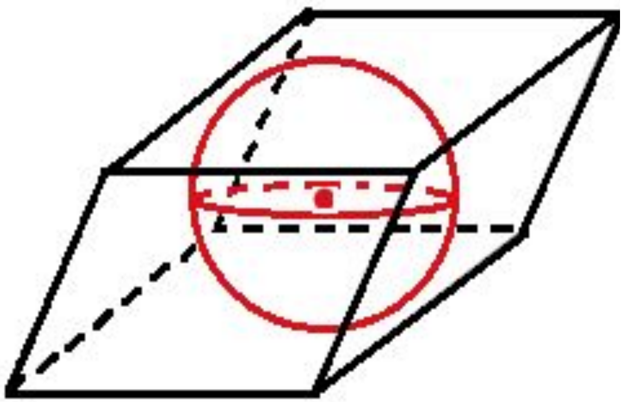
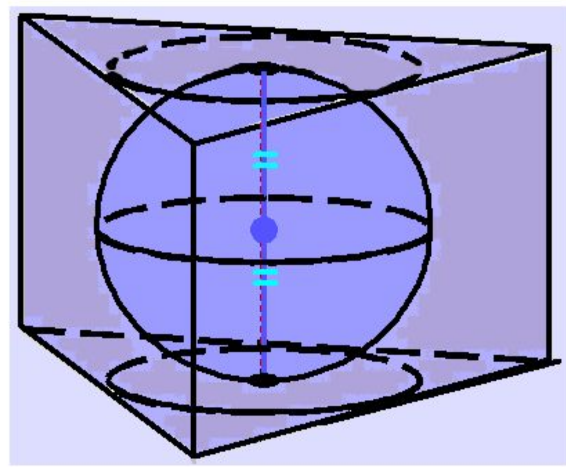
Сфера, вписанная в многогранник

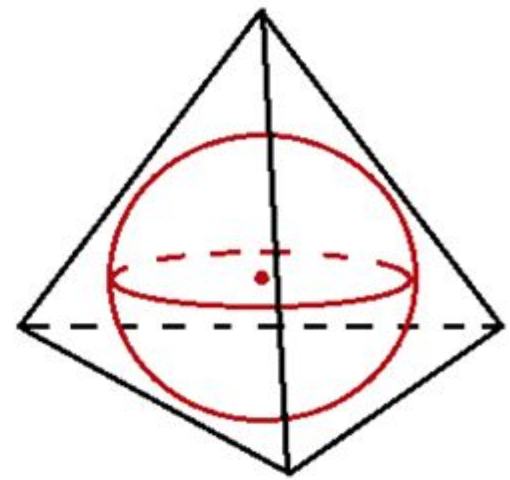
Сфера, вписанная в многогранник

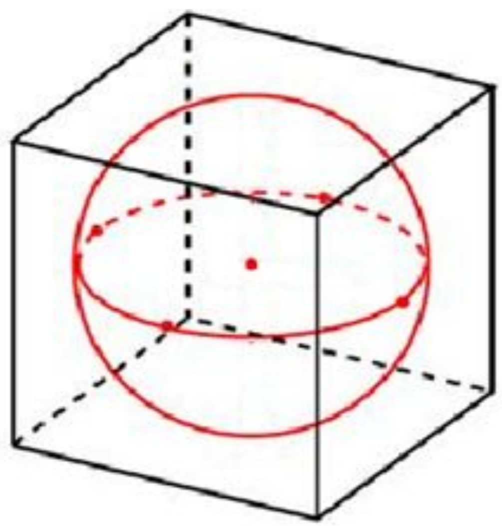
Определение

Многогранник называется описанным около сферы(а сфера вписанной в многогранник), если все грани многогранника касаются этой сферы.









