

Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются, так называемые, **задачи оптимизации**. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача

Пусть на четыре завода Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах C_1, C_2 . Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья, (в т) на складе		Потребность в сырье, (в т) на заводе			
C_1	C_2	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода			
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
C_1	5	6	4	10
C_2	3	7	3	7

Решение

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим **математическую модель**. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы Z_1, Z_2, Z_3 , обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x, 10 - y, 12 - z, x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

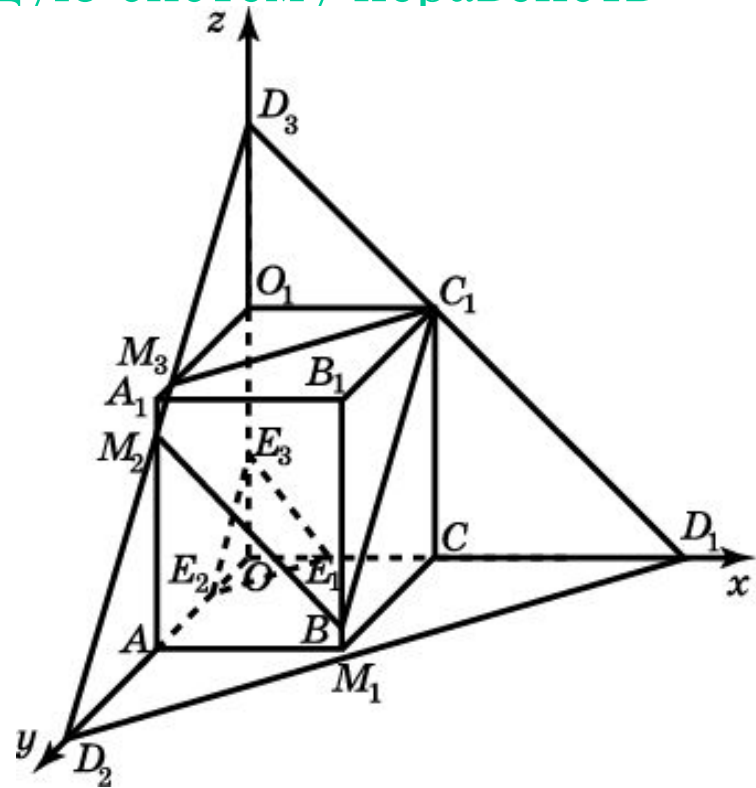
Таблица 3

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
C_1	x	y	z	$20 - x - y - z$
C_2	$8 - x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Решение (продолжение)

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ 8 - x \geq 0, 10 - y \geq 0, 12 - z \geq 0, \\ 20 - x - y - z \geq 0, \\ x + y + z - 5 \geq 0. \end{cases}$$



Эта система неравенств определяет многогранник

$M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8,10,2)$, $M_2(0,10,10)$, $M_3(0,8,12)$, $C_1(8,0,12)$, $C(8,0,0)$, $B(8,10,0)$, $A(0,10,0)$, $E_1(5,0,0)$, $E_2(0,5,0)$, $E_3(0,0,5)$, $O_1(0,0,12)$.

Решение (продолжение)

Общее число тонно-километров выражается формулой: $5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z$.

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{min} = 295 - f_{max}$.

Для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M1) = 52$, $f(M2) = 60$, $f(M3) = 56$, $f(C1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E1) = 5$, $f(E2) = 20$, $f(E3) = 10$, $f(O1) = 24$. Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M2(0,10,10)$.

Ответ

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	0	10	10	0
C_2	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n -мерного пространства и n -мерных многогранников с очень большим n . При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Упражнение 1

Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

Ответ: Плоскость.

Упражнение 2

Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy ?

Ответ: Параллелен.

Упражнение 3

Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

Ответ: Проходит через начало координат.

Упражнение 4

Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если c : а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

Ответ: а) Поднимется на единицу;
б) опустится на единицу.

Упражнение 5

Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2 + 2x + y \geq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

Ответ: -2.

Упражнение 6

На трех складах хранится сырье одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

Ответ: С 1-го склада – 10 т, со 2-го – 20 т, с 3-го – 5 т.

Упражнение 7

Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырьё не больше, чем с третьего.

Ответ: С 1-го склада – 0 т, со 2-го и 3-го – 17,5 т.

Упражнение 8

Установка собирается из трех различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

Ответ: Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.