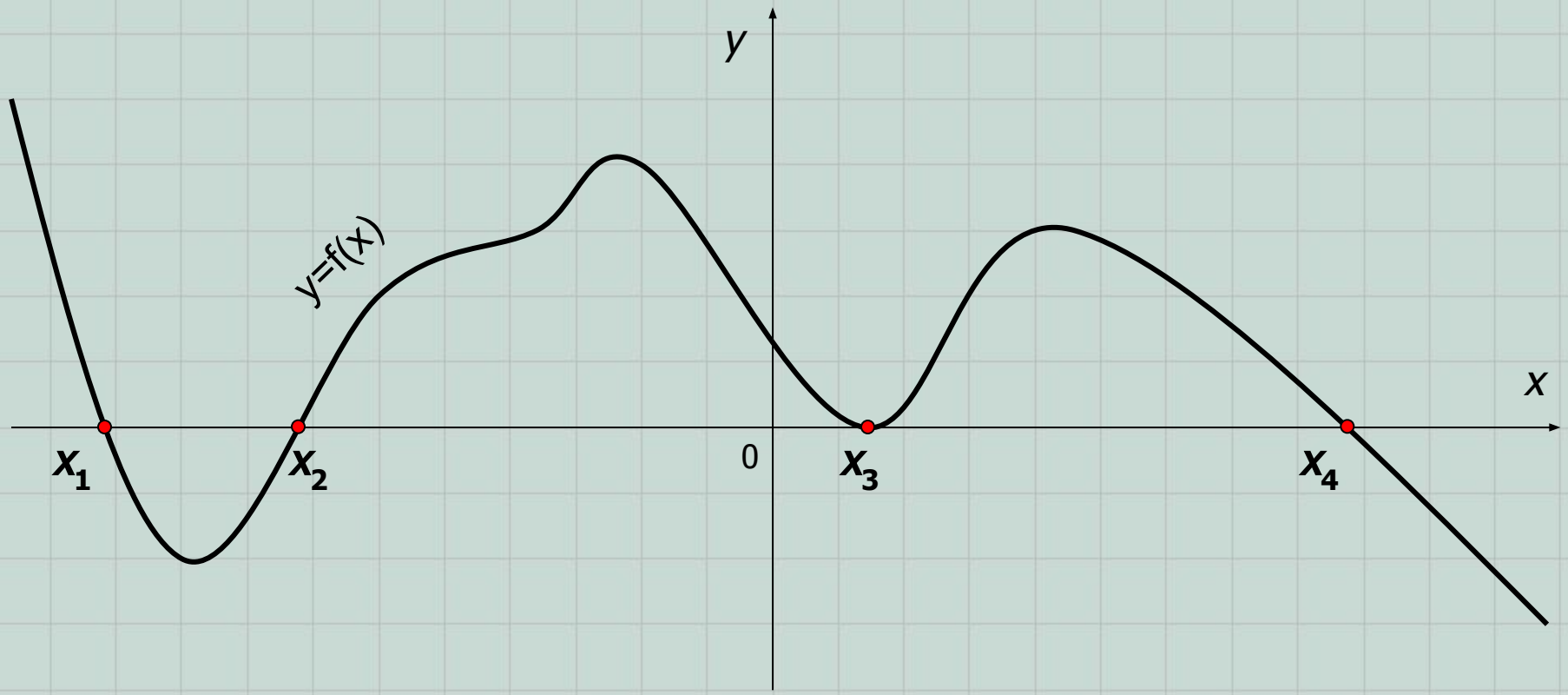
Решение неравенств методом интервалов.

