Расстояние между скрещивающимися прямыми

Автор Сизова Н. В.

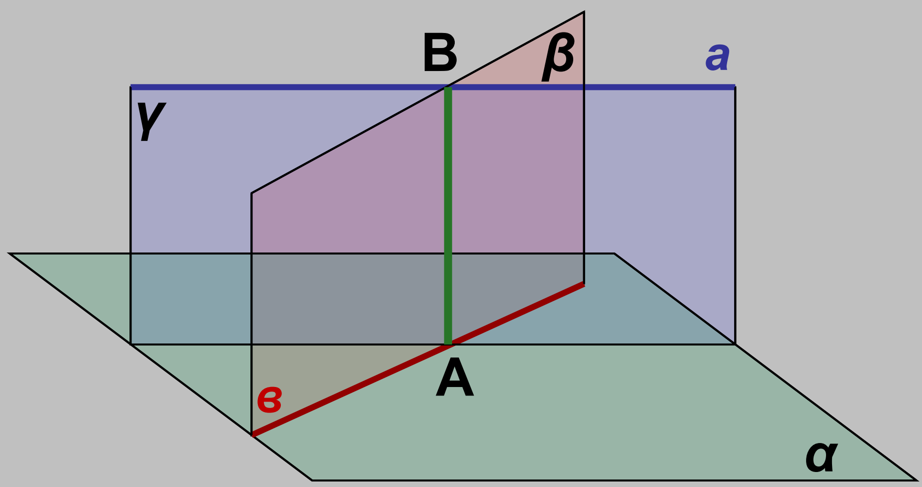
Определение

Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.

Теорема

К любым двум скрещивающимся прямым можно провести общий перпендикуляр и притом только один.

Доказательство:



$$1)\ \alpha \parallel a,\ b \subset \alpha$$

$$b \subset \beta,\ \beta \perp \alpha$$

$$a \subset \gamma,\ \gamma \perp \alpha$$

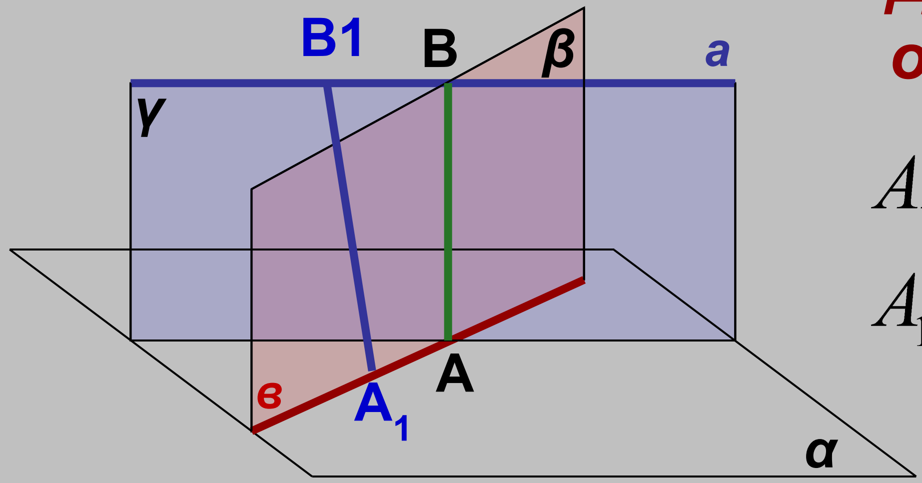
$$2)\ \left.\begin{array}{l} b \cap \gamma = A \\ a \cap \beta = B \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = AB$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} \beta \cap \gamma = AB, \\ \gamma \perp \alpha, \\ \beta \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp b$$

$$4)\ \left.\begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ AB \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp a$$

Значит AB – общий перпендикуляр

Доказательство единственности



Допустим, что A_1B_1 – другой общий перпендикуляр, тогда

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ A_1B_1 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB \parallel A_1B_1$$

Значит прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

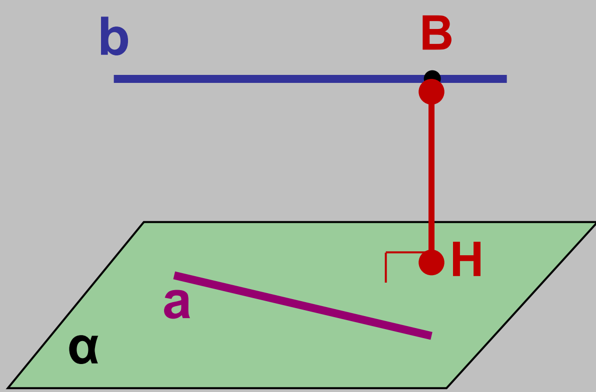
$$B \in a,\ B_1 \in a \Rightarrow BB_1 \equiv a$$

$$A \in b,\ A_1 \in b \Rightarrow AA_1 \equiv b$$

Значит прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит условию.

