# Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются, так называемые, задачи оптимизации. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

# Задача

Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

| Наличие сырья, (в т) на складе | | Потребность в сырье, (в т) на заводе | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $С_1$ | $С_2$ | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ | $З_4$ |
| 20 | 25 | 8 | 10 | 12 | 15 |

Таблица 2

| Склад | Расстояние (в км) от склада до завода | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ | $З_4$ |
| $С_1$ | 5 | 6 | 4 | 10 |
| $С_2$ | 3 | 7 | 3 | 7 |

# Решение

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим математическую модель. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через $x$, $y$ и $z$ соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

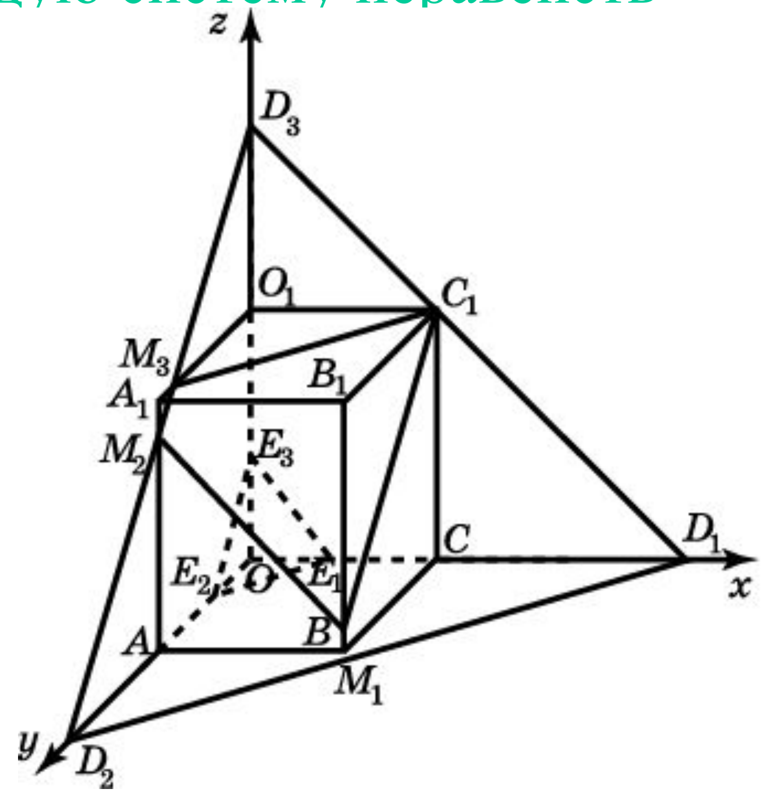
Таблица 3

| Склад | Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ | $З_4$ |
| $С_1$ | $x$ | $y$ | $z$ | $20 - x - y - z$ |
| $С_2$ | $8 - x$ | $10 - y$ | $12 - z$ | $x + y + z - 5$ |

# Решение (продолжеие)

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ 8 - x \geq 0,\ 10 - y \geq 0,\ 12 - z \geq 0, \\ 20 - x - y - z \geq 0, \\ x + y + z - 5 \geq 0. \end{cases}$$




Эта система неравенств определяет многогранник $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8,10,2)$, $M_2(0,10,10)$, $M_3(0,8,12)$, $C_1(8,0,12)$, $C(8,0,0)$, $B(8,10,0)$, $A(0,10,0)$, $E_1(5,0,0)$, $E_2(0,5,0)$, $E_3(0,0,5)$, $O_1(0,0,12)$.

# Решение (продолжение)

Общее число тонно-километров выражается формулой: $5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z$.

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $Fmin = 295 - fmax$.

Для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M1) = 52$, $f(M2) = 60$, $f(M3) = 56$, $f(C1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E1) = 5$, $f(E2) = 20$, $f(E3) = 10$, $f(O1) = 24$. Легко видеть, что максимальное значение функции $f$ равно 60. Тогда $Fmin = 295 - 60 = 235$. Это значение функция $F$ принимает в точке $M2(0,10,10)$.

# Ответ

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

| Склад | Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ | $З_4$ |
| $С_1$ | 0 | 10 | 10 | 0 |
| $С_2$ | 8 | 0 | 2 | 15 |

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение $n$-мерного пространства и $n$-мерных многогранников с очень большим $n$. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

# Упражнение 1

Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

Ответ: Плоскость.

# Упражнение 2

Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси $Oy$?

Ответ: Параллелен.

# Упражнение 3

Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

Ответ: Проходит через начало координат.

# Упражнение 4

Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если $c$: а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

Ответ: а) Поднимется на единицу;

б) опустится на единицу.

# Упражнение 5

Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2 + 2x + y \geq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

Ответ: -2.

# Упражнение 6

На трех складах хранится сырье одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

Ответ: С 1-го склада – 10 т, со 2-го – 20 т, с 3-го – 5 т.

# Упражнение 7

Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

Ответ: С 1-го склада – 0 т, со 2-го и 3-го – 17,5 т.

# Упражнение 8

Установка собирается из трех различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

Ответ: Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.