Алгебра и начала анализа,

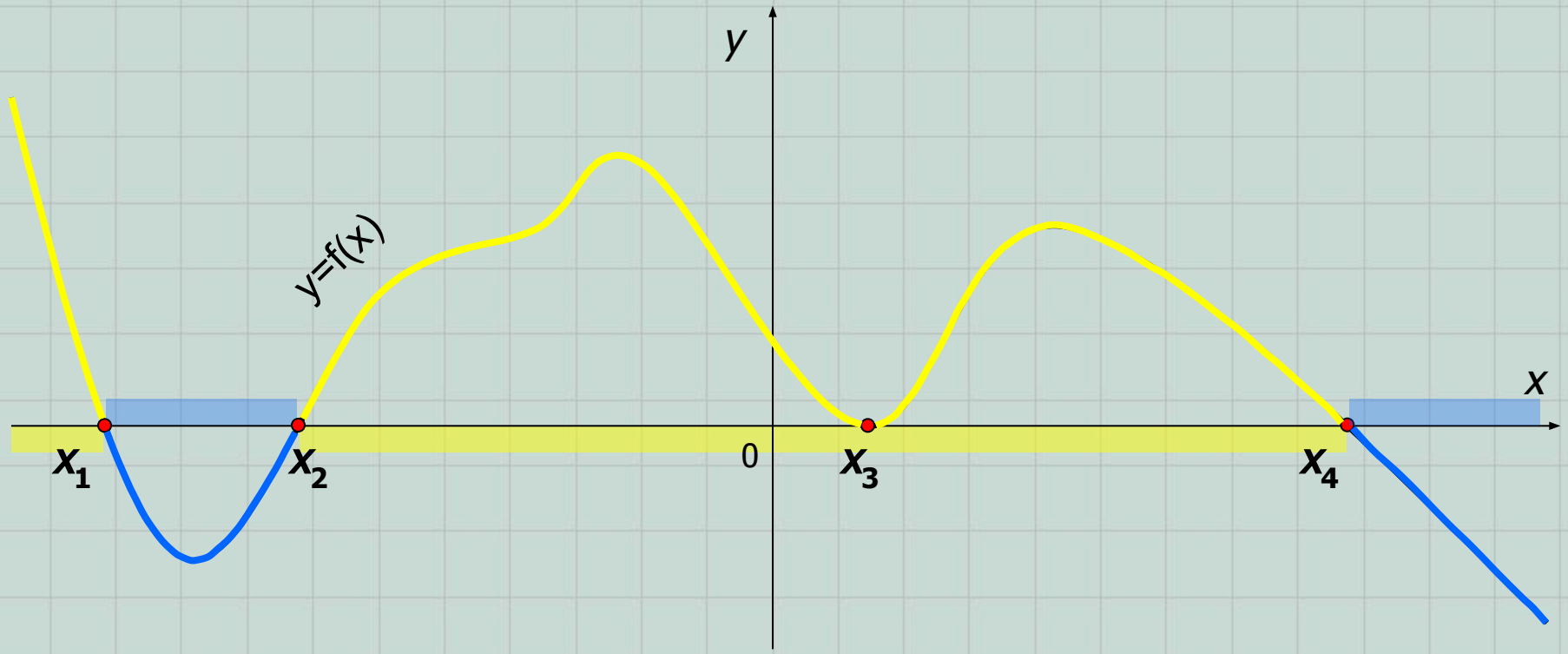
10 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Пусть графиком функции y=f(x) является некоторая гладкая кривая:



Очевидно, что D(f)=E(f)=□. Обратим свое внимание на значения аргумента x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – в этих точках график функции пересекает ось Оx или касается её. Это – так называемые *нули функции* (ординаты этих точек равны 0, т.е. f(x_1)= f(x_2)= f(x_3)= =f(x_4) =0). Аналитически их можно найти, решая уравнение f(x)=0.



Точки x_1 , x_2 , x_3 , x_4 разбивают область определения функции D(f) на промежутки знакопостоянства, т.е. промежутки, на которых функция имеет либо положительные значения (f(x)>0), либо отрицательные (f(x)<0). В нашем случае:

f(x)>0, при $x \in (-\square; x_1) \square (x_2; x_3) \square (x_3; x_4)$ и

f(x)<0, при $x \in (x_1; x_2) \square (x_4; +\square)$.

Опираясь на эту геометрическую иллюстрацию, мы можем вывести алгоритм решения неравенств, получивший название «метод интервалов».

Методом интервалов можно решить любое неравенство вида: f(x)□0. При решении придерживаются следующей схемы (перепишите её в тетрадь!):

1) Найти D(f);
2) Найти нули функции, решая уравнение f(x)=0;
3) Отметить на D(f) все полученные нули;
4) Определить знак функции на каждом полученном промежутке;
5) Записать ответ, выбрав промежутки с соответствующим знаком.

Проиллюстрируем данную схему на нескольких примерах.

