Федеральное государственное образовательное учреждение среднего профессионального образования «Димитровградский технический колледж»

Проект

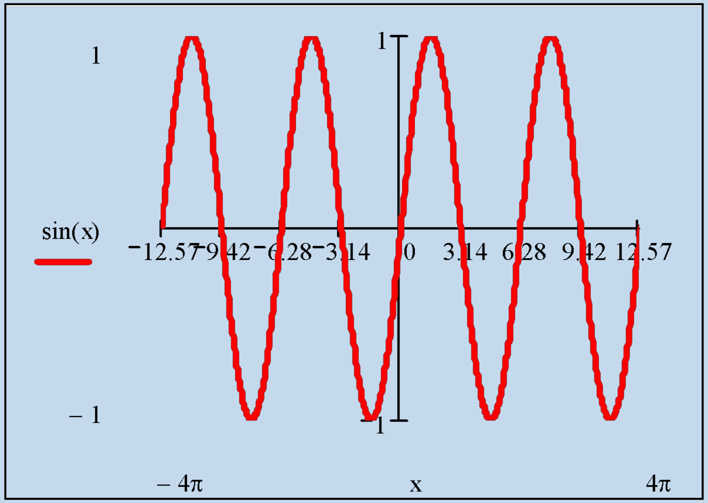
по теме: **«Трансцендентные кривые»**

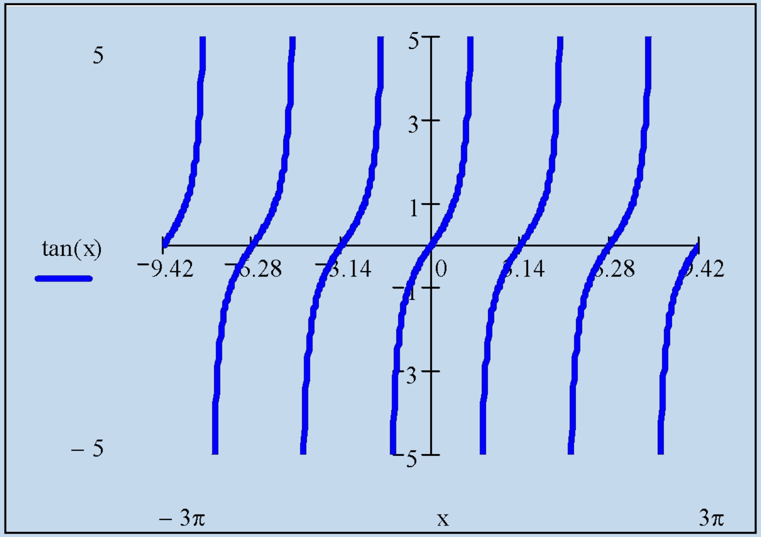
Выполнил: Семенов Алексей
Руководитель: Кузьмина В.В.

Содержание

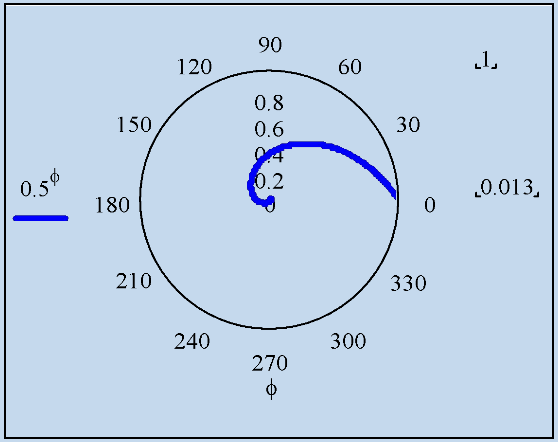
Большой интересный класс составляют **трансцендентные кривые**

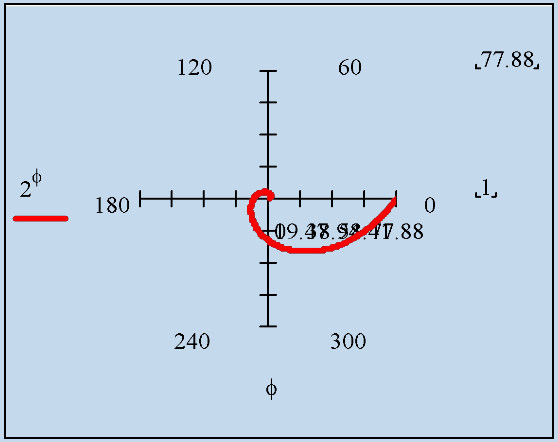
К ним относятся графики тригонометрических функций (синусоида, тангенсоида), логарифмической функции, показательной функции, гиперболических функций, а также много других линий, которые будут рассмотрены в дальнейшем.





Трансцендентная кривая





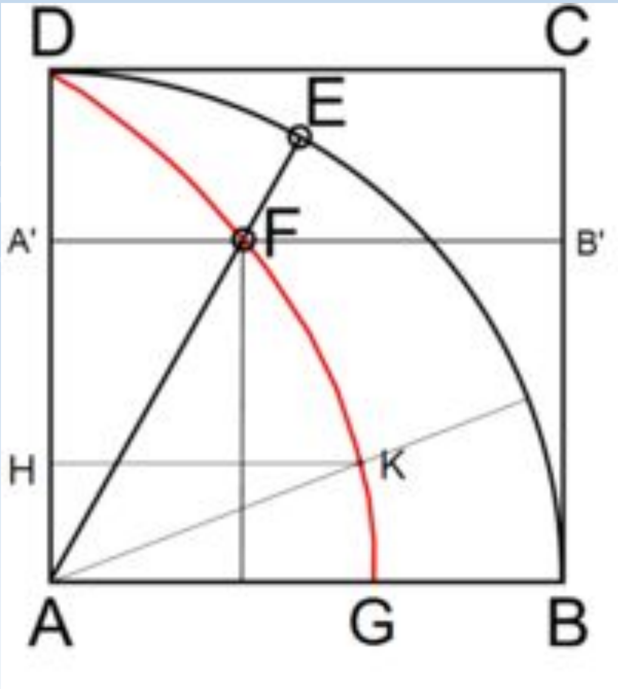
Логарифмическая спираль $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi}$