Следствие

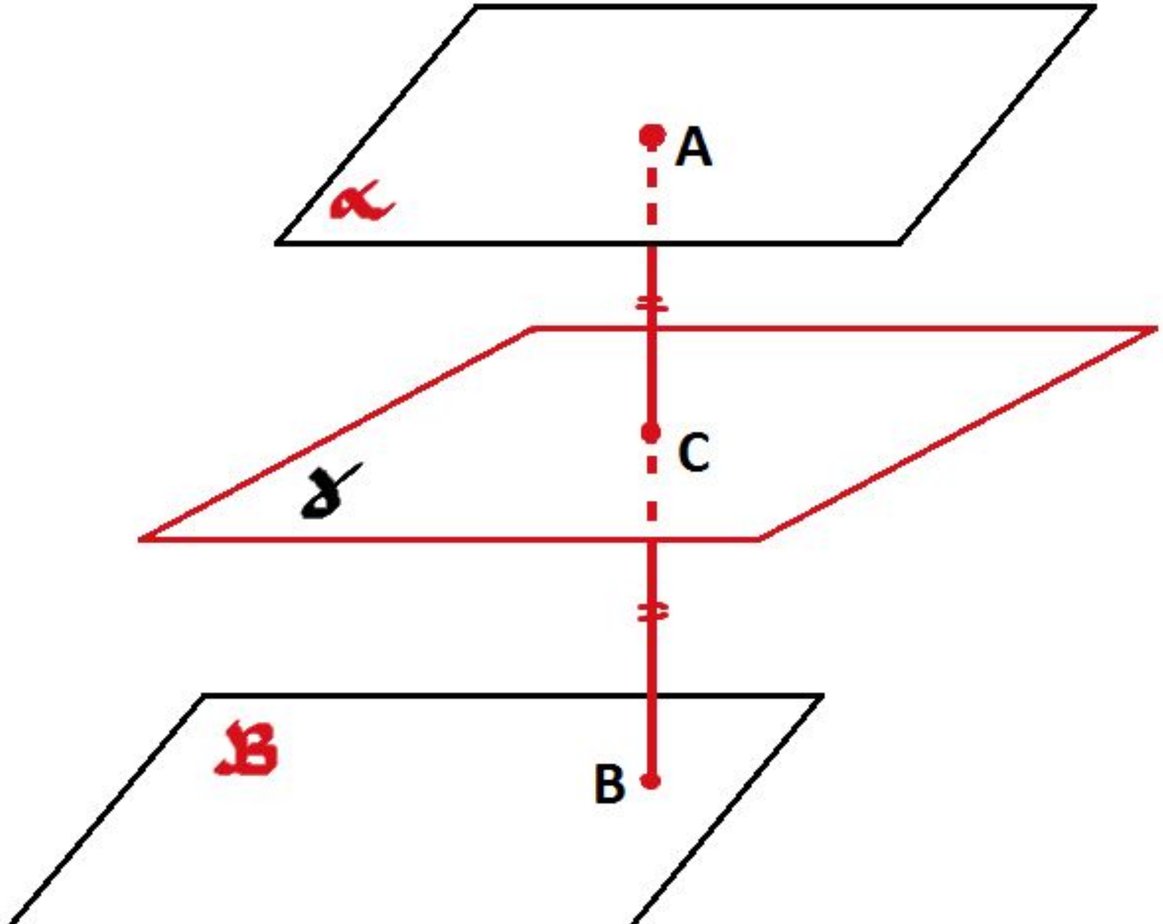
Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

Подготовительные задачи

1. Где расположено множество точек пространства , равноудаленных от двух плоскостей?

Теорема 1

Множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей ,есть плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра этих плоскостей.