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

1 способ



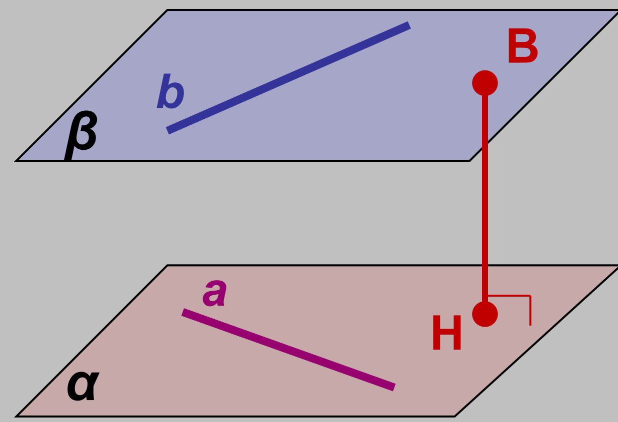
$$a \subset \alpha,\ \alpha \parallel b$$

$$B \in b,\ BH \perp \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(a,b) = \rho(b,\alpha) = BH$$

2 способ



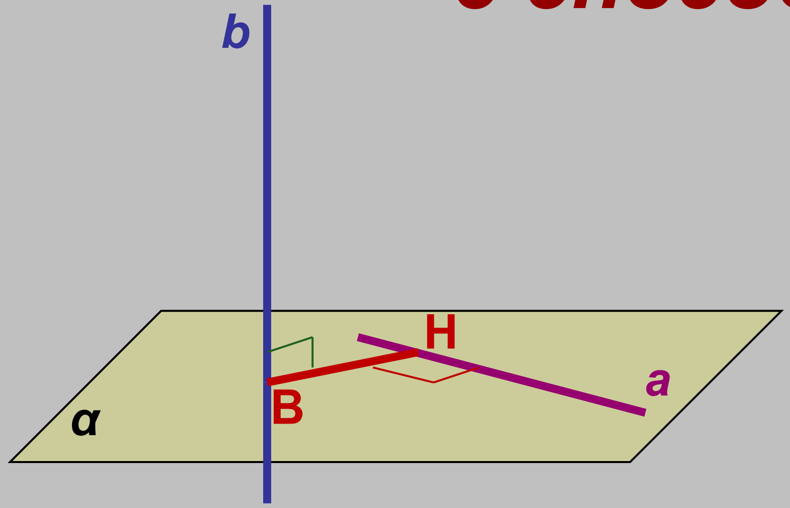
$$a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \parallel \beta$$

$$B \in \beta,\ BH \perp \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(a,b) = \rho(\alpha,\beta) = BH$$

3 способ



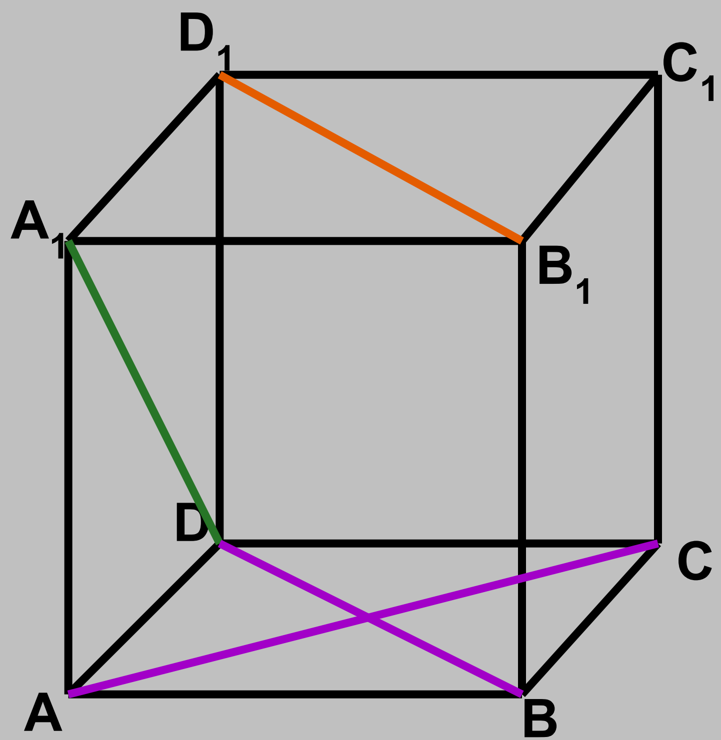
$$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$$