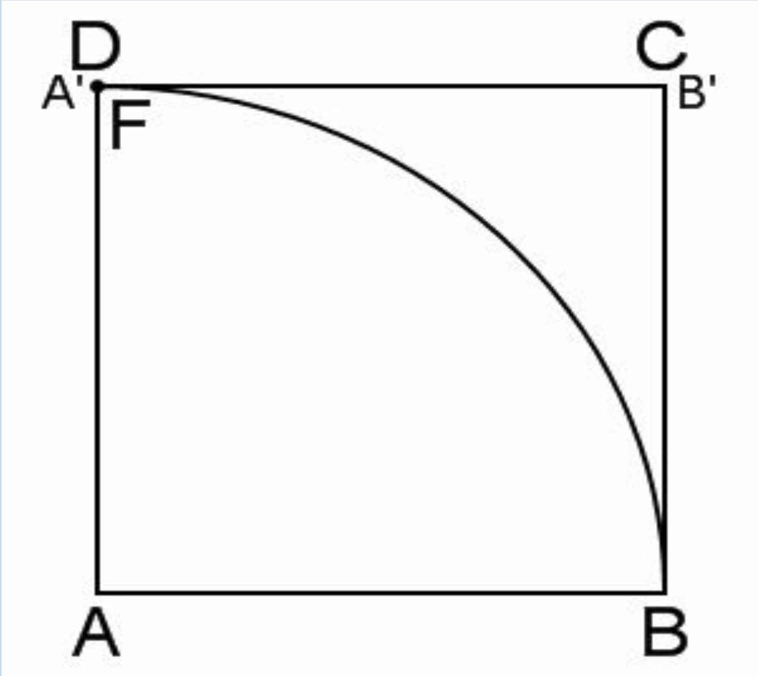
Логарифмическая спираль $\rho = 2^{\varphi}$

Трансцендентная кривая - это кривая, уравнение которой в декартовой системе координат не является алгебраическим (в других системах координат может быть алгебраическим.)

Квадратриса

Квадратриса (или **Квадратрисса**) — плоская трансцендентная кривая, определяемая кинематически. Открыта, по сообщению Прокла Диадоха, софистом Гиппием (V век до н. э.), использовалась в античные времена для решения задач квадратуры круга и трисекции угла.





Уравнения

В полярных координатах:

$$\rho = \frac{2R}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

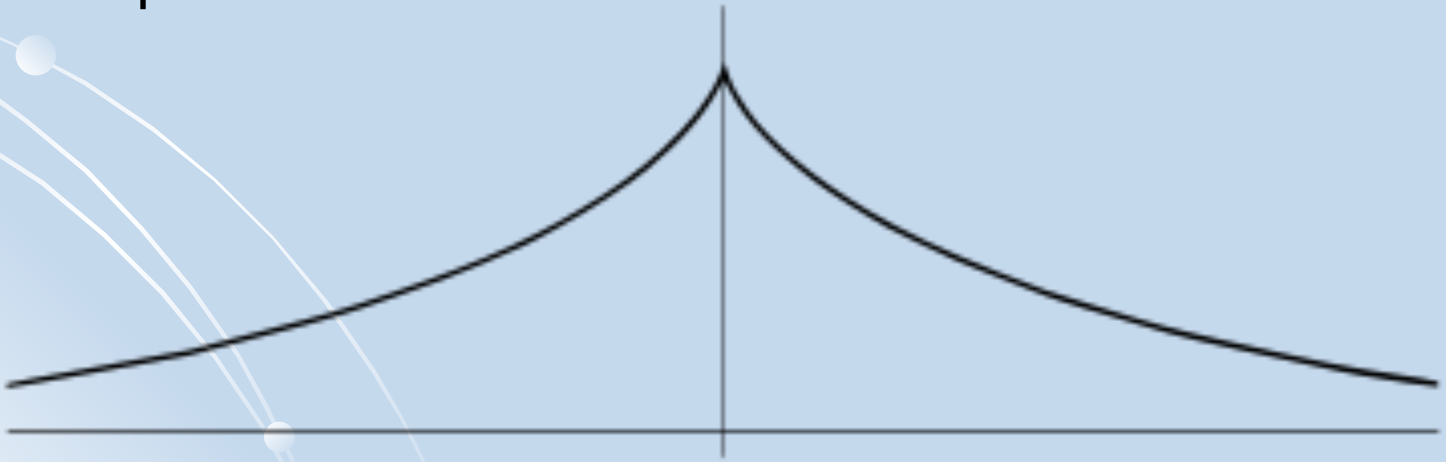
В прямоугольных координатах можно записать уравнение квадратрисы в следующем виде:

$$x = y\,\mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2R}$$

Трактриса

Трактриса (**линия влечения**) — (от лат. *trahere* — тащить) — плоская трансцендентная кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной.

Такую линию описывает предмет, волочащийся на верёвке длины *a* за точкой, движущейся по оси абсцисс. Трактриса также является частью кривой погони при равной скорости догоняющего и убегающего.



Уравнения

Параметрическое описание:

$$x = \pm\, a \cdot \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

$$y = a \cdot \sin t$$

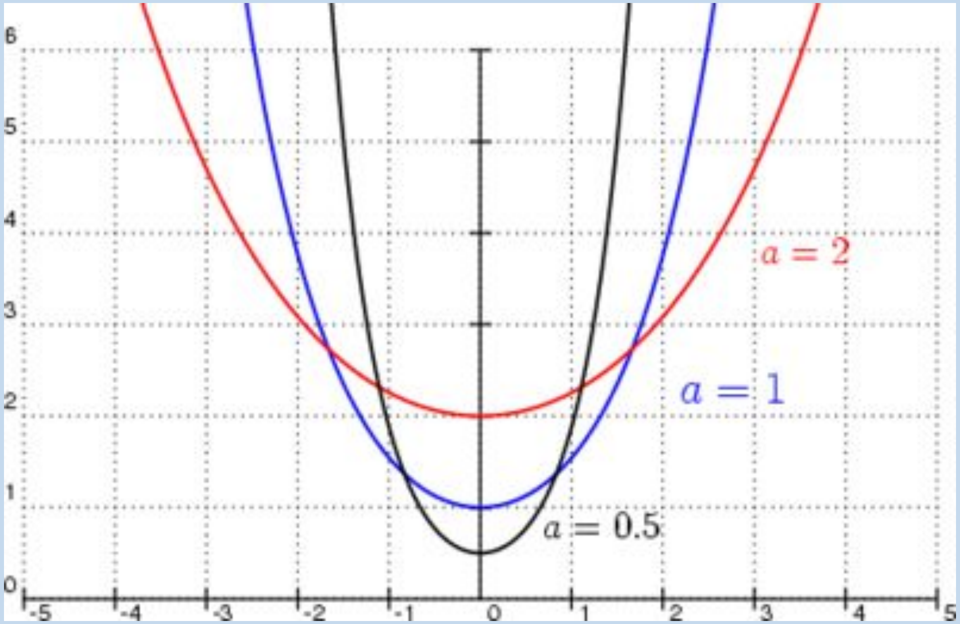
Уравнение в декартовых координатах:

$$x = \pm \left(a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \right)$$

Цепная линия

Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь (отсюда название) с закрепленными концами в однородном гравитационном поле.

Является плоской трансцендентной кривой.



Уравнение в декартовой системе координат

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

Краткая историческая справка

Поверхность, образованная вращением дуги цепной линии вокруг оси Ох, называется катеноидом.

Цепные линии используются в расчетах, связанных с провисанием проводов, тросов и т.п. Форму кривой провисания впервые рассматривал Г. Галилей (1638), который считал ее параболой. Истинная форма кривой найдена Г. Лейбницем, Я. и И. Бернулли, Х. Гюйгенсом.

Х. Гюйгенс предложил термин «Цепная линия»

Применение

Арки

Перевёрнутая цепная линия — идеальная форма для арок. Однородная арка в форме перевёрнутой цепной линии испытывает только деформации сжатия, но не излома.

Мосты

Горбатый мост имеет форму, близкую к цепной линии.

Стоит заметить, что цепь подвесного моста имеет форму параболы, а не цепной линии. Это связано с тем, что пролёт моста намного тяжелее цепи.

ЦИКЛОИДА

Циклоида (от греч.— круглый) — плоская трансцендентная кривая. Циклоида определяется кинематически как траектория фиксированной точки *производящей* окружности радиуса *r*, катящейся без скольжения по прямой.

Уравнения

Примем горизонтальную ось координат в качестве прямой, по которой катится производящая окружность радиуса *r*.

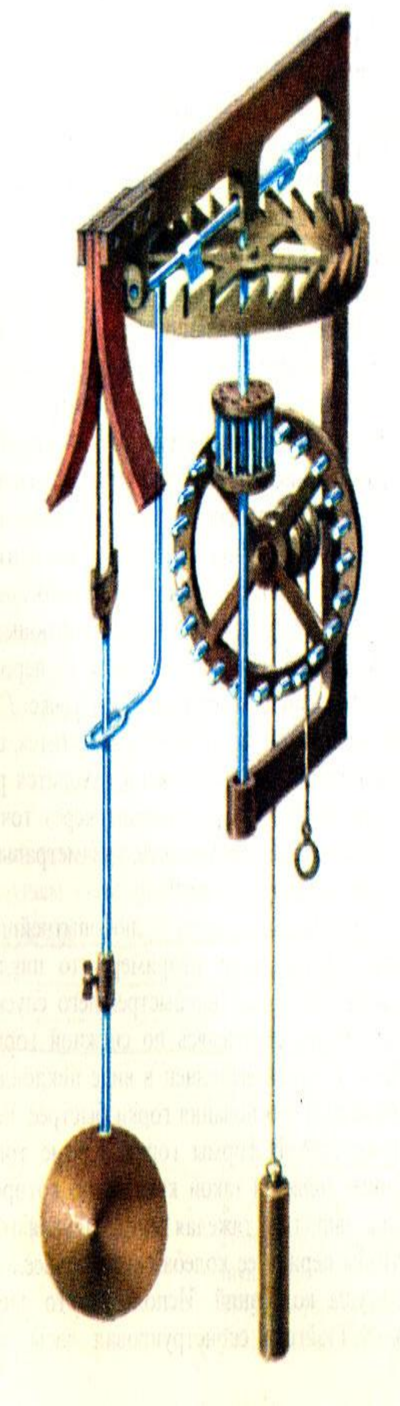
- Циклоида описывается параметрическими уравнениями:
  $x = rt - r\sin t,$
  $y = r - r\cos t.$
- Уравнение в декартовых координатах:

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

- Циклоида может быть получена как решение дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r-y}{y}.$$

У циклоиды масса любопытнейших свойств. Оказывается, например, что циклоида является кривой наибыстрейшего спуска. Иначе говоря, скатываясь по снежной горке, профиль которой выполнен в виде циклоиды, мы окажемся у основания горки быстрее, чем в случае другой формы горки. Траектория конца маятника, как и ограничивающие его боковые "щеки", представляют из себя циклоиду



Архимедова спираль

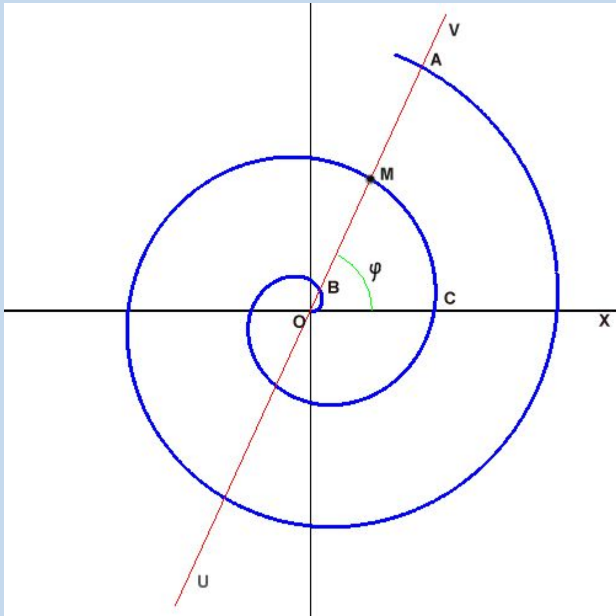
Архимедова спираль — плоская кривая, траектория точки *M* (см Рис. 1), которая равномерно движется вдоль луча *OV*

с началом в *O*, в то время как сам луч *OV* равномерно вращается вокруг *O*.