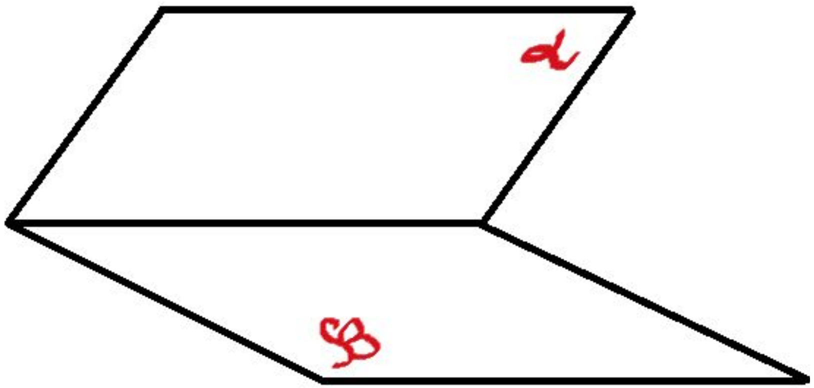


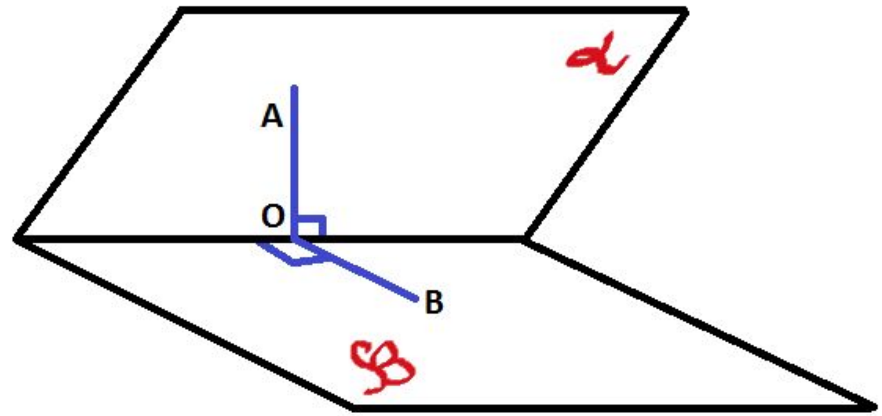
Дано:
α || β;

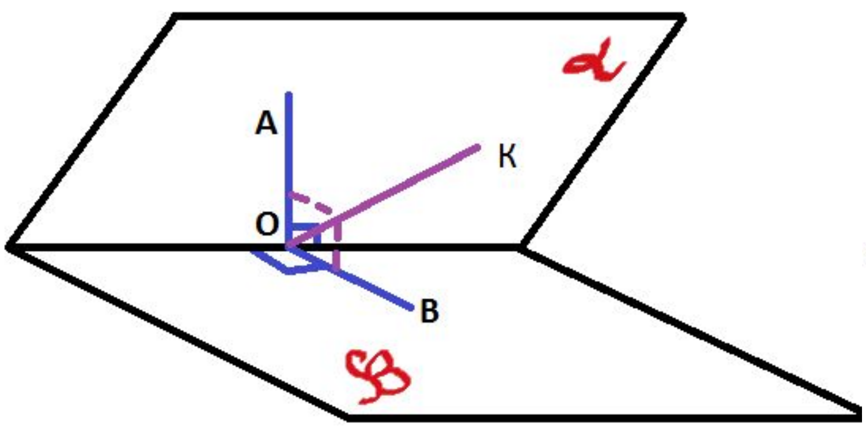
γ|| α; γ|| β;
AC=CD; AB |α; AB| β

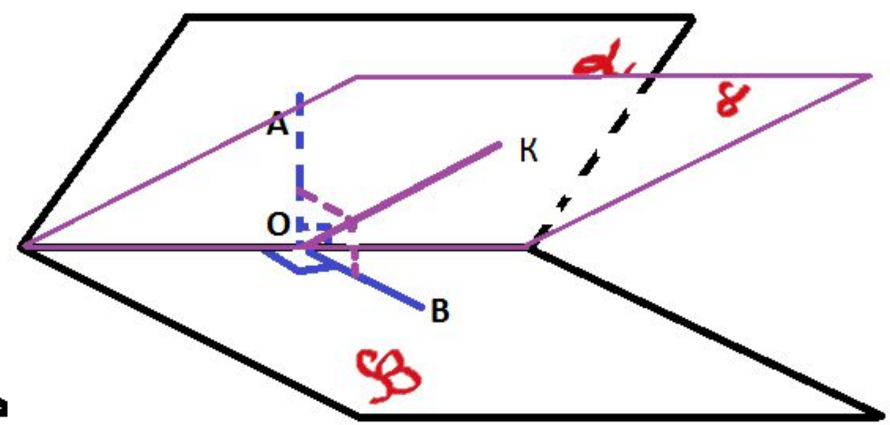
Теорема 2

Множество точек, равноудаленных от граней двугранного угла, есть есть биссектриса (биссекторная плоскость) этого двугранного угла.