$$b \cap \alpha = B, BH \perp a,$$

тогда $\rho(a,b) = BH$

Решение задач

Найдите расстояние между прямыми:



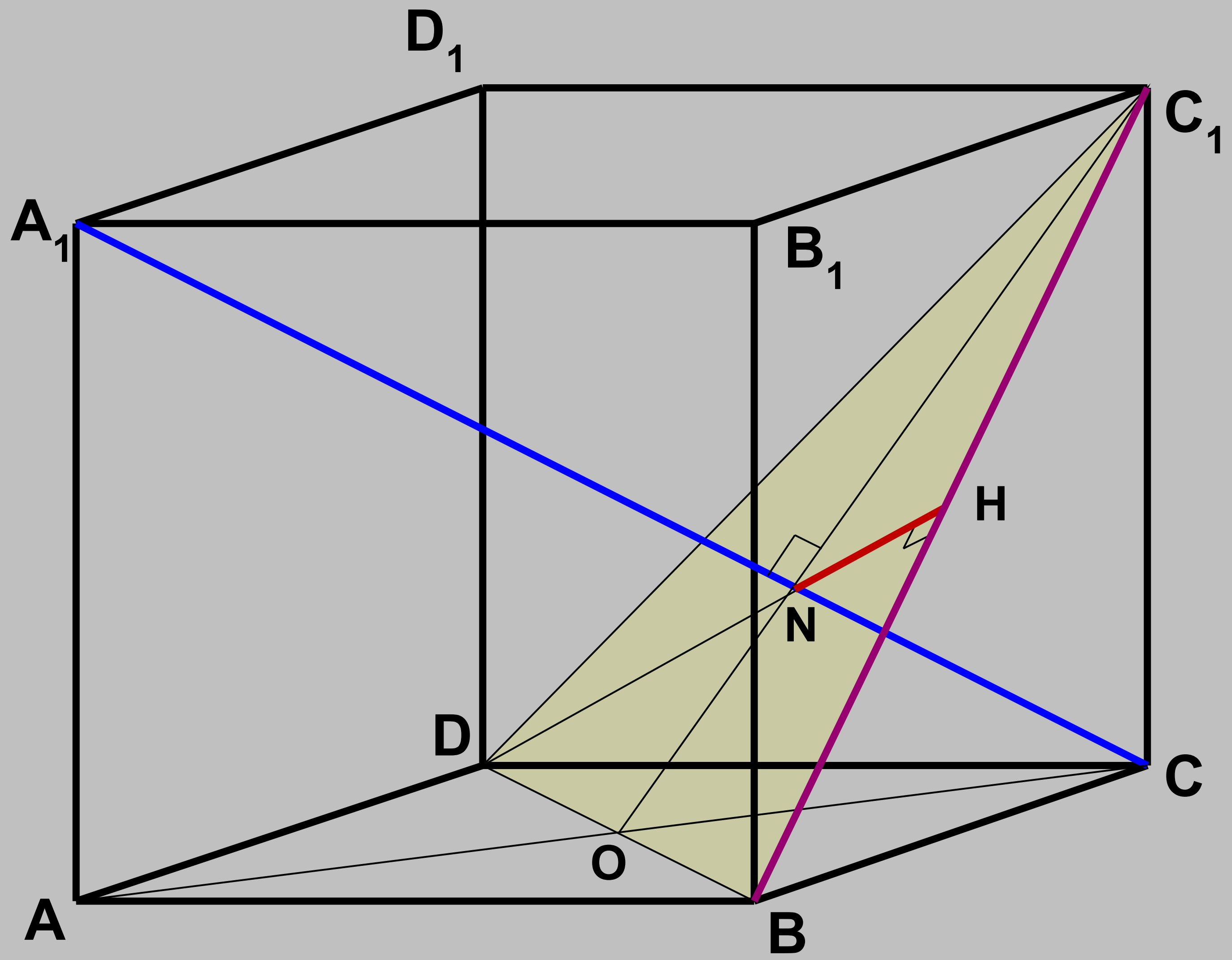
1) DD_1 и AB;