Другими словами, расстояние

ρ = *OM* пропорционально углу поворота φ луча *OV*.

Повороту луча *OV* на один и тот же угол соответствует одно и то же приращение ρ.



Вычисление длины дуги Архимедовой спирали

Бесконечно малый отрезок дуги *dl* равен (см. Рис.):

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + dh^2}$$

где *d*ρ — приращение радиуса ρ, при приращении угла φ на *d*φ. Для бесконечно малого приращения угла *d*φ, справедливо:

$$dh^2 = (\rho d\phi)^2$$

Поэтому:

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}$$

так как ρ = *k*φ и

*d*ρ = *kd*φ

или

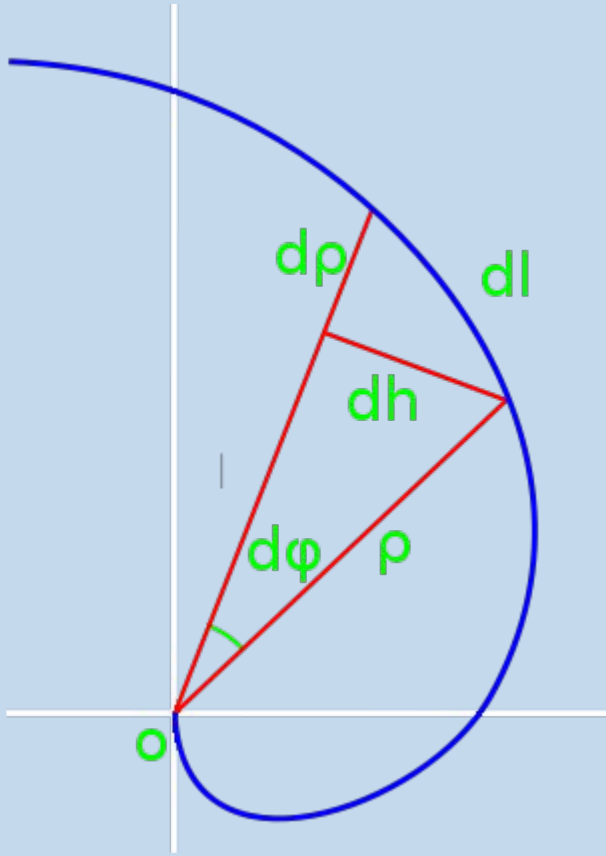
$$dl = \sqrt{k^2 d\phi^2 + k^2\phi^2 d\phi^2}$$

$$dl = k d\phi\sqrt{1 + \phi^2}$$

Длина дуги L равна интегралу от *dl* по *d*φ в пределах от 0 до φ:

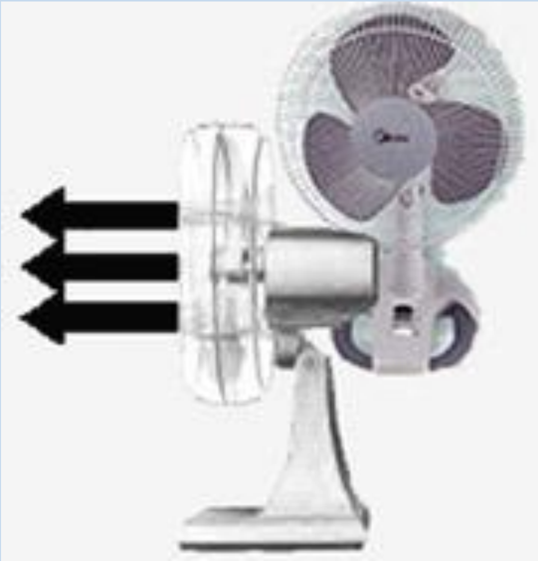
$$L = \int_0^\phi k\sqrt{1 + \phi^2}d\phi$$

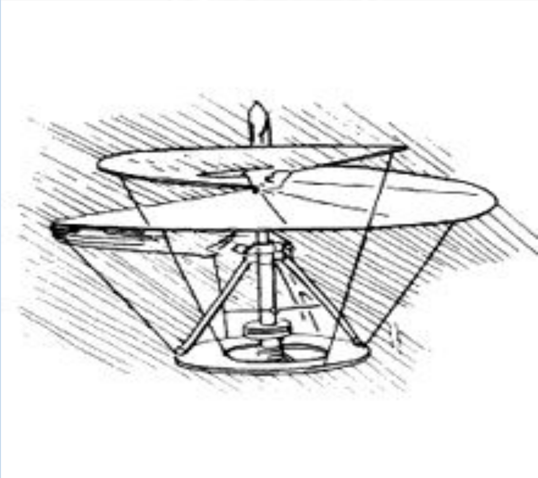
$$L = \frac{k}{2}\left[\phi\sqrt{1 + \phi^2} + \ln\left(\phi + \sqrt{1 + \phi^2}\right)\right]$$