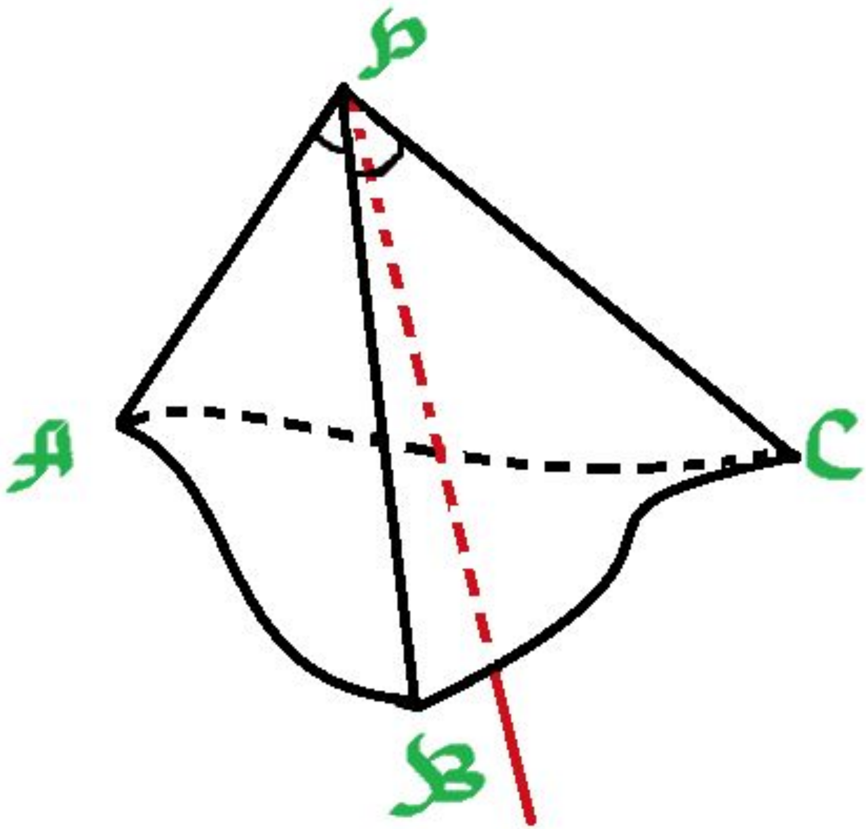






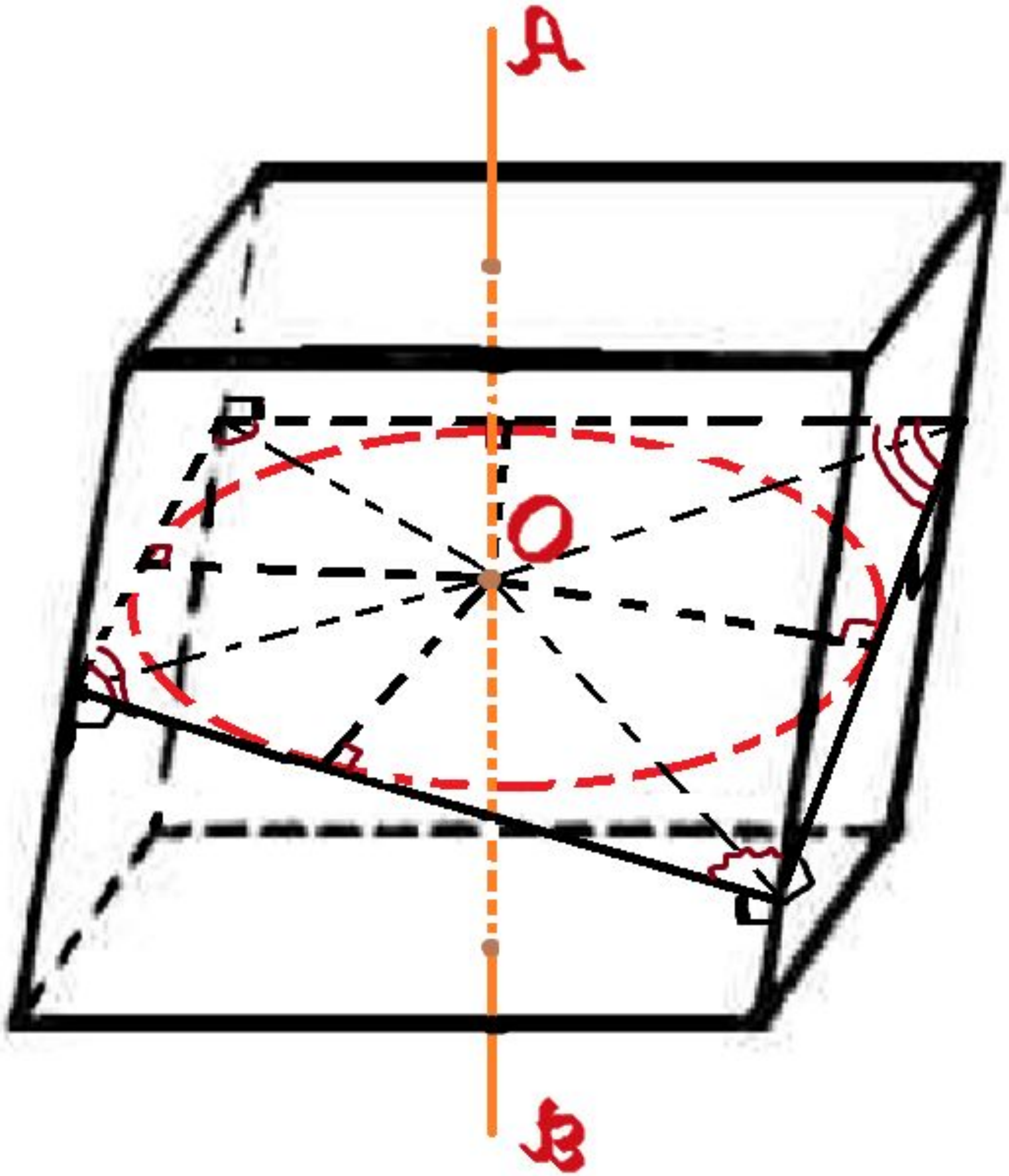
Теорема 3

Множество точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, есть биссектриса этого трехгранного угла.



Биссектрисой трехгранного угла называется луч с началом в вершине данного трехгранного угла, который образует равные углы с гранями этого трехгранного угла.