2) DA_1 и BC;

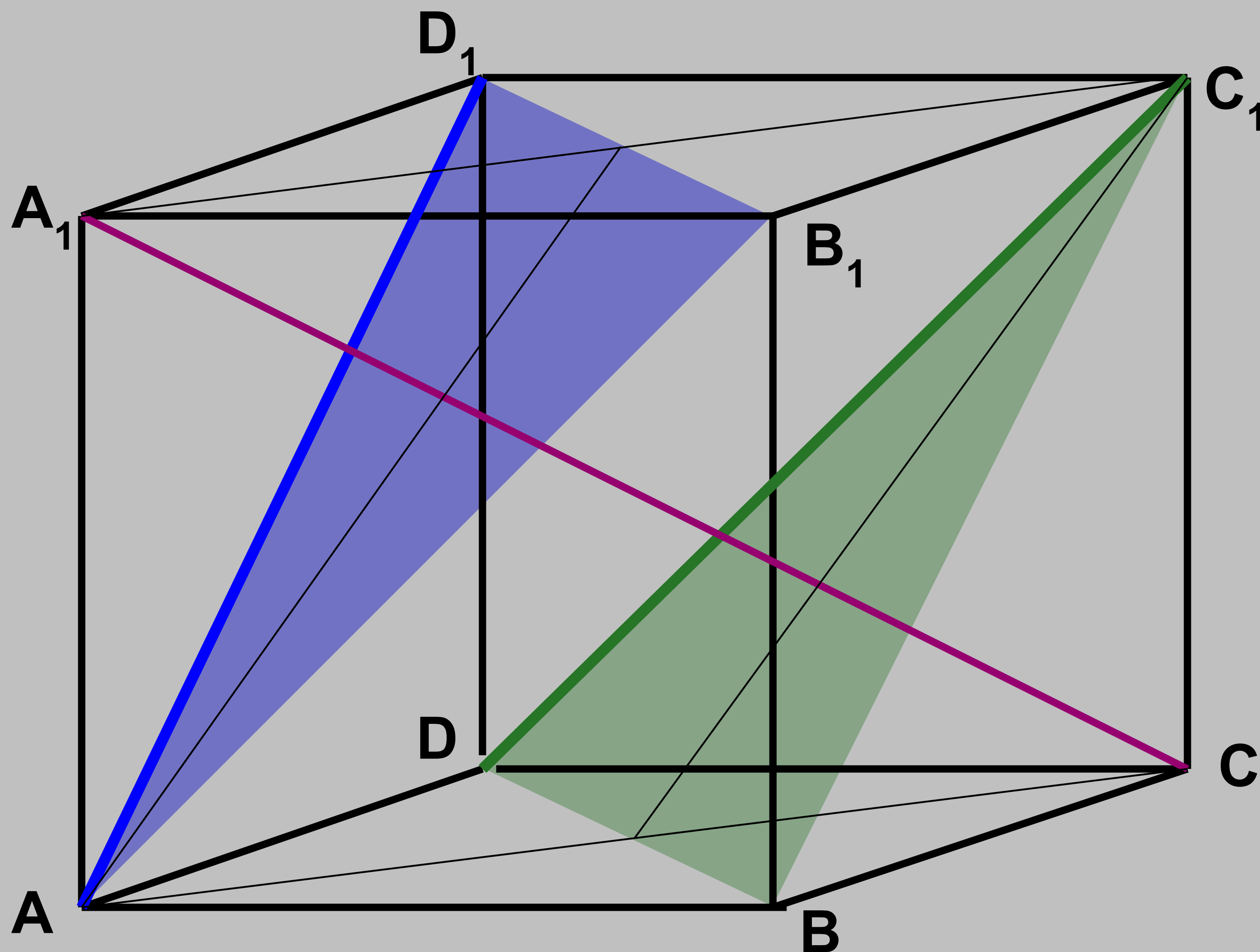
3) D_1B_1 и AC;

4) DB и C_1C;

Ребро куба равно а. Найдите расстояние между прямыми: 1) A_1C и BC_1.

