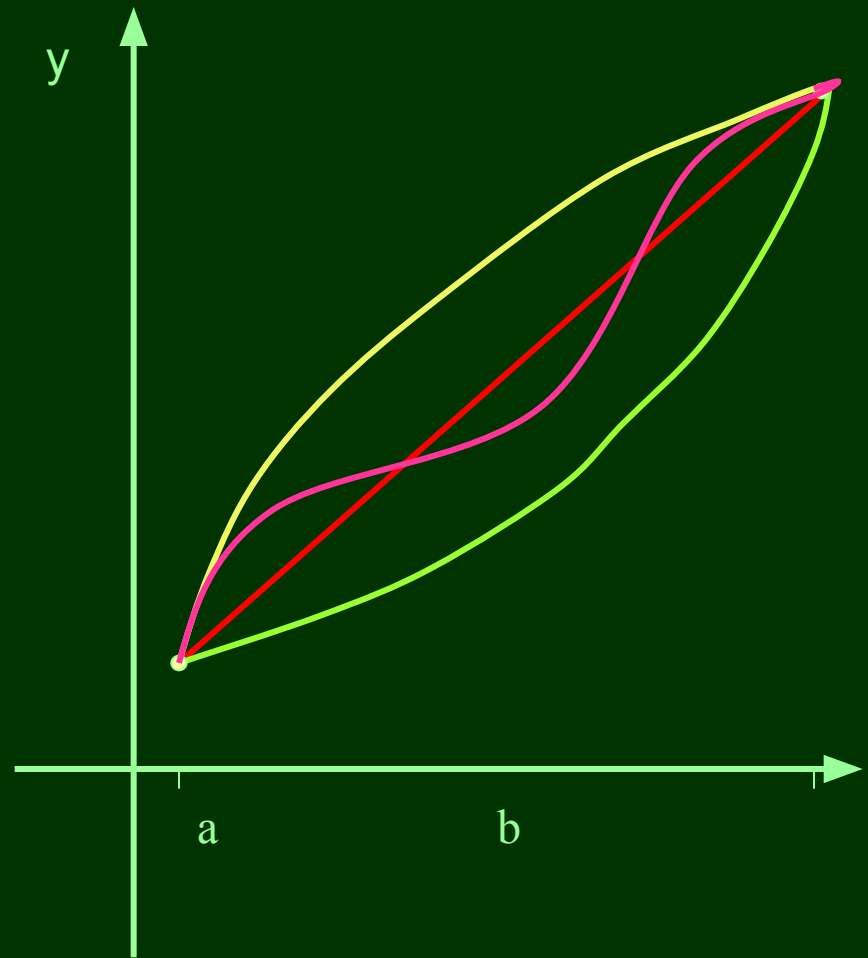
$$y = \ln(x^2 + 1)$$



Дана функция  $y = f(x)$

На интервале  $(a, b)$   
функция  $y = f(x)$  непрерывна и  
дифференцируема,  
причем  $f'(x) > 0$