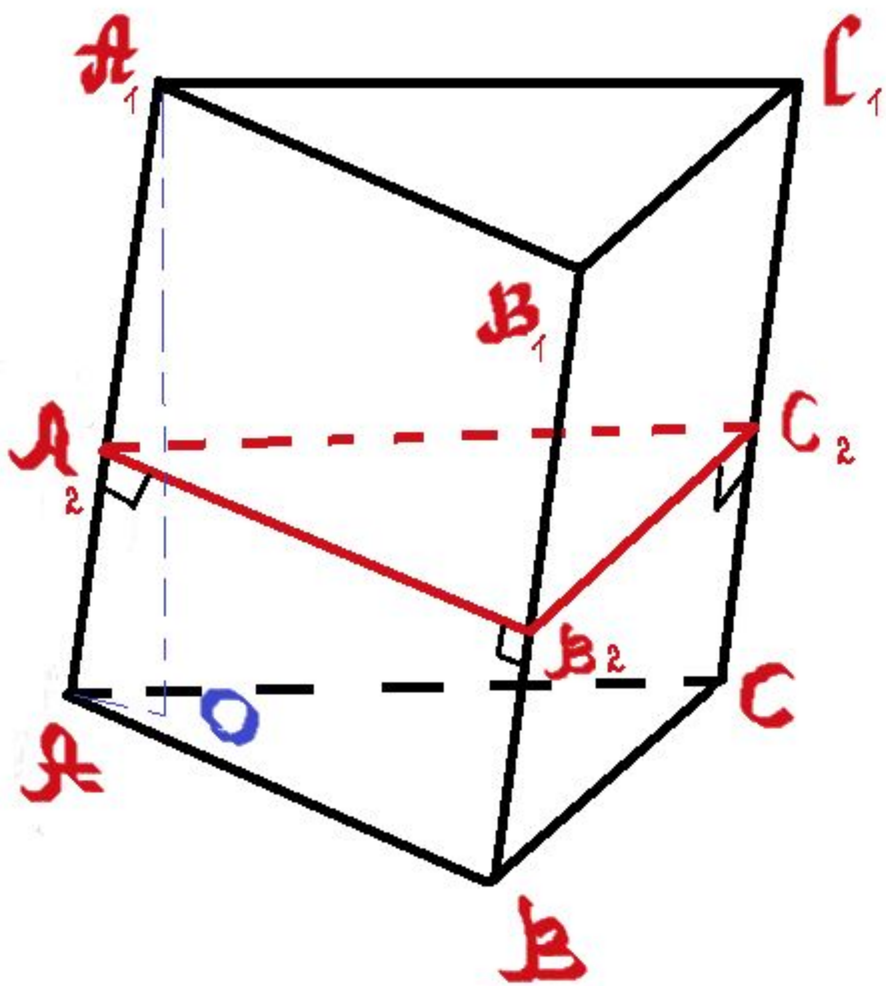
Сфера, вписанная в призму



Теорема 4

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

2. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы 13,14,15.В призму вписан шар. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем призмы и объем шара.