Спирали в природе и технике

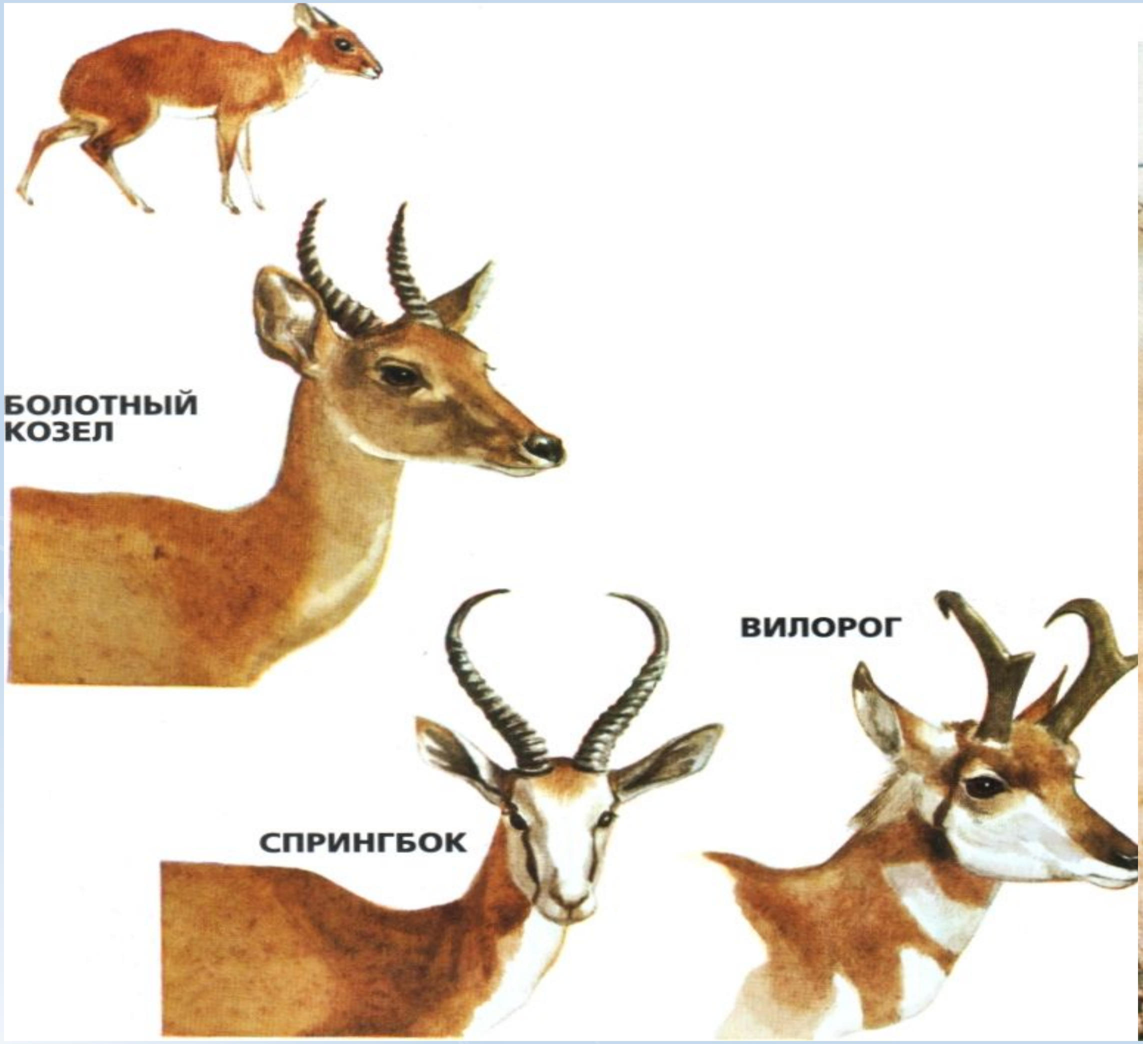
Спирали в нашей жизни встречаются на каждом углу от простых вентиляторов и тисков, до паутины и винтов моторных лодок.

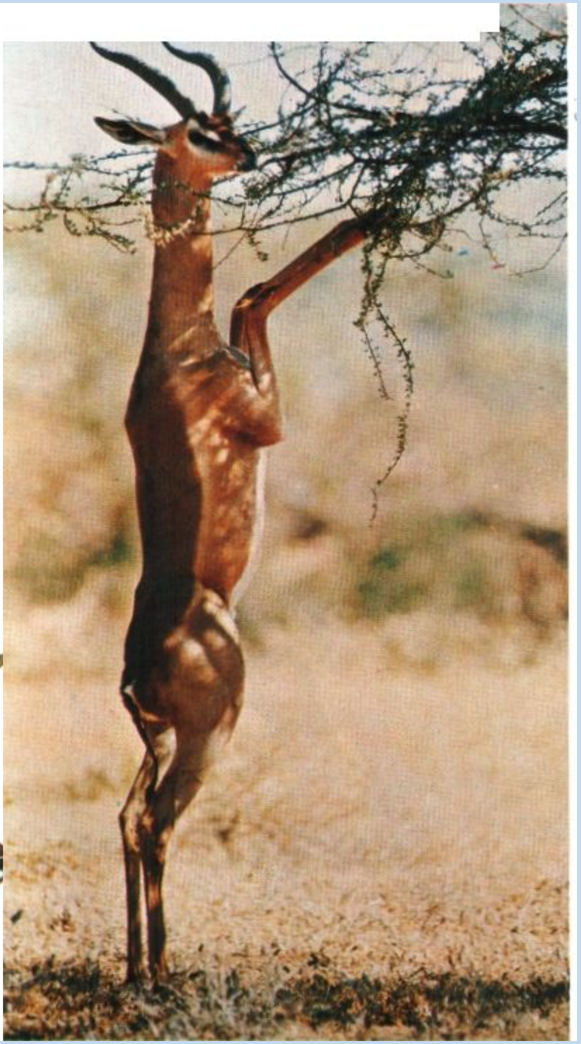




Спирали в природе и технике

Спирали в природе и технике

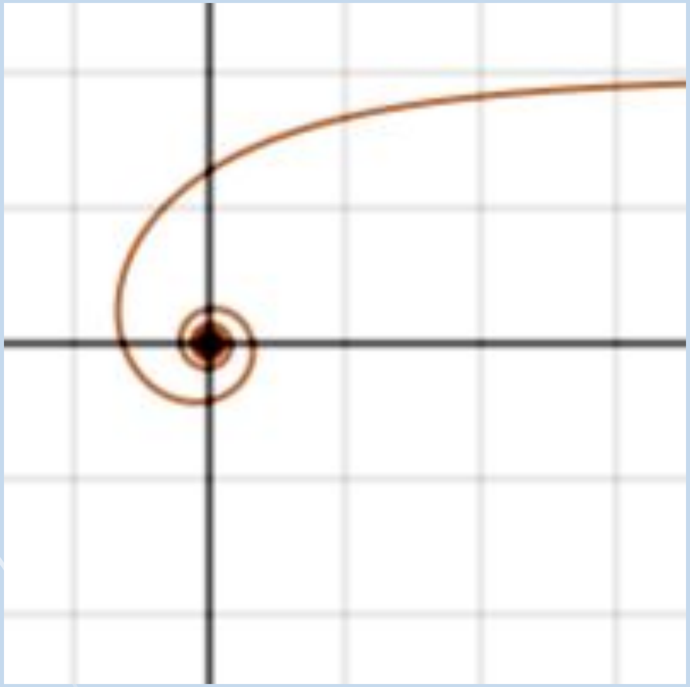




Спиральные галактики

Гиперболическая спираль — плоская трансцендентная кривая.