Постройте эскиз графика  
функции  $y = f(x)$  интервале  $(a, b)$



Дана функция  $y = f(x)$

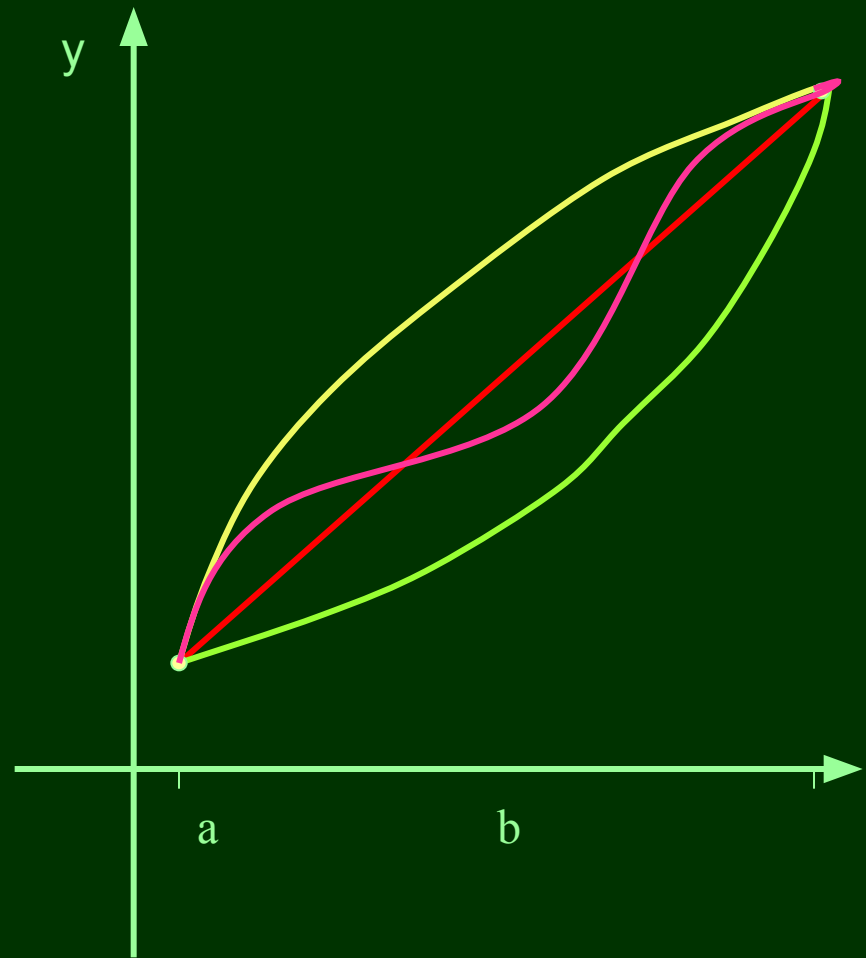
Чем отличается поведение  
линий?

Одна из них – отрезок  
прямой

Другая проходит над  
отрезком

Третья – под отрезком

А четвертая – частично  
над отрезком, частично  
под ним



В математике для обозначения такого поведения существуют специальные понятия:

*выпуклости и*

*вогнутости*

графика функции

---

# *Выпуклость и вогнутость функции*

Геометрический смысл  
второй производной

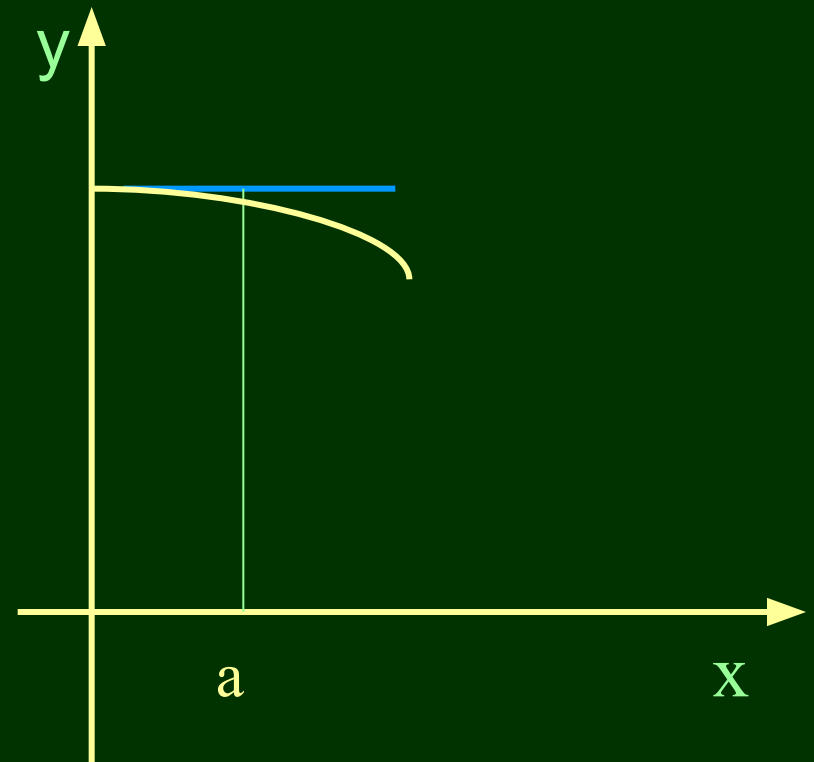
---



# Выпуклая вверх

(выпуклая кривая)

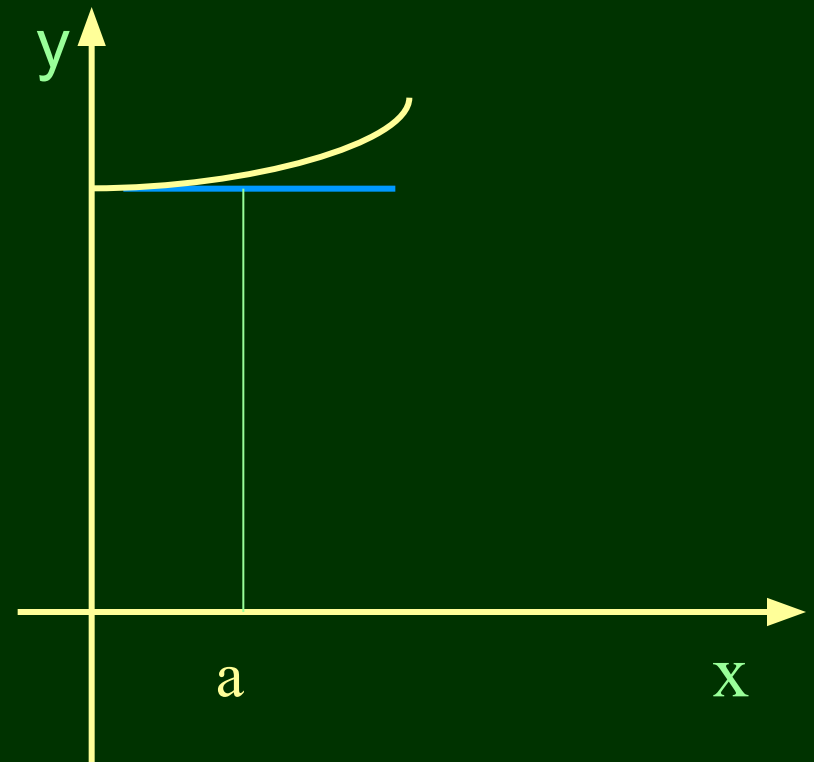
Кривая называется  
*выпуклой вверх*  
в точке  $x = a$ ,  
если в некоторой  
окрестности этой  
точки она  
расположена  
под  
своей касательной



