

**Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 230»**

Ортотреугольник и его свойства

**Работу выполнила
ученица 9 «А» класса МОУ «Лицей» № 230
Волкова Екатерина Евгеньевна.**

**Руководитель:
Редкина Елена Ивановна**

**г.Заречный, Пензенская область
2008 г.**

Италия, начало XVIII века
Инженер и математик Фаньяно Дей
Тоски (1682—1766)

Задача: вписать в данный остроугольный
треугольник ABC треугольник
наименьшего периметра так, чтобы на
каждой стороне треугольника ABC лежала
одна вершина треугольника.

Существует единственный вписанный
треугольник наименьшего периметра
ортотреугольник.



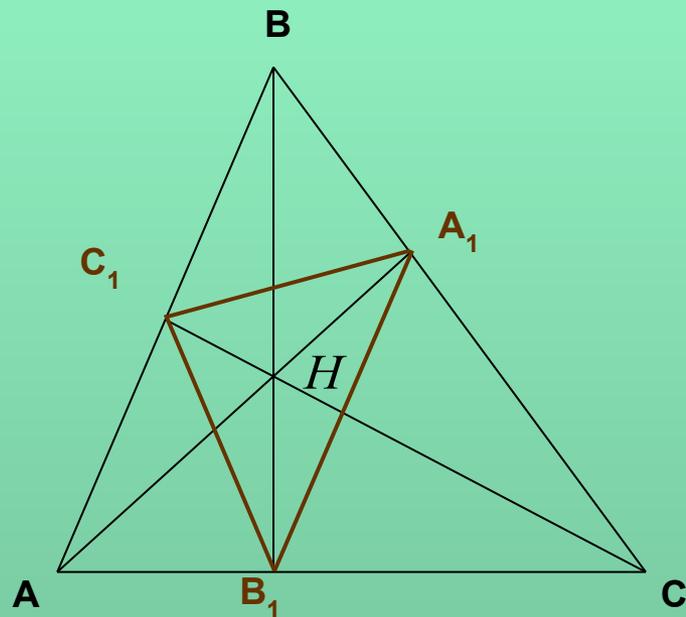
Цель данной работы:

описание дополнительных геометрических свойств треугольника.

Задачи:

- 1) выяснить, что такое ортотреугольник;
- 2) изучить его свойства;
- 3) рассмотреть возможное применение этих свойств к решению задач.