Уравнение гиперболической спирали в полярной системе координат является обратным для уравнения Архимедовой спирали и записывается так: $\rho = a^{\varphi}$



Уравнение гиперболической спирали в декартовых координатах: $x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \sin \phi,$

Параметрическая запись уравнения:

$$x = a\frac{\cos t}{t}, \qquad y = a\frac{\sin t}{t},$$

Спираль имеет асимптоту *y* = *a*: при *t* стремящемся к нулю ордината стремится к *a*, а абсцисса уходит в бесконечность:

$$\lim_{t\to 0} x = a \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{t} = \infty,$$

$$\lim_{t\to 0} y = a \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = a \cdot 1 = a.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ - плоская трансцендентная кривая, пересекающая все радиусы-векторы под одним и тем же углом μ (рис.1). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho = a\,e^{\varphi}$$

При a > 1 и $\varphi \longrightarrow +\infty$ логарифмическая спираль развертывается против хода часовой стрелки, при $\varphi \to -\infty$ спираль закручивается по ходу часовой стрелки, стремясь к своей асимптотической точке О.

Если a < 1, логарифмическая спираль закручивается против хода часовой стрелки.

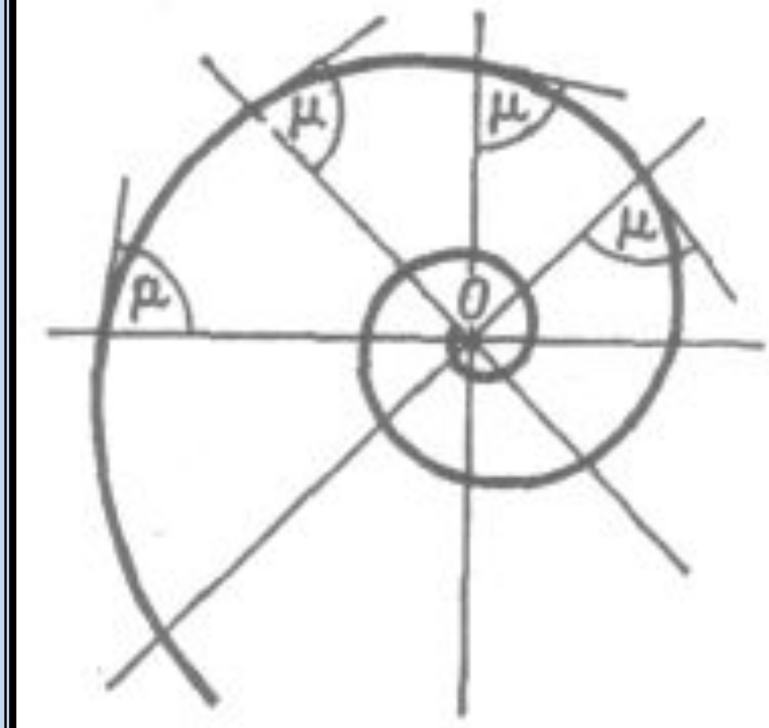


Рис. 1.

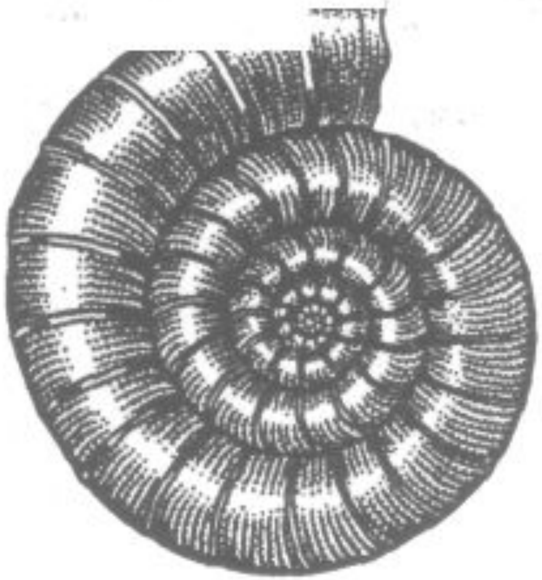


Рис. 2.

Логарифмическая спираль относится к псевдоспиралям. Логарифмическая спираль переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости:

её Эволюта, подера – также логарифмическая спираль. При стереографической проекции плоскости на сферу логарифмическая спираль переходит в локсодромию. Логарифмическая спираль широко используется в технике:

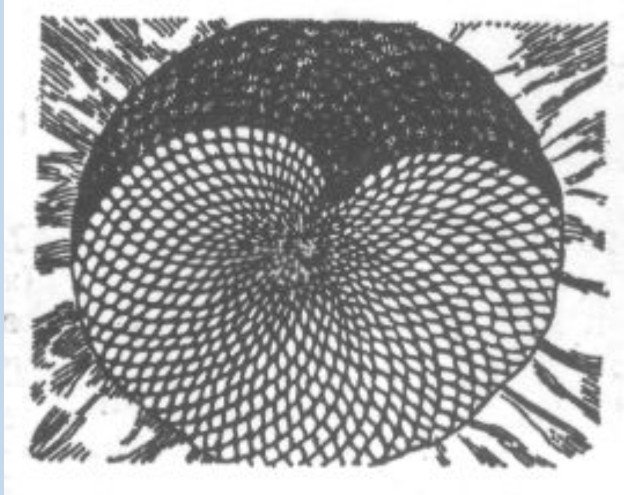


Рис. 3.

Логарифмическая спираль выполняет профиль вращающихся ножей и фриз, зубчатых передач и др.

По логарифмической спирали очерчены некоторые раковины, по дугам, близким к логарифмической спирали, расположены семечки в подсолнухе, чешуйки в шишках и т.д.