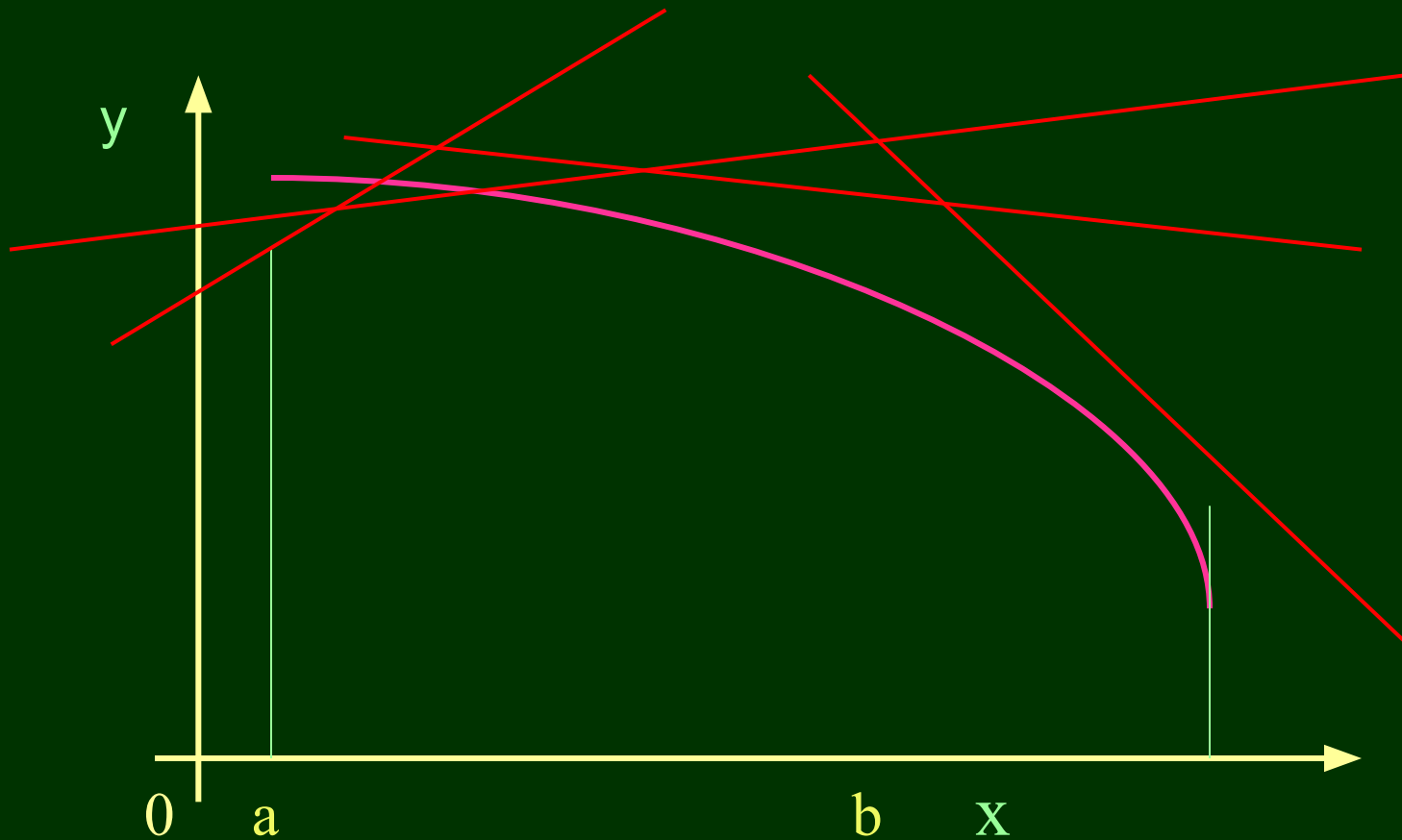
# Выпуклая вниз

*(вогнутая кривая)*

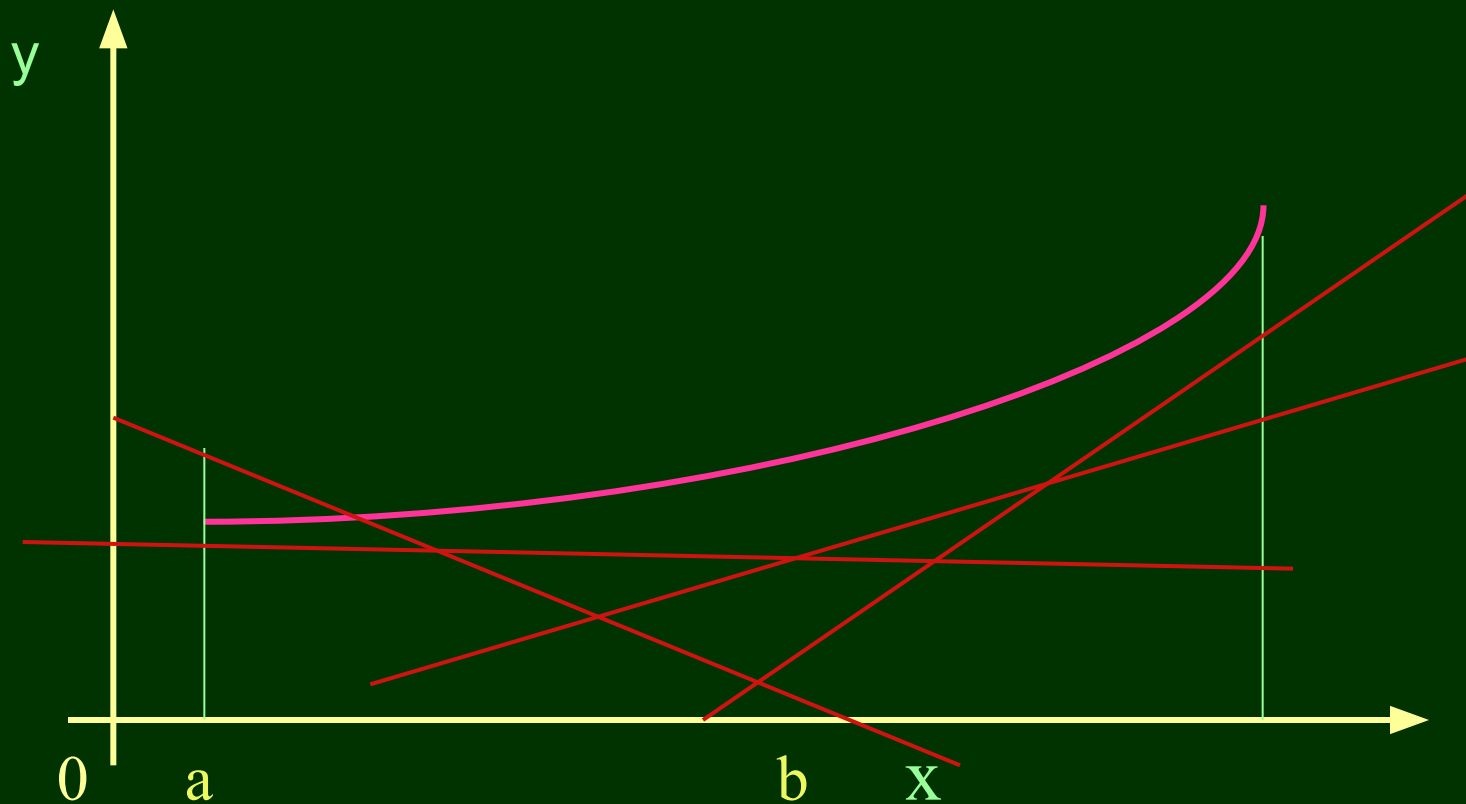
Кривая называется  
*выпуклой вниз*  
в точке  $x = a$ ,  
если в некоторой  
окрестности этой  
точки она  
*расположена*  
**над**  
*своей касательной*



*Кривая выпуклая вверх на интервале  
(выпуклая)*



*Кривая выпуклая вниз на интервале  
(вогнутая)*



---

Как найти интервалы выпуклости и  
вогнутости?

