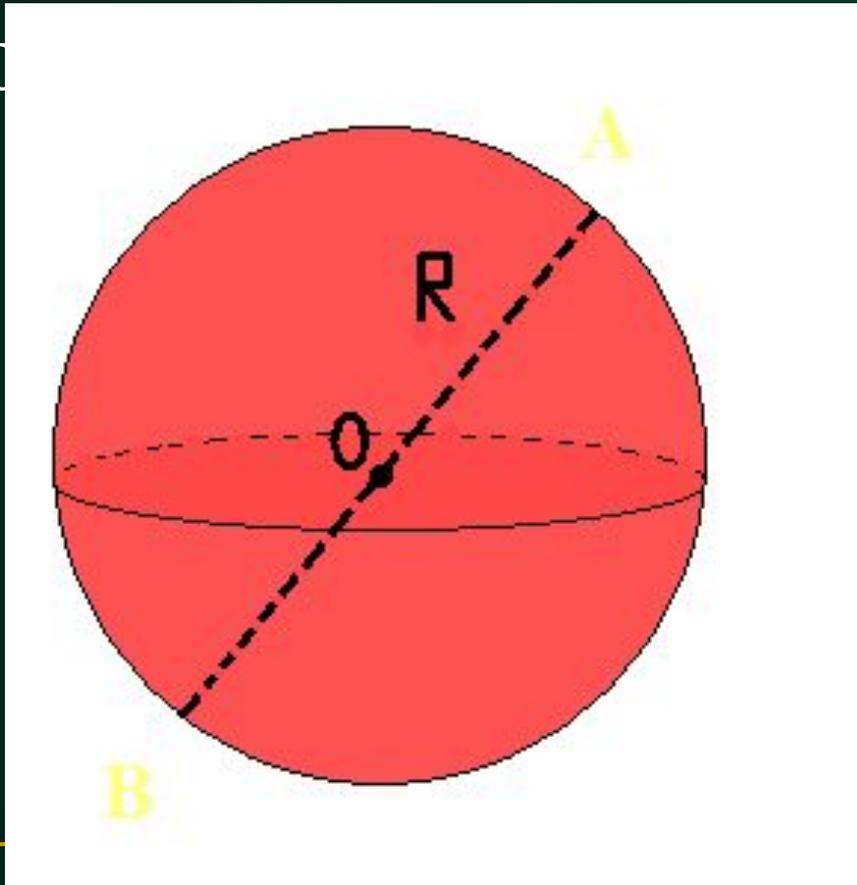


**Тела вращения**

**Сфера**

**Шар**

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии



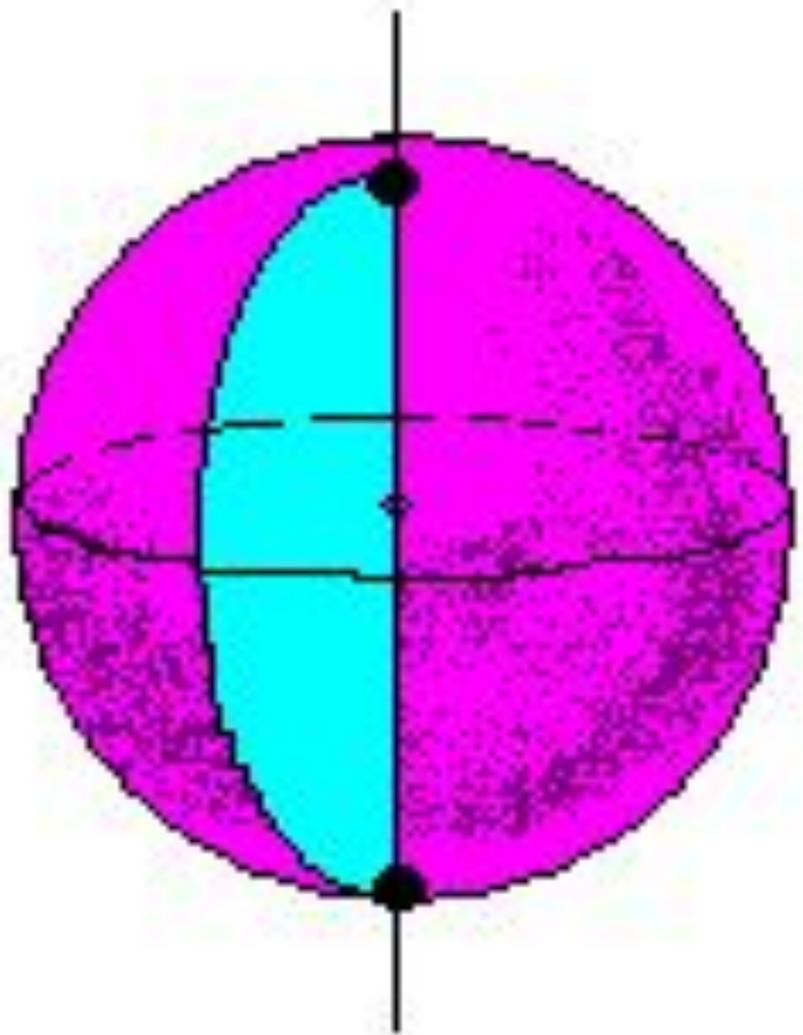
$O$  - центр сферы

$R$  - радиус сферы

$AB$  - диаметр сферы

$$2R = AB$$

Сферу можно  
получить  
вращением  
полуокружности  
 $ACB$  вокруг  
диаметра  $AB$



# Шар

Шаром называется тело ограниченное сферой.

Центр, радиус и диаметр сферы называются также диаметром шара.

# Уравнение сферы

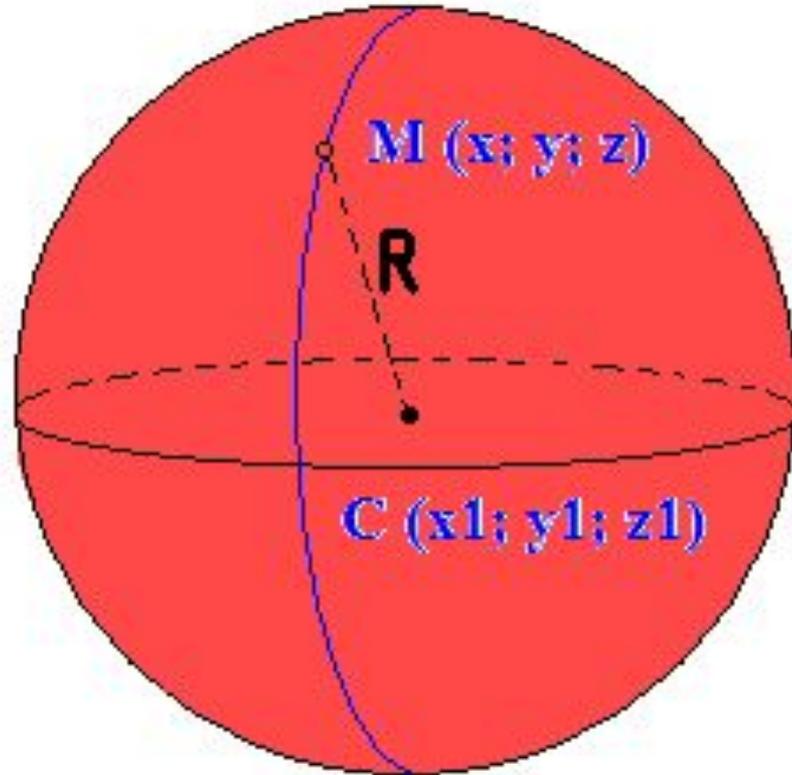
- Задана прямоугольная система координат  $Oxy$  и дана некоторая поверхность  $F$ , например плоскость или сфера. Уравнение с тремя переменными  $x, y, z$  называется **уравнением поверхности  $F$**  и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

См. далее



Выведем уравнение сферы радиуса  $R$  с центром  $C(x_1; y_1; z_1)$

$M(x; y; z)$  -  
произвольная  
точка сферы



0

X

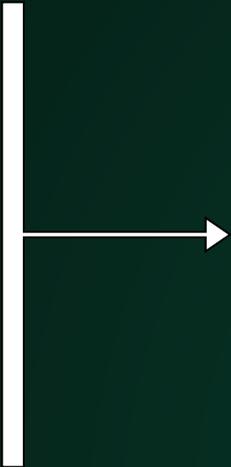
Расстояние от произвольной точки  $M(x; y; z)$  до точки  $C$  вычисляем по формуле

$$MC = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

- Если точка **М** лежит на данной сфере , то **МС=R**, или **МС<sup>2</sup>=R<sup>2</sup>** т.е. координаты точки **М** удовлетворяют уравнению:

$$R^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

- Если точка **М** не лежит на данной сфере , то **МС<sup>2</sup>≠ R<sup>2</sup>** т.е. координаты точки **М** не удовлетворяют данного уравнения.