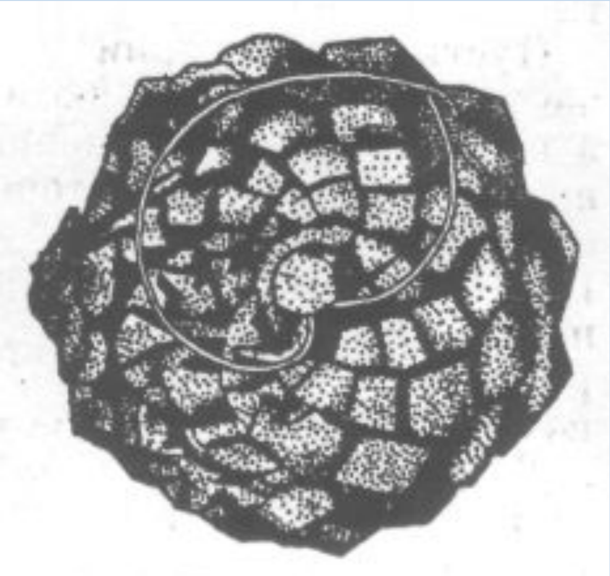


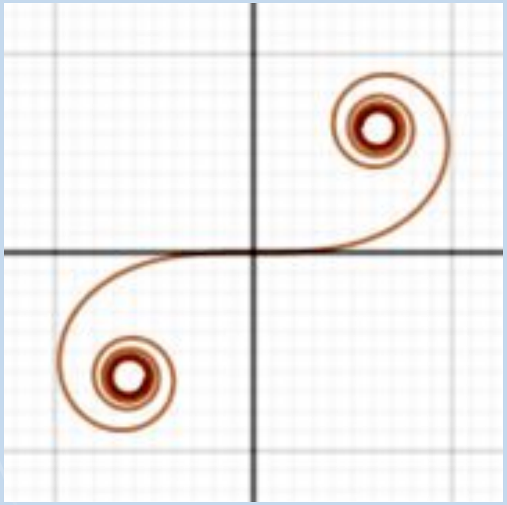
Рис. 4.

Клотоида или **Спираль Корню** —

кривая, у которой кривизна изменяется линейно как функция

$$1/R \sim L \Leftrightarrow R \cdot L = \mathrm{const}$$

Она используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Когда участок дороги имеет форму клотоиды, руль поворачивается равномерно. Такая форма дороги позволяет преодолевать поворот без существенного снижения скорости. Клотоида применялась Корню для облегчения расчёта дифракции в прикладных задачах.



Описывается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(k-1)\left(\cos t + \frac{\cos((k-1)t)}{k-1}\right) \\ y = r(k-1)\left(\sin t - \frac{\sin((k-1)t)}{k-1}\right) \end{cases}$$

где $k = \frac{R}{r}$, где *R* — радиус неподвижной окружности, *r* — радиус катящейся окружности.

Модуль величины *k* определяет форму ***гипоциклоиды.*** При *k* = 2 гипоциклоида представляет собой диаметр неподвижной окружности, при *k* = 4 является ***астроидой.***

Трохоида

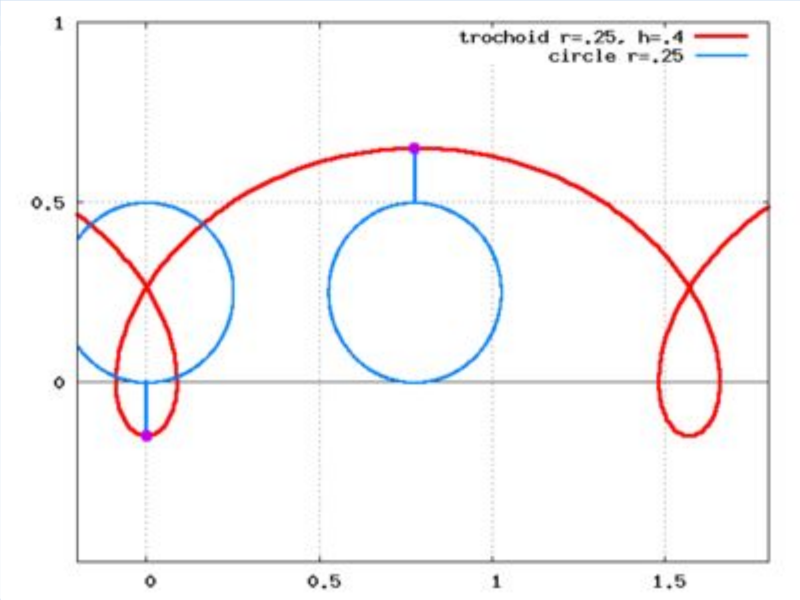
Трохоида (от греч. τροχοειδής — колесообразный) — плоская трансцендентная кривая, описываемая параметрическими уравнениями

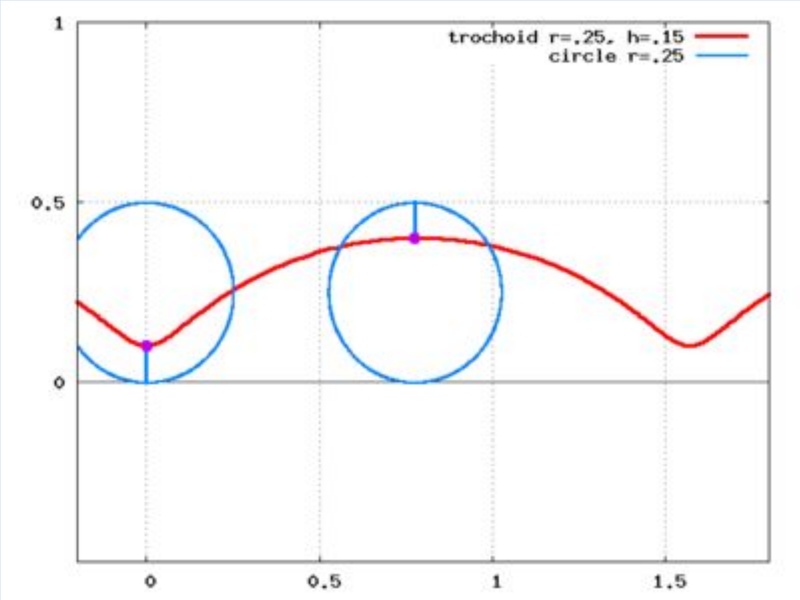
- $x = rt - h\sin t$,
- $y = r - h\cos t$.