Решение.

($A_2B_2C_2$)-перпендикулярное сечение.

$V_{ш.} = \frac{4}{3}\Pi R_{ш.}^3$

$S = \frac{1}{2} P r_{окр}$

1) $R_{ш.} = r_{впис.окр.} = S_{A2B2C2} / p$

$p = 21$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S_{A2B2C2} = 84$;

$R_{ш.} = 84/21 = 4$;

$V_{ш.} = \frac{4}{3}\Pi R_{ш.}^3$; $V_{ш.} = 256\Pi/3$;

2) $V_{пр.} = S_{перп.сеч.} * AA_1$;

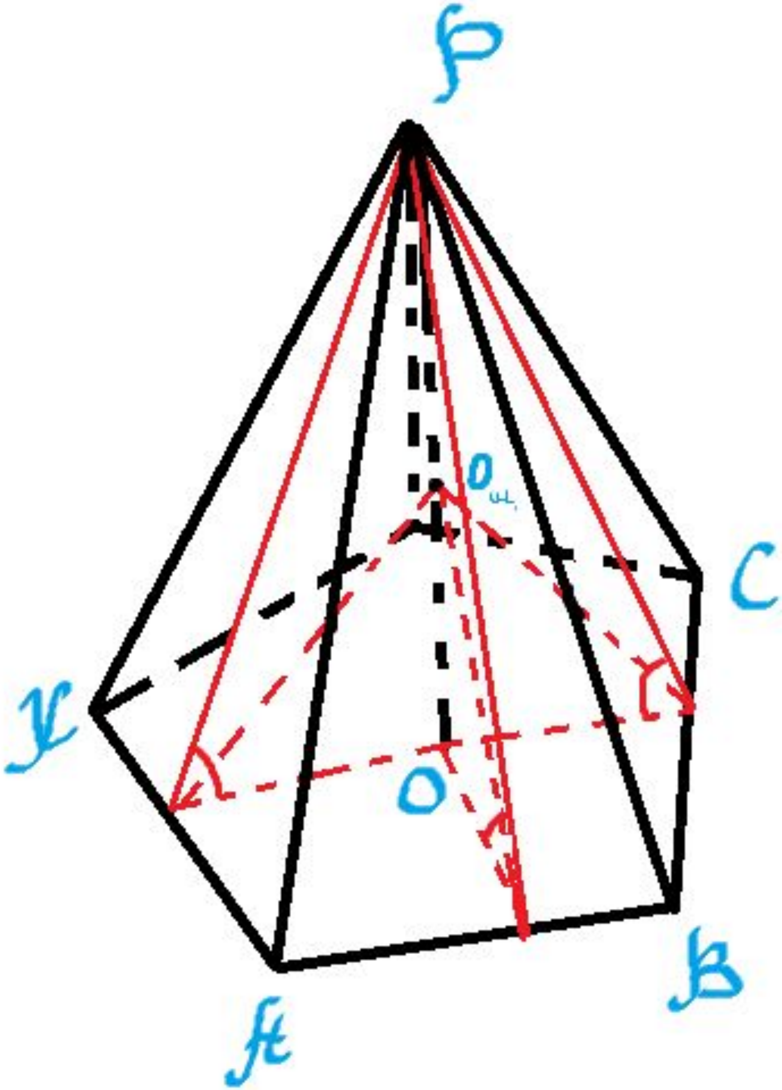
$AA_1 = A_1O/\sin \alpha = 8/\sin \alpha$;

$V_{пр.} = 84*8/\sin \alpha = 672/\sin \alpha$.

Ответ: $256\Pi/3$; $672/\sin \alpha$.