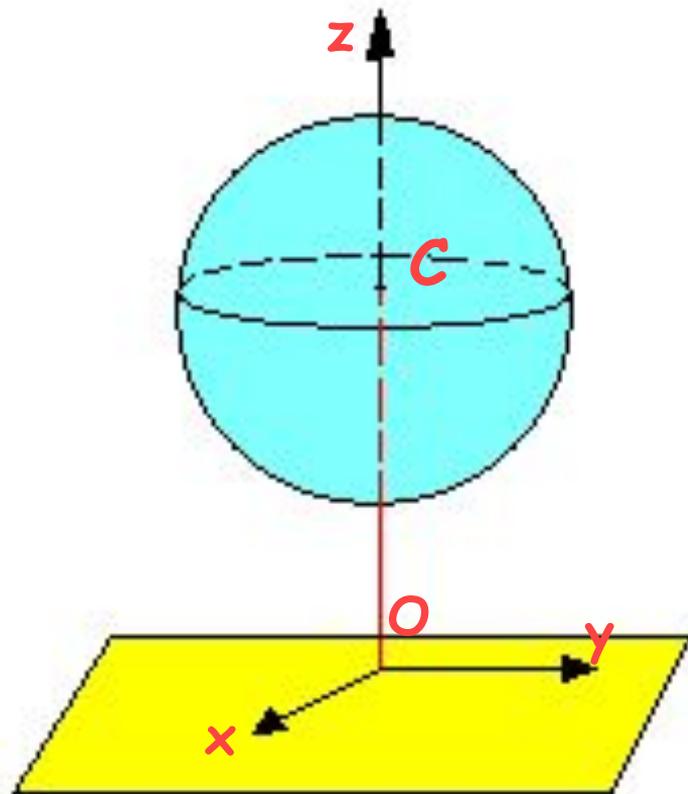
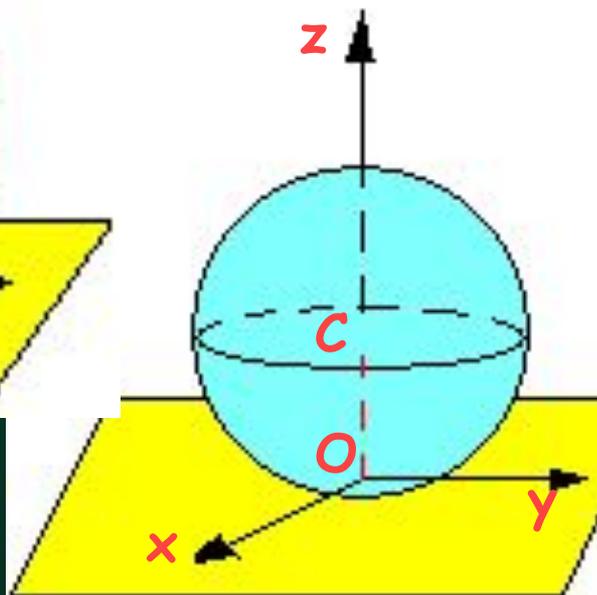
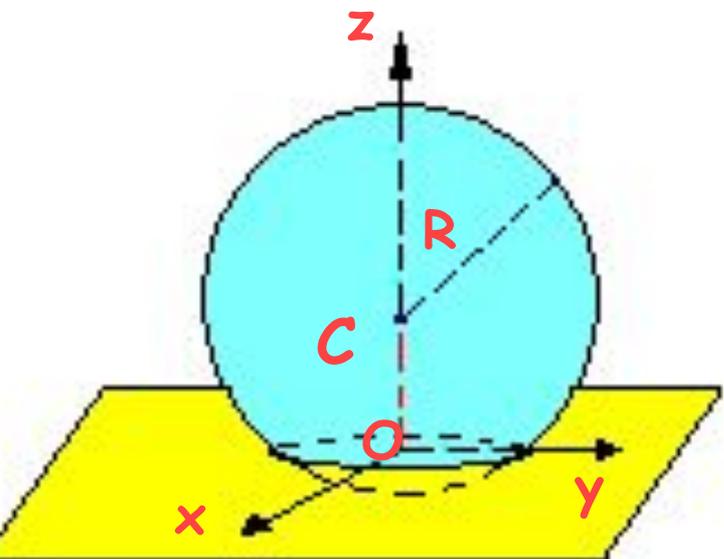
В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса  $R$  с центром  $C(x_1; y_1; z_1)$  имеет вид