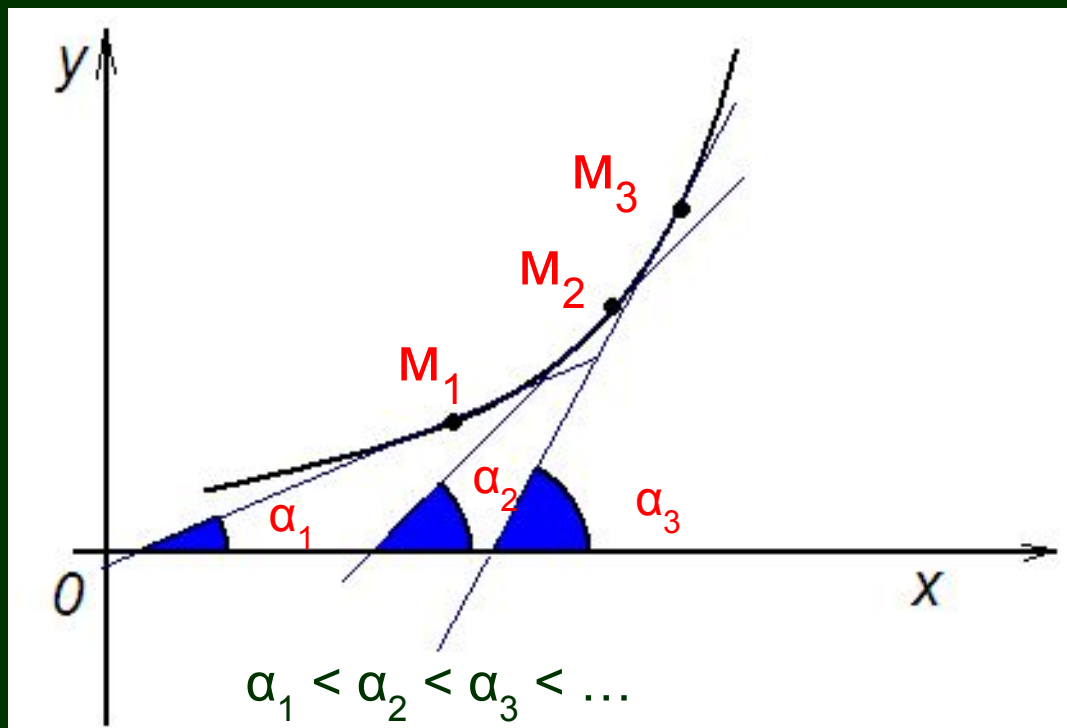
---

# График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках  $M_1, M_2, M_3 \dots$  проведены касательные

Величина углов  
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$   
растет,

увеличиваются  
и тангенсы этих  
углов



# График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках  $M_1, M_2, M_3 \dots$  проведены касательные  
тангенсы углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  *увеличиваются*

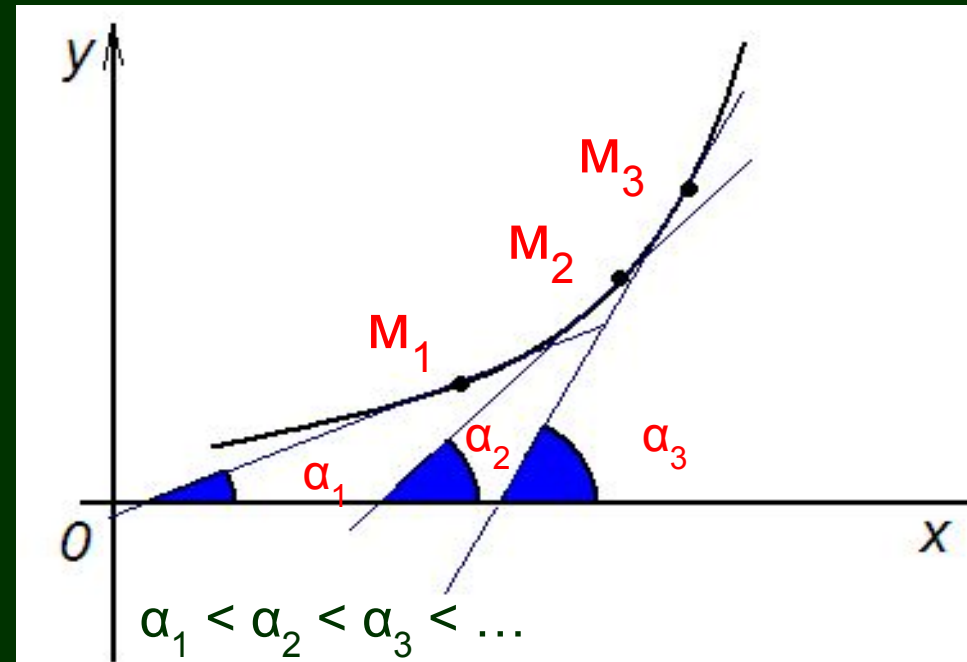
$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ ,  
следовательно, возрастает функция  $f'(x)$