Сфера, вписанная в пирамиду

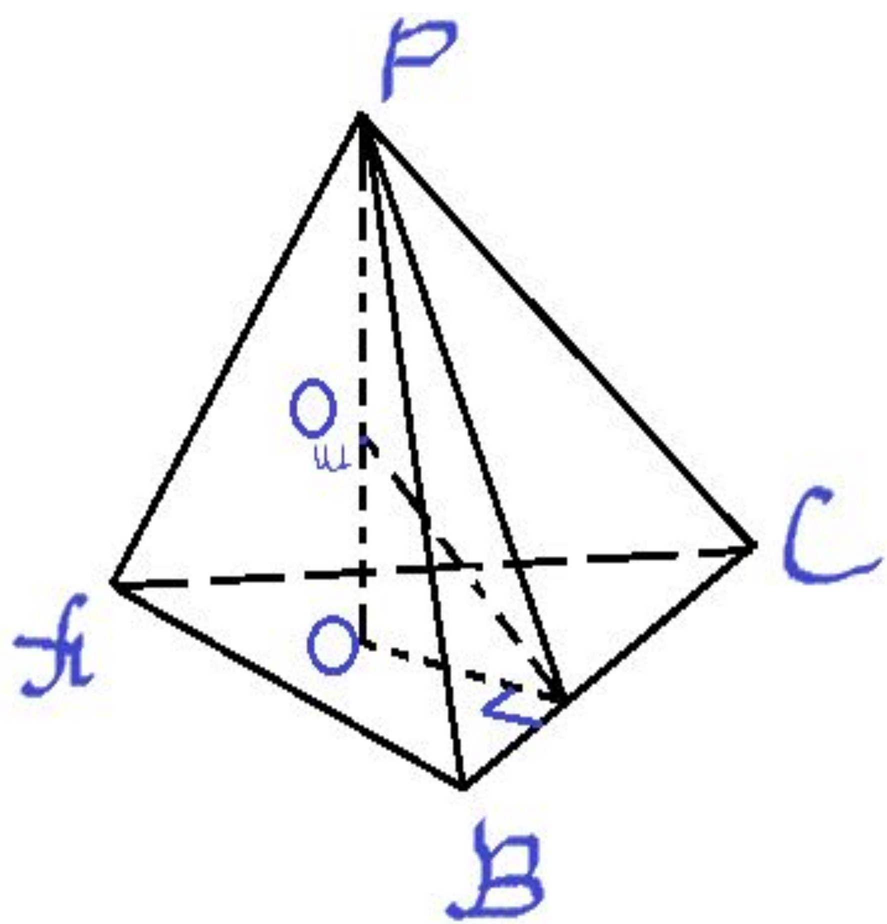
Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию.



Теорема 5

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию(двугранные углы при основании пирамиды равны), то в пирамиду можно вписать сферу, центр которой находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

3.Основание пирамиды- треугольник со сторонами 9,10 и 17.Все боковые грани наклонены под углом 45^o к основанию пирамиды .Найти радиус вписанного шара.



Решение.

1)OK= $r_{впис.окр.}$ $=S/p$;
$S=p^* r_{впис.окр.}$;$p=18$;
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
$S_{\Delta ABC}=36$;OK=2.
2) ΔPOK: KOш.-биссектриса, т.о.
OOш./Ош.р=OK/PK=cos 45^o ;
OOш./Ош.р=1/ $\sqrt{2}$;
<PKO=45^o ,т.е.OK=OP=2
½Rш-Rш.=1/ $\sqrt{2}$;
$\sqrt{2}$ Rш.=2-Rш.;
Rш.=2/(1+ $\sqrt{2}$)=2($\sqrt{2}$-1).
Ответ: 2($\sqrt{2}$-1).