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

# Взаимное расположение сферы и плоскости

*Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центром до плоскости.*

# Взаимное расположение сферы и ПЛОСКОСТИ



$$d < R, r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d = R$$

$$d > R$$

См. далее



Пусть радиус сферы -  $R$ , а расстояние от её центра до плоскости  $\alpha - d$

- Введём систему координат, так чтобы плоскость  $Oxy$  совпадала с плоскостью  $\alpha$ , а центр сферы лежал по  $Oz$ , тогда уравнение плоскости  $\alpha : z=0$ , а уравнение сферы с учётом ( $C$  имеет координаты  $(0;0;d)$ )

$$x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2$$

Составим систему уравнений :

$$z=0$$

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$$

Подставив  $z=0$  во второе уравнение , получим :

$$x^2+y^2=R^2-d^2$$

Возможны три случая :

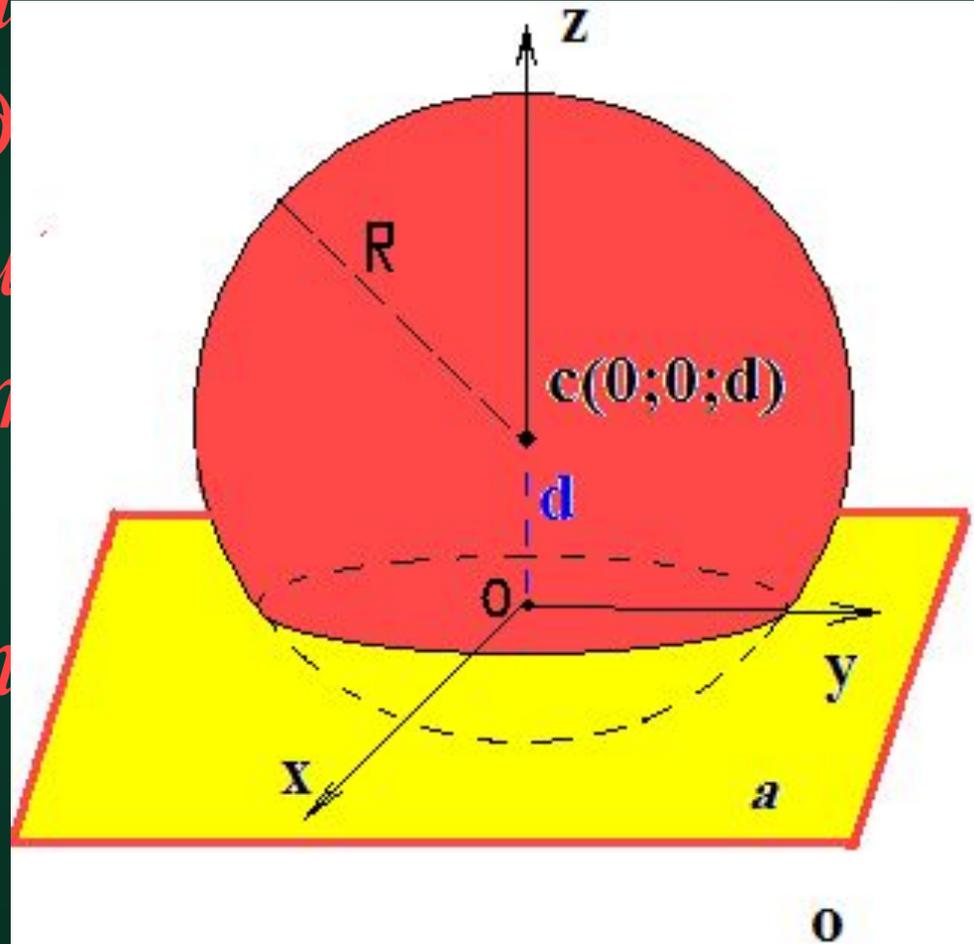
1)  $d < R$ , тогда  $R^2 - d^2 > 0$ ,

и уравнение

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$  является уравнением окружности  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$  с центром в точке  $O$  на плоскости  $Oxy$ .