Если функция возрастает, то ее  
производная положительна

Производная функции  $f'(x)$  – это  
производная производной  
 $(f'(x))' = f''(x)$  и  $f''(x) > 0$

*Вывод:*

*Если график функции – вогнутая  
кривая, то вторая производная этой  
функции – положительна.*



# График функции $y = f(x)$ – выпуклая кривая

В точках  $M_1, M_2, \dots$  проведены касательные  
тангенсы углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  убывают

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ , следовательно,  
убывает функция  $f'(x)$

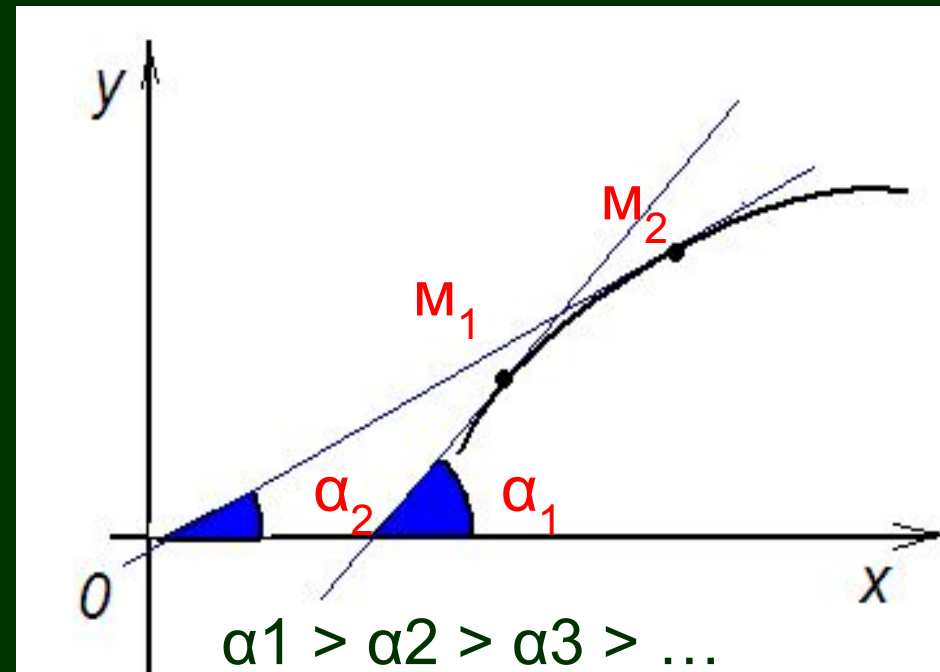
производная функции  $y = f'(x)$

$(f'(x))' = f''(x)$  – отрицательна, т.е.

$$f''(x) < 0$$

*Вывод:*

*Если график функции – выпуклая кривая, то вторая производная этой функции – отрицательна.*





*Если вторая производная функции*

$$y = f(x)$$

*на данном интервале положительна, то кривая  
вогнута*

*а если отрицательна – выпукла в этом  
промежутке*

---

Точки, в которых выпуклость  
меняется на вогнутость или наоборот,  
называются **точками перегиба**