Определение ортотреугольника



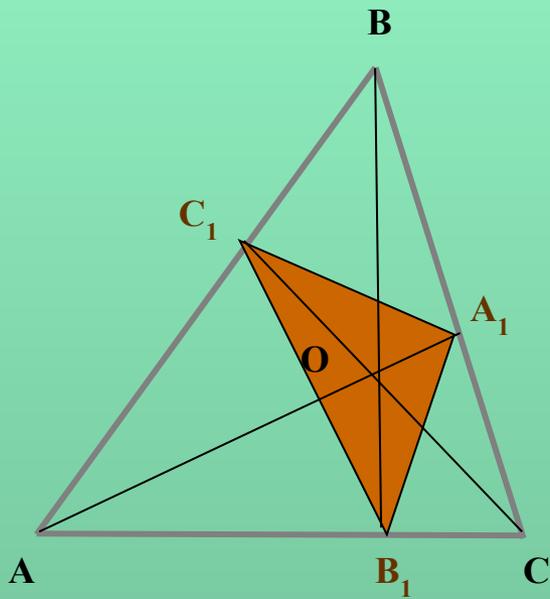
$\triangle ABC$ – остроугольный

AA_1, BB_1, CC_1 – высоты

$\triangle A_1B_1C_1$ – ортотреугольник

H – ортоцентр

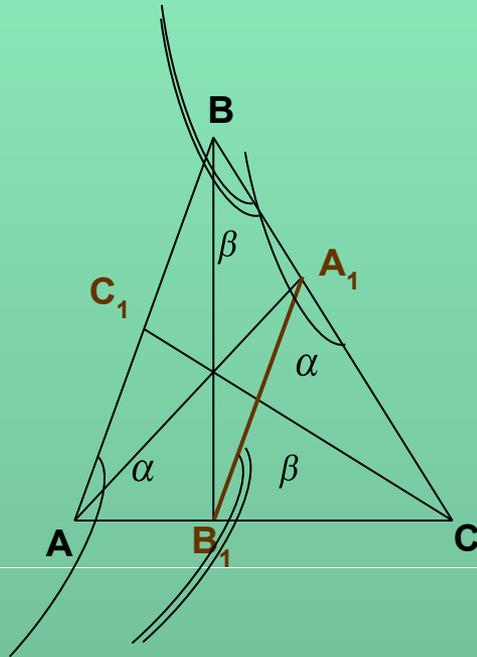
Свойства ортотреугольника



1. Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.
2. Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника.
3. Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.
4. Ортотреугольник – это треугольник с наименьшим периметром, который можно вписать в этот треугольник .
5. Периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты треугольника на синус угла, из которого она исходит.

2.1 Теорема о подобии треугольников

Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.



$$\Delta ACB \Rightarrow \angle B_1A_1C = \alpha, \angle A_1B_1C = \beta.$$

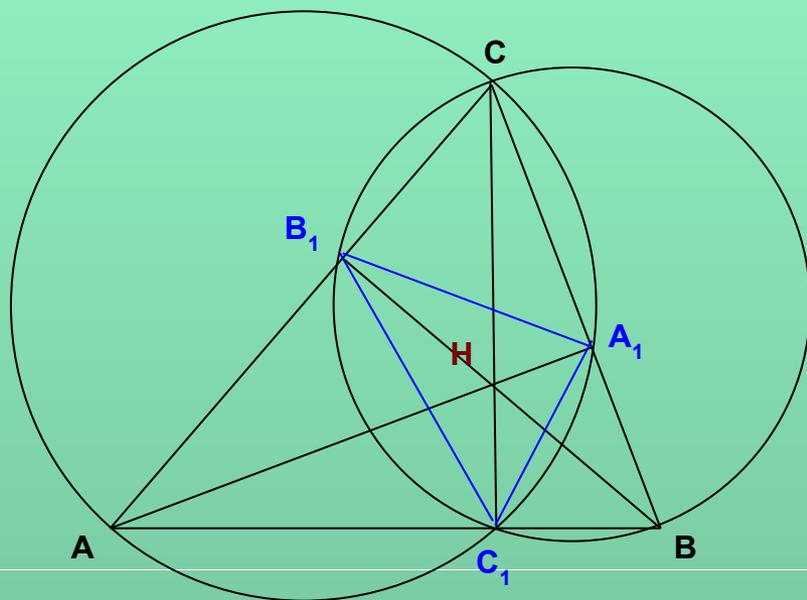
$$\left. \begin{array}{l} \angle C - \text{общий} \\ \angle AA_1C = \angle BB_1C \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C \Rightarrow \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

$$\Rightarrow \Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1 = \alpha \\ \angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1 = \beta \end{array} \right.$$

$$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \alpha \\ \angle BC_1A = \angle C \end{array} \right.$$

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle AC_1B_1 = \angle C \\ \angle AB_1C_1 = \angle ABC = \beta \end{array} \right.$$