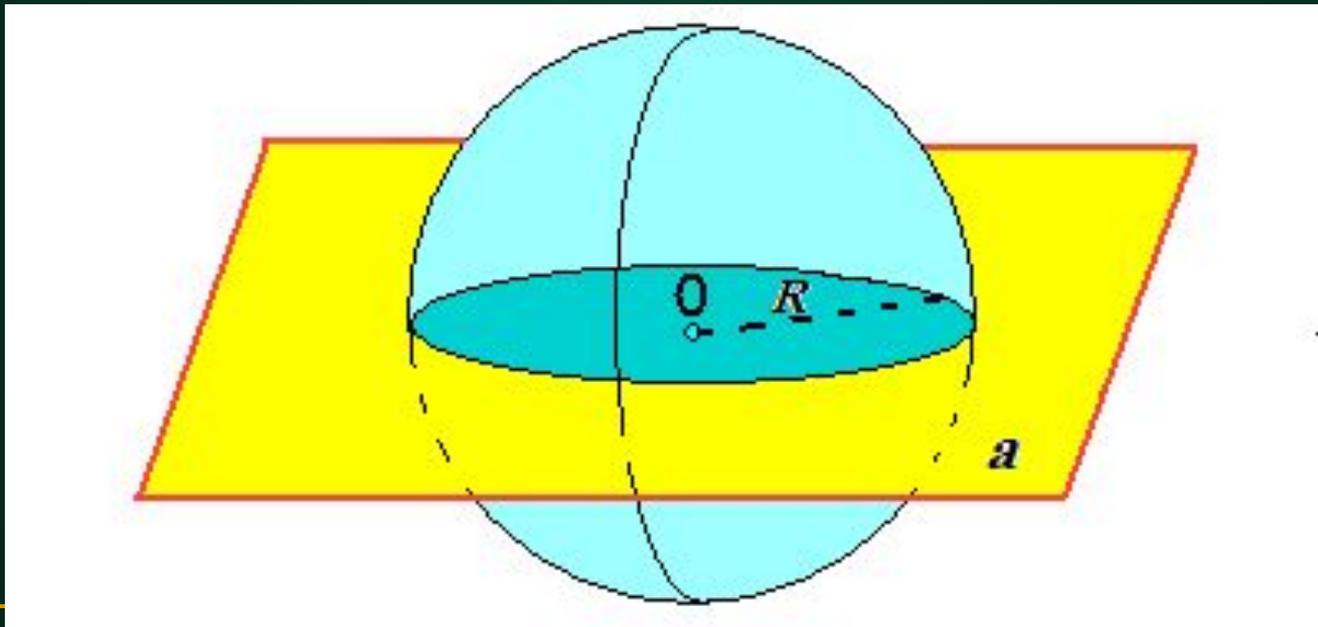
В данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Итак, если  
расстояние от  
центра сферы до  
плоскости меньше  
радиуса сферы, то  
сечение сферы  
плоскостью есть  
окружность.