---

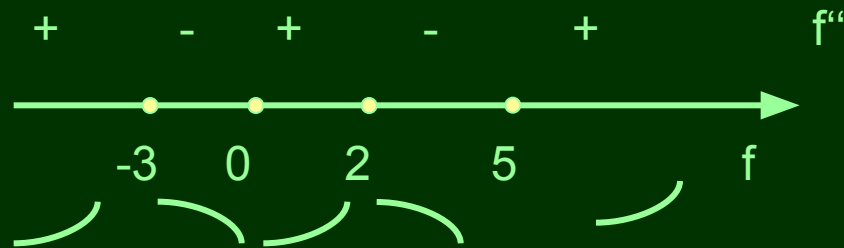
# Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции:

Найти:

1. Вторую производную
  2. Точки, в которых она равна нулю или не существует
  3. Интервалы, на которые область определения разбивается этими точками
  4. Знаки второй производной в каждом интервале
- Если  $f''(x) < 0$ , то кривая выпукла,  
если  $f''(x) > 0$  – вогнута.

## Исследование функции с помощью второй производной

- Интервалы выпуклости:
  - $(-3, 0)$  и  $(2, 5)$
- Интервалы вогнутости:
  - $(-\infty, -3)$ ,  $(0, 2)$  и  $(5, +\infty)$



- $x = -3, x = 0, x = 2, x = 5$  – точки перегиба

График функции

$$y = f(x) -$$

вогнутая кривая

«+»

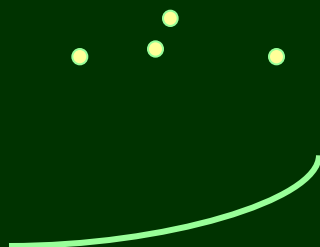
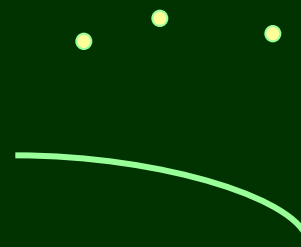


График функции

$$y = f(x) -$$

выпуклая кривая

«-»



Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба

- Вариант 1

- $y = x^3 - 12x + 4$

- Вариант 2

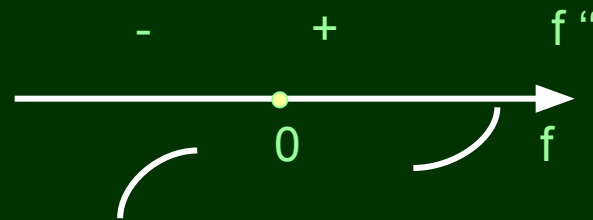
- $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

## Проверка

### Вариант 1

- $y = x^3 - 12x + 4$
- $x$  – любое число
- $f'(x) = 3x^2 - 12$
- $f''(x) = 6x$
- $6x = 0$
- $x = 0$

- Интервалы выпуклости:
- $(-\infty, 0)$
- Интервалы вогнутости:
- $(0, +\infty)$

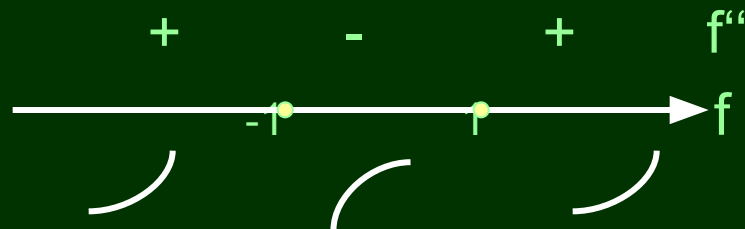


$x = 0$  – точка перегиба

## Проверка Вариант 2

- $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$
- $x$  – любое число
- $f'(x) = x^3 - 3x$
- $f''(x) = 3x^2 - 3 =$
- $3(x - 1)(x + 1)$
- $x = 1$
- $x = -1$

- Интервалы выпуклости:
- $(-1, 1)$
- Интервалы вогнутости:
- $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$



- $x = 1$  и  $x = -1$  – точки перегиба



---

Спасибо за работу  
Успехов!

---