2.2 Теорема о свойстве биссектрис ортотреугольника



$$\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$$

$$\angle B_1BC = \angle CAA_1$$

$$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$$

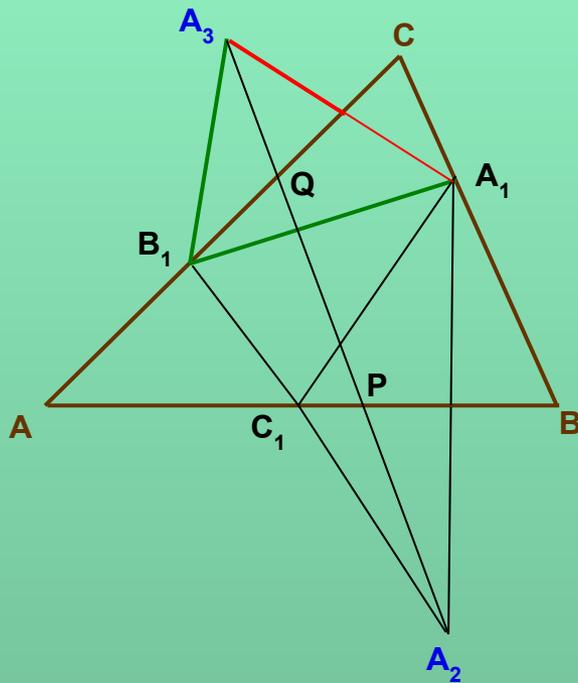
$$\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1 \Rightarrow$$

CC_1 – биссектриса $\angle B_1C_1A_1$;

AA_1 – биссектриса $\angle B_1A_1C_1$;

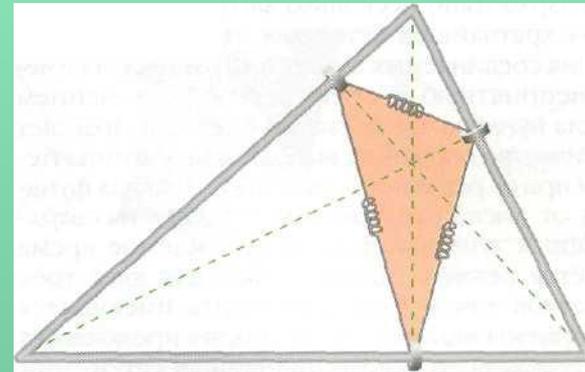
BB_1 – биссектриса $\angle A_1B_1C_1$.

2.3 Теорема Фаньяно

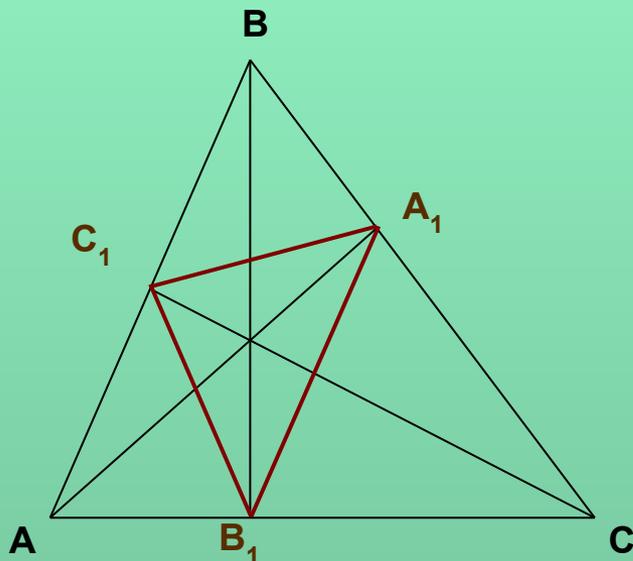


Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник.

2.4 Физический смысл и механическая модель задачи Фаньяно



2.5 Периметр ортотреугольника



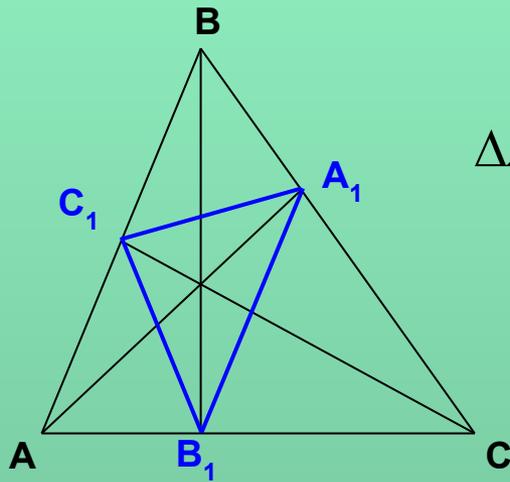
$$P_{A_1B_1C_1} = 2AA_1 \cdot \sin A$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2BB_1 \cdot \sin B$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2CC_1 \cdot \sin C$$