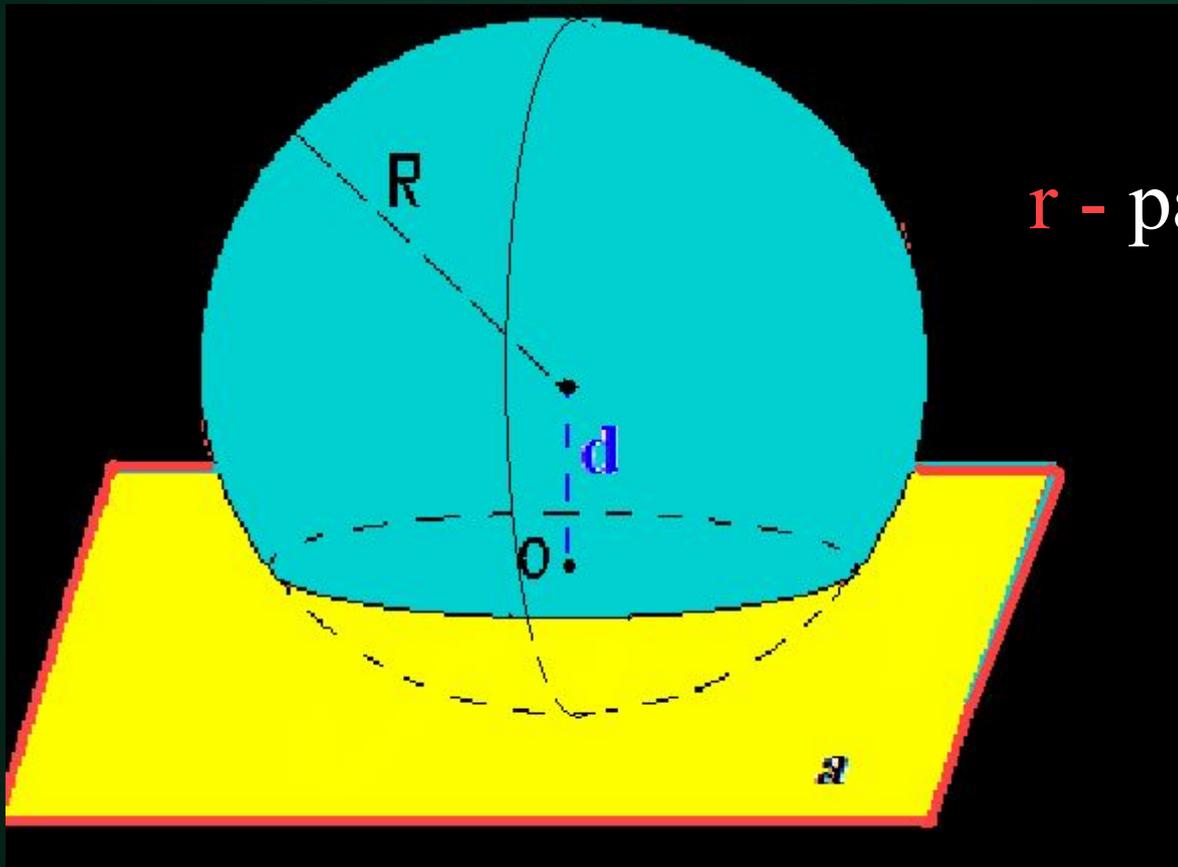
Ясно, что сечение шара плоскостью является круг.

- Если секущая плоскость проходит через центр шара, то  $d=0$  и в сечении получается круг радиуса  $R$ , т.е. круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется большим кругом шара.



- Если секущая плоскость не проходит через центр шара, то  $d > 0$  и радиус сечения

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ , меньше радиуса шара .