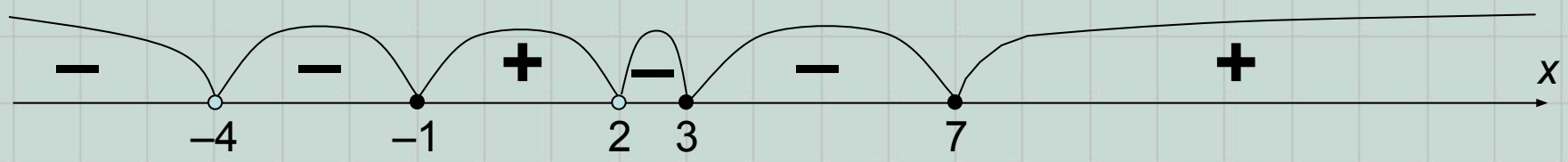
Пример 1. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$.

Решение. Под функцией f(x) следует понимать выражение в левой части неравенства. Это дробно-рациональная функция.

1) D(f)=□, кроме x= – 4; 2 (данные значения обращают знаменатель в нуль) .

2) Найдем нули функции. Значение дроби равно нулю, если числитель этой дроби равен нулю, т.е. x= –1; 3; 7 – нули функции.

3) Обратите внимание, что *точки разрыва* функции (–4 и 2) <u>*всегда*</u> на числовой прямой будут пустыми (или «выколотыми»), а нули функции – в зависимости от знака неравенства (если знак неравенства строгий, то точки пустые, если нестрогий, то обычные).



4) Для расстановки знаков на полученных промежутках можно поступить так:

■ разложить левую часть неравенства на линейные множители (как в нашем случае); тогда на крайнем справа промежутке знак определяется комбинацией угловых коэффициентов этих линейных множителей (в нашем случае все коэффициенты равны 1, т.е. получается комбинация $\frac{+++}{++} > 0$);

■ на остальных промежутках (двигаемся от крайнего справа промежутка влево) знаки расставляются по правилу: знак по сравнению с предыдущим меняется, если показатель степени линейного множителя нечетный и не изменяется, если показатель степени линейного множителя четный. В нашем случае получается… (см.рис.).

$$\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

Вышеизложенный метод определения знаков на интервалах по сути опирается на понятие «кратных» корней. Если Вам этот термин не знаком, то можно воспользоваться другим способом:

■ выбирая из каждого промежутка любое значение, подставляют в формулу, задающую данную функцию и определяют по полученной комбинации знак функции на <u>каждом</u> промежутке:

$$f(x)=\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

а) $-5\in(-\square;\ -4) \Rightarrow f(-5)=\frac{+--}{-+}<0$;

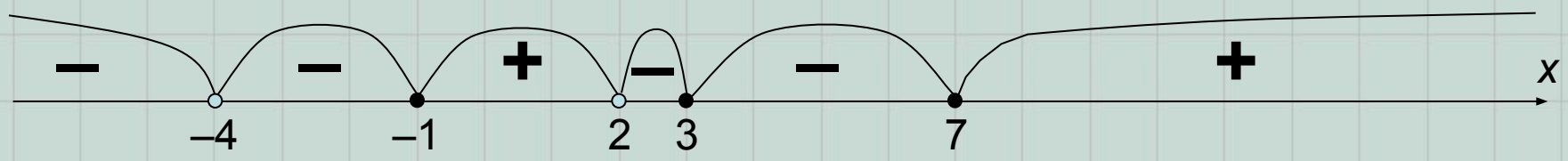
б) $-2\in(-4;\ -1) \Rightarrow f(-2)=\frac{+--}{-+}<0$;

в) $0\in(-1;\ 2) \Rightarrow f(0)=\frac{+-+}{-+}>0$;

г) $2{,}5\in(2;\ 3) \Rightarrow f(2{,}5)=\frac{+-+}{++}<0$;

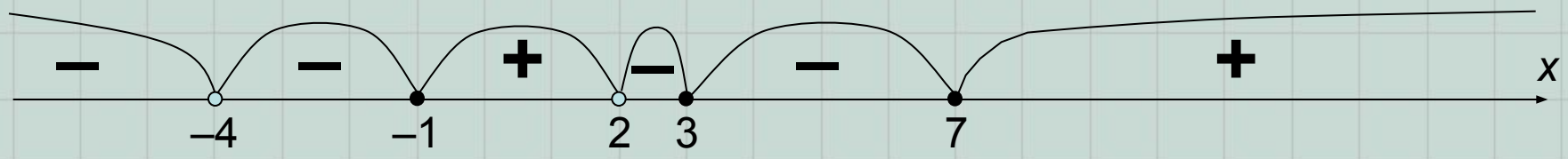
д) $4\in(3;\ 7) \Rightarrow f(4)=\frac{+-+}{++}<0$;

е) $8\in(7;\ +\square) \Rightarrow f(8)=\frac{+++}{++}>0$;



Как Вы можете убедиться – результат расстановки знаков такой же, как в предыдущем способе.