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{2S_{ABC}}{R}$$

Задача 1. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC . Докажите, что треугольник ΔA_1B_1C подобен треугольнику ABC . Чему равен коэффициент подобия?



$$\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow k = \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

$$\Delta AA_1C \text{ – прямоугольный} \Rightarrow A_1C = AC \cdot \cos C$$

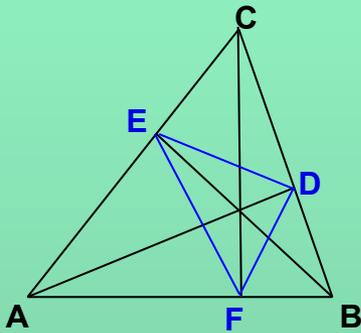
$$k = \frac{A_1C}{AC} = \frac{AC \cdot \cos C}{AC} = \cos C$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos C$$

$$A_1C_1 = AC \cdot \cos B$$

$$B_1C_1 = BC \cdot \cos A$$

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Докажите, что $pR = Pr$, где p – периметр треугольника EDF, P – периметр треугольника ABC.



$$\left. \begin{aligned} FE &= BC \cdot \cos A \\ FD &= AC \cdot \cos B \\ ED &= AB \cdot \cos C \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = BC \cdot \cos A + AC \cdot \cos B + AB \cdot \cos C$$

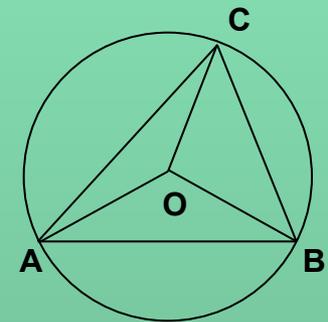
$$S_{BOC} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin BOC = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 2A = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot 2 \sin A \cdot \cos A$$

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} R \cdot BC \cdot \cos A$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} R \cdot AC \cdot \cos B$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R \cdot AB \cdot \cos C$$

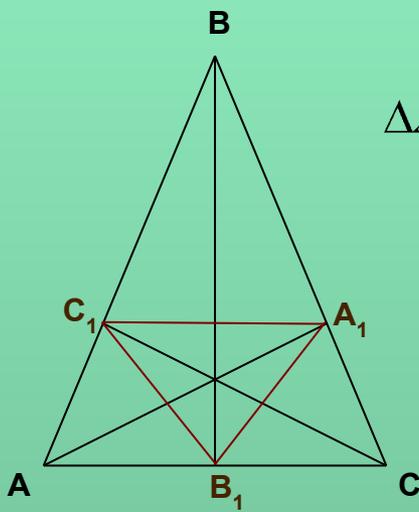


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R \cdot (BC \cdot \cos A + AC \cdot \cos B + AB \cdot \cos C) = \frac{1}{2} Rp$$

$$pR = 2S_{ABC} = Pr$$

Задача 5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 4$ и боковой стороной $AB = 8$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Найти периметр треугольника $A_1B_1C_1$ и длину высоты CC_1 .

$$\triangle ABC - \text{равнобедренный} \Rightarrow AB_1 = B_1C = 2; \angle ABB_1 = \angle B_1BC$$



$$\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C}{BC} \Rightarrow A_1B_1 = \frac{AB \cdot B_1C}{BC} = \frac{8 \cdot 2}{8} = 2 \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC} \Rightarrow A_1C = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\triangle AC_1B_1 = \triangle CA_1B_1 \Rightarrow B_1C_1 = 2$$

$$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{C_1A_1}{AC} = \frac{BA_1}{BC} \Rightarrow \frac{C_1A_1}{4} = \frac{7}{8} \Rightarrow C_1A_1 = \frac{7}{2}$$

$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 \Rightarrow CC_1 = \sqrt{AC^2 - AC_1^2} = \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$$