$r$  - радиус сечения

2)  $d=R$ , тогда  $R^2-d^2=0$

и уравнению

удовлетворяют только

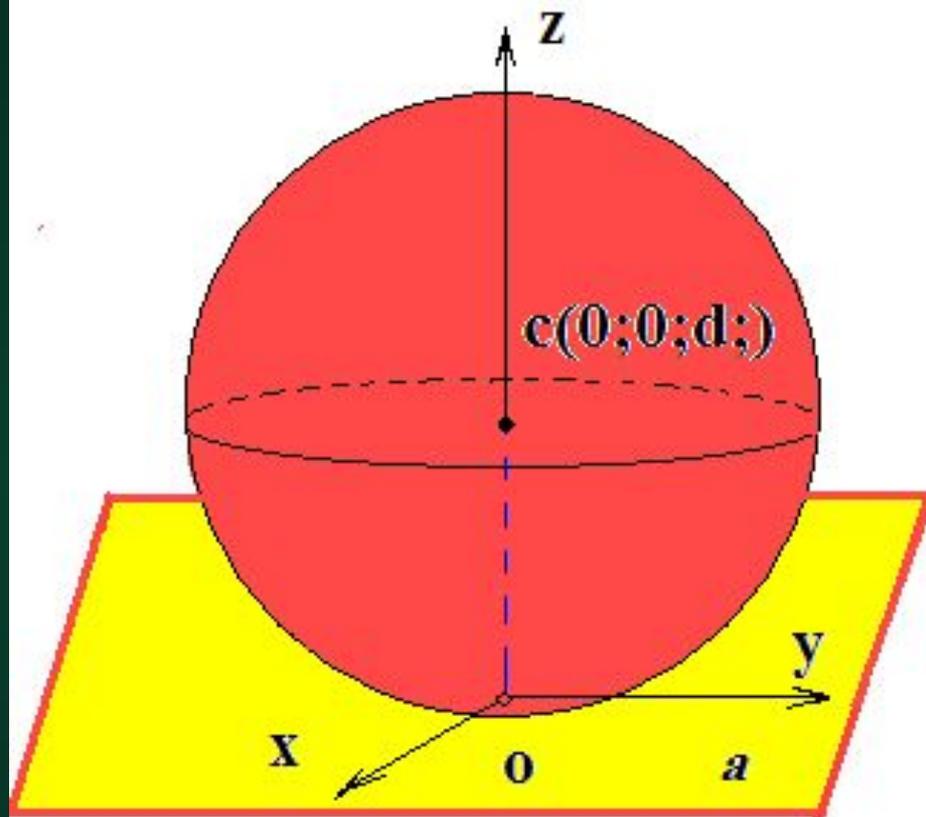
$x=0, y=0,$

а значит  $O(0;0;0)$

удовлетворяют обоим

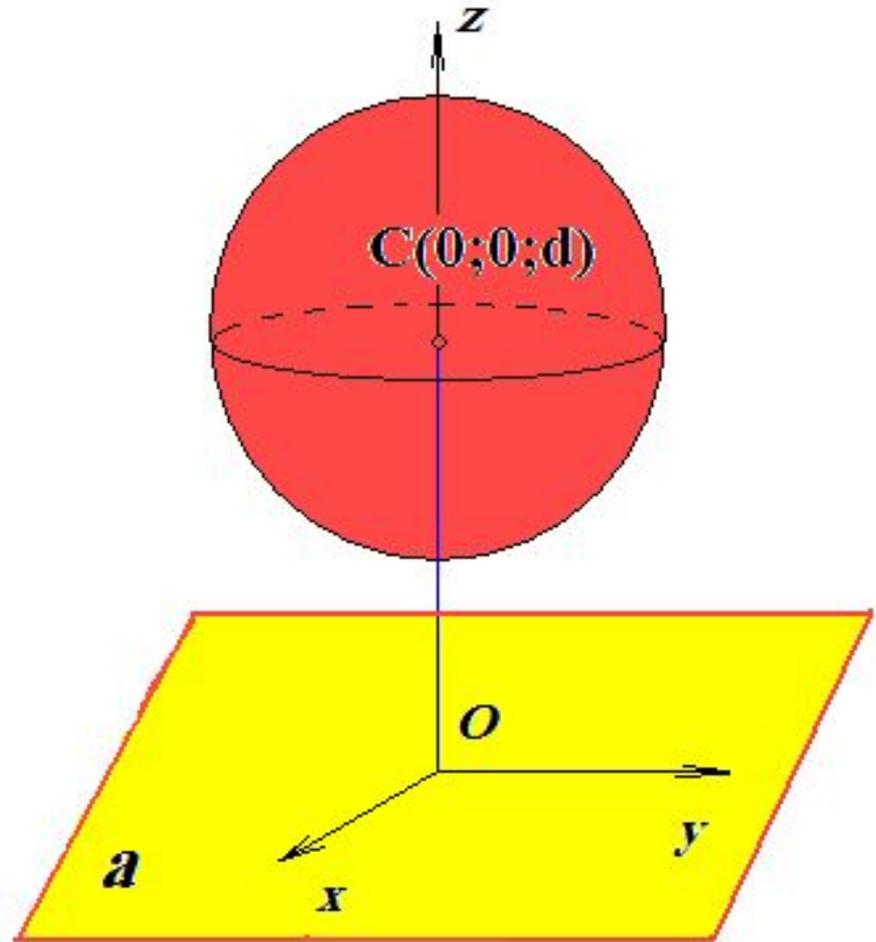
уравнениям, т.е.

$O$  - единственная общая точка сферы и плоскости



*Итак, если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.*

3)  $d > R$ , тогда  
 $R^2 - d^2 < 0$ , и  
уравнению  
 $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$   
не  
удовлетворя-  
ют  
координаты  
никакой  
точки.



---

*Следовательно,  
если расстояние от центра  
сферы до плоскости больше  
радиуса сферы, то сфера и  
плоскость не имеют общих  
точек.*

---