5) Остается записать ответ, выбрав промежутки соответствующие знаку неравенства. В нашем случае, знаку «≥» соответствуют промежутки со знаком «+». Важно не забыть *x*=3!!!



Ответ: $x \in [-1; 2) \square \{3\} \square [7; +\square)$.

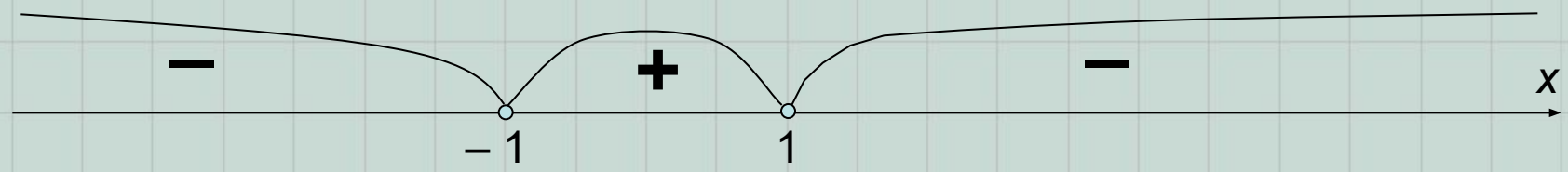
Пример 2. Решите неравенство $\frac{x+3}{1-x} > \frac{x-4}{x+1}$.

Решение. Перенесем все в левую часть неравенства: $\frac{x+3}{1-x} - \frac{x-4}{x+1} > 0$.

1) D(f)=□, кроме x= – 1; 1, где f(x)= $\frac{2x^2 - x + 7}{(1-x)(x+1)}$;

2) Нулей функции нет, т.к. дискриминант квадратного трехчлена отрицательный;

3)



4) Проверьте себя, как Вы поняли правило расстановки знаков…

5) Ответ: $x \in (-1;$
1).

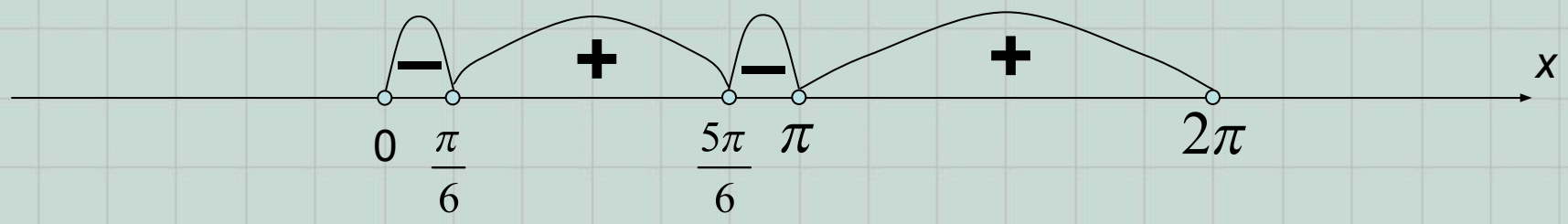
Пример 3. Решите неравенство $\sin x + \cos(2x) > 1$.

Решение. Перепишем неравенство в виде: $\sin x > 1 - \cos(2x)$. Используя формулы половинного аргумента, получим: $\sin x > 2\sin^2 x$ или $2\sin^2 x - \sin x < 0$.

1) D(f)=□, где $f(x)=2\sin^2 x - \sin x$;

2) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; ⇒ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) Расставим полученные нули функции на числовой прямой:



Учитывая периодичность функции y=sinx, достаточно ограничиться отрезком длиной 2π;

4) Расставим знаки на полученных промежутках;

5) Запишем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \end{array}\right. \quad \text{ответ: } x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right), \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$