Представляет собой траекторию точки, жёстко связанной с окружностью радиуса r, катящейся без скольжения по прямой (в приведённом примере такой прямой является горизонтальная ось координат). Расстояние точки от центра окружности — h.

Если $h = r$ трохоида переходит в циклоиду.

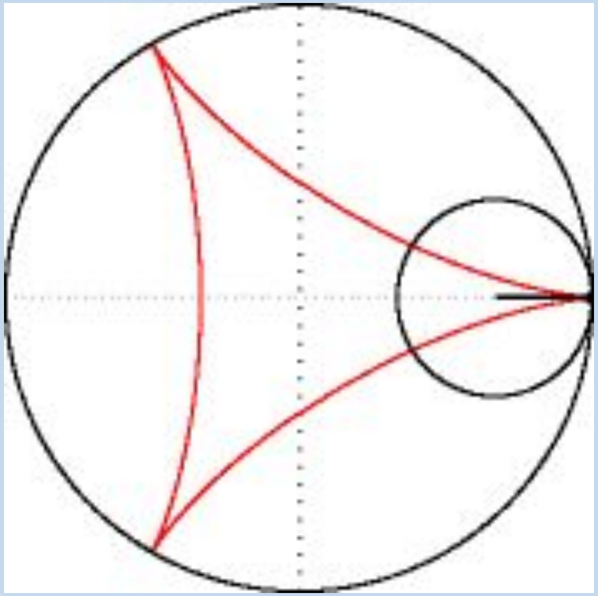
При $h > r$ трохоиду называют удлинённой циклоидой, а при $h < r$ — укороченной циклоидой.





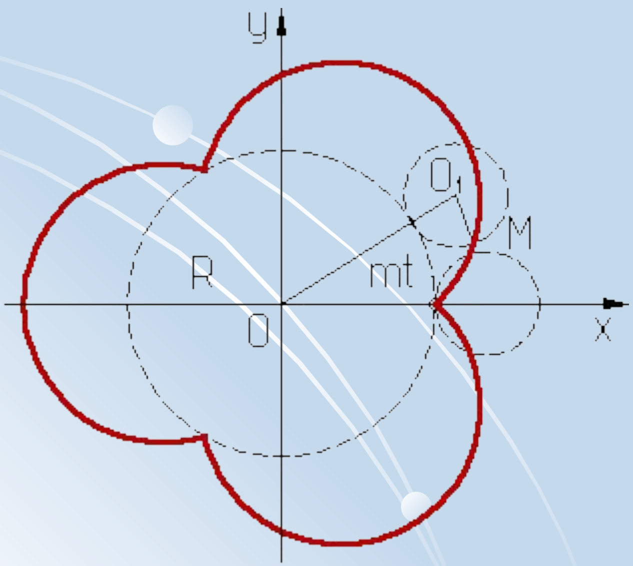
Гипоциклоида

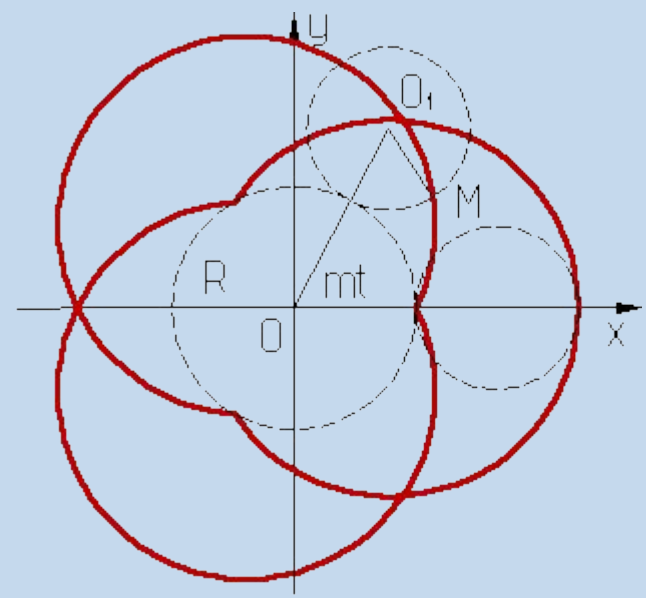
Гипоциклоида (от греческих слов ὑπό — под, внизу и κύκλος — круг, окружность) — плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности без скольжения.



Эпициклоида

Эпициклоида (от греч. ἐπί — на, над, при и κυκλος — круг, окружность) — плоская кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по другой окружности.





Уравнения

Если центр неподвижной окружности находится в начале координат, её радиус равен *R*, радиус катящейся по ней окружности равен *r*, то эпициклоида описывается параметрическими уравнениями относительно φ:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\varphi - r\cos(\alpha + \frac{R+r}{r}\varphi) \\ y = (R+r)\sin\varphi - r\sin(\alpha + \frac{R+r}{r}\varphi) \end{cases}$$

где α — угол поворота эпициклоиды относительно центра неподвижной окружности,   — параметр, но фактически это угол наклона отрезка между центрами к оси *OX*.

Можно ввести величину $k = \frac{R}{r}$ тогда уравнения предстанут в виде

$$\begin{cases} x = r(k+1)\left(\cos\varphi - \frac{\cos((k+1)\varphi)}{k+1}\right) \\ y = r(k+1)\left(\sin\varphi - \frac{\sin((k+1)\varphi)}{k+1}\right) \end{cases}$$

Применение

Последнее уравнение выражает такое кинематическое свойство эпициклоиды: если дуга обычной эпициклоиды перекатывается без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания двигается по эллипсу; центр эллипса лежит в той точке прямой, через которую перекатывается вершина эпициклоиды.

Информационные источники

Литература

1. Большой энциклопедический словарь «Математика»,

Гл. редактор Ю.В. Прохоров, Научное изд-во «Большая Российская Энциклопедия», М.: 1998

2. Д.В. Клетеник Сборник задач по аналитической геометрии под ред. проф. Н.В.Ефимова, Государственное изд-во физико-математической литературы, М.: 1960

3. Математическая энциклопедия. Главный редактор И. М. Виноградов, т.3 – М.: «Советская энциклопедия», 1982

Интернет ресурсы:
www.college.ru
www.gee.ru