Теорема 6

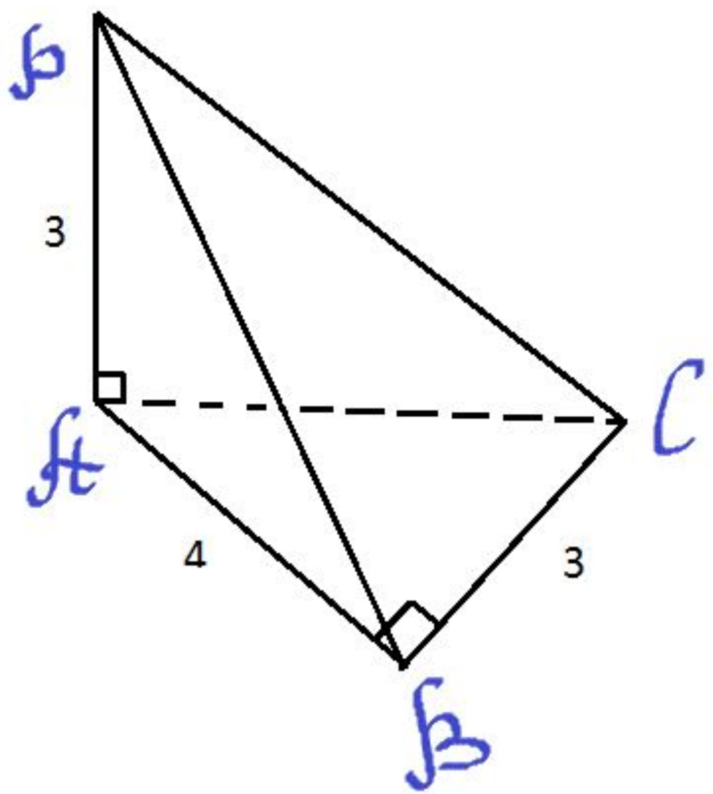
В любой тетраэд можно вписать сферу.

Теорема 7

Если в многогранник, объем которого равен V,а площадь поверхности равна S, вписан шар радиуса R,то имеет место соотношение: $\boxed{V=\frac{1}{3}S*R}$

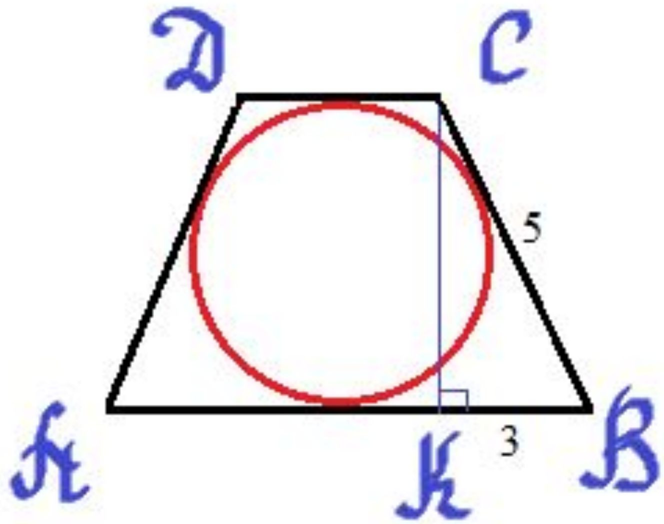
3.Основание пирамиды- треугольник ABC,B котором AB|BC,AB=4,BC=3.Боковое ребро PA перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 3.Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Решение.



*1)Vпир.=$\frac{1}{3}$S $_{\Delta ABC}$*AP;*
Vпир.=$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$*3*4*3=6.*
2)PB|BC(по теореме о трех перпендикулярах);AC=PB=5.
3) $S_{\Delta PAB}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}*4*3=6$.
$S_{\Delta PBC}=S_{\Delta PAC}=\frac{1}{2}*3*5=7{,}5$.
*Sполн.=2*6+2*7,5=12+15=27.*
4)Rш.=3 Vпир./S;
*Rш.=3*6/27=$\frac{2}{3}$;*
Vш.=$\frac{4}{3}$ПR^3=32П/81.
Ответ: 32П/81.

4. Шар вписан в прямую призму, основание которой- равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8.Найдите объем шара и объем призмы.



Решение.

1)Rш.= $r_{\text{впис.окр.}}$;Hпр.=$D_{\text{впис.окр.}}$=CK.

2)DC+AB=AD+CB;

2BC=2+8; BC=5.

3)BC=½(AB-DC); BK= ½(8-2)=3;

4) ΔBCK:CK=4; Rш.=2.

5)Vпр.=Sосн.*Hпр.;

Vпр.=80;

Vш.= ⁴⁄₃ΠR ^{3} ;

Vш.= ⁴⁄₃Π2 ^{3} =32Π/3.

Ответ: 32Π/3.

Спасибо за внимание