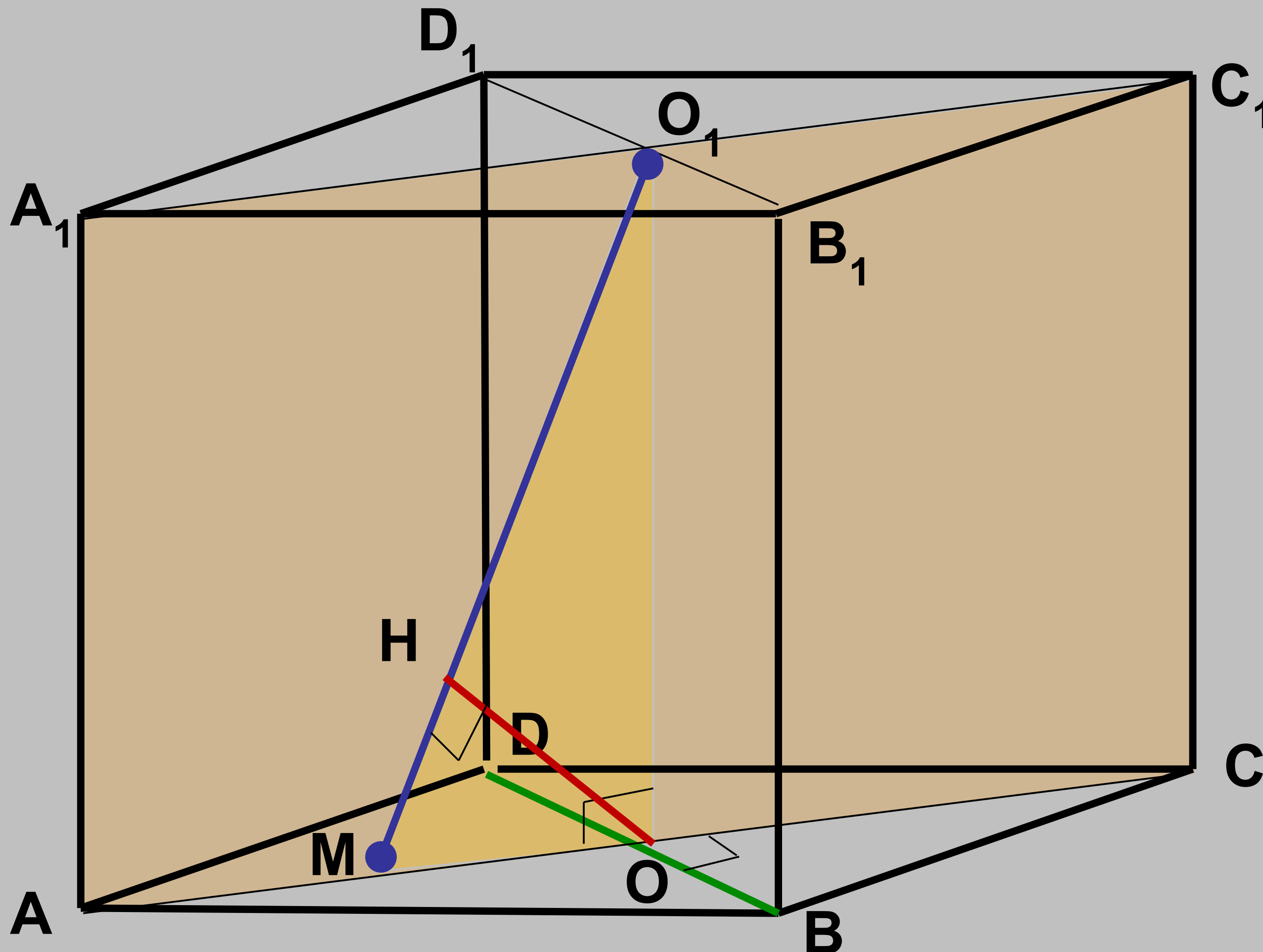


2) Найти $\rho\left(AD_1, DC_1\right)$



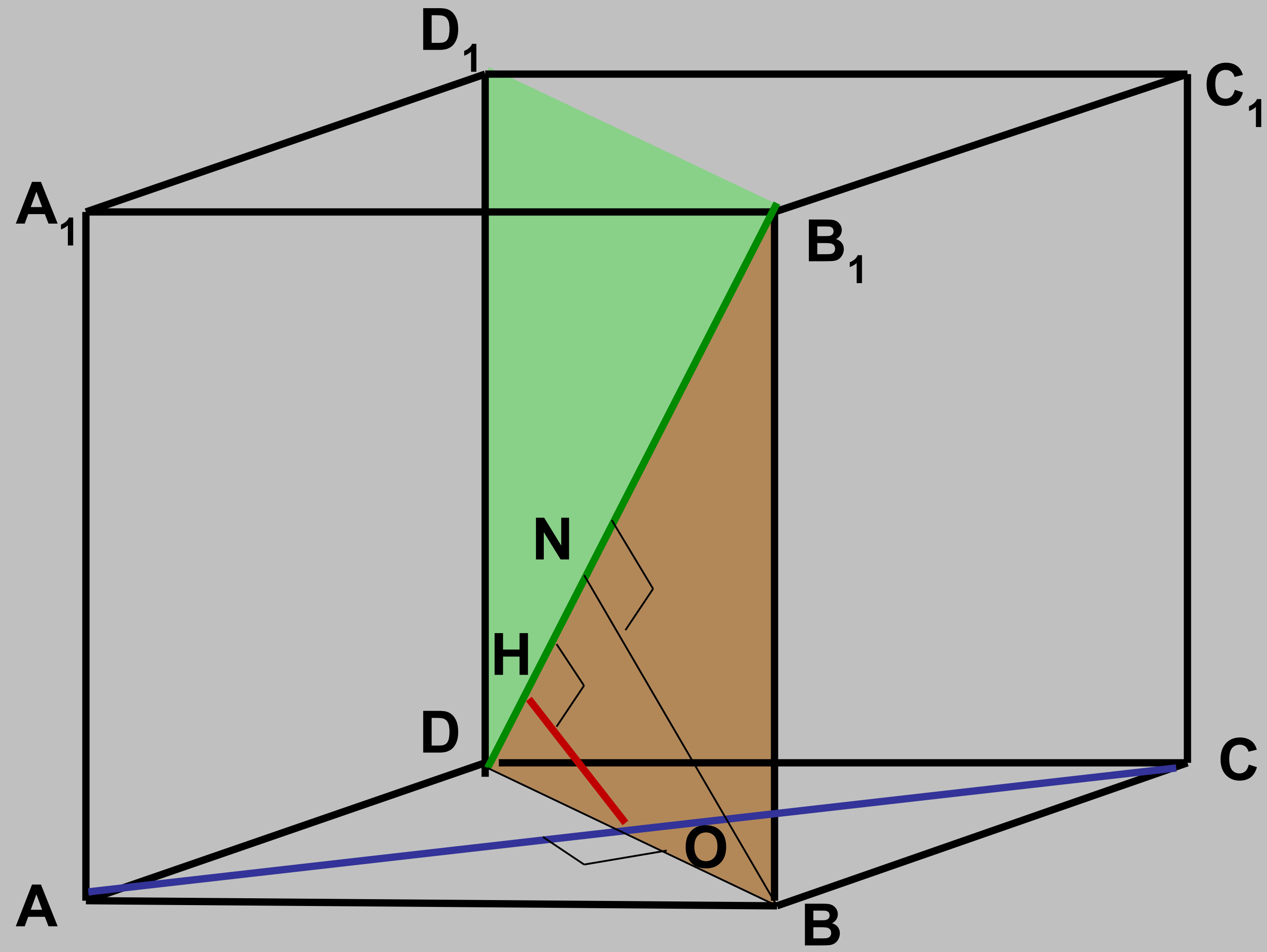
$$\rho\left(AD_1, DC_1\right) = \rho\left(AD_1B_1; DBC_1\right) = \frac{1}{3}A_1C$$

3) M – середина AO, найти $\rho\left(BD, O_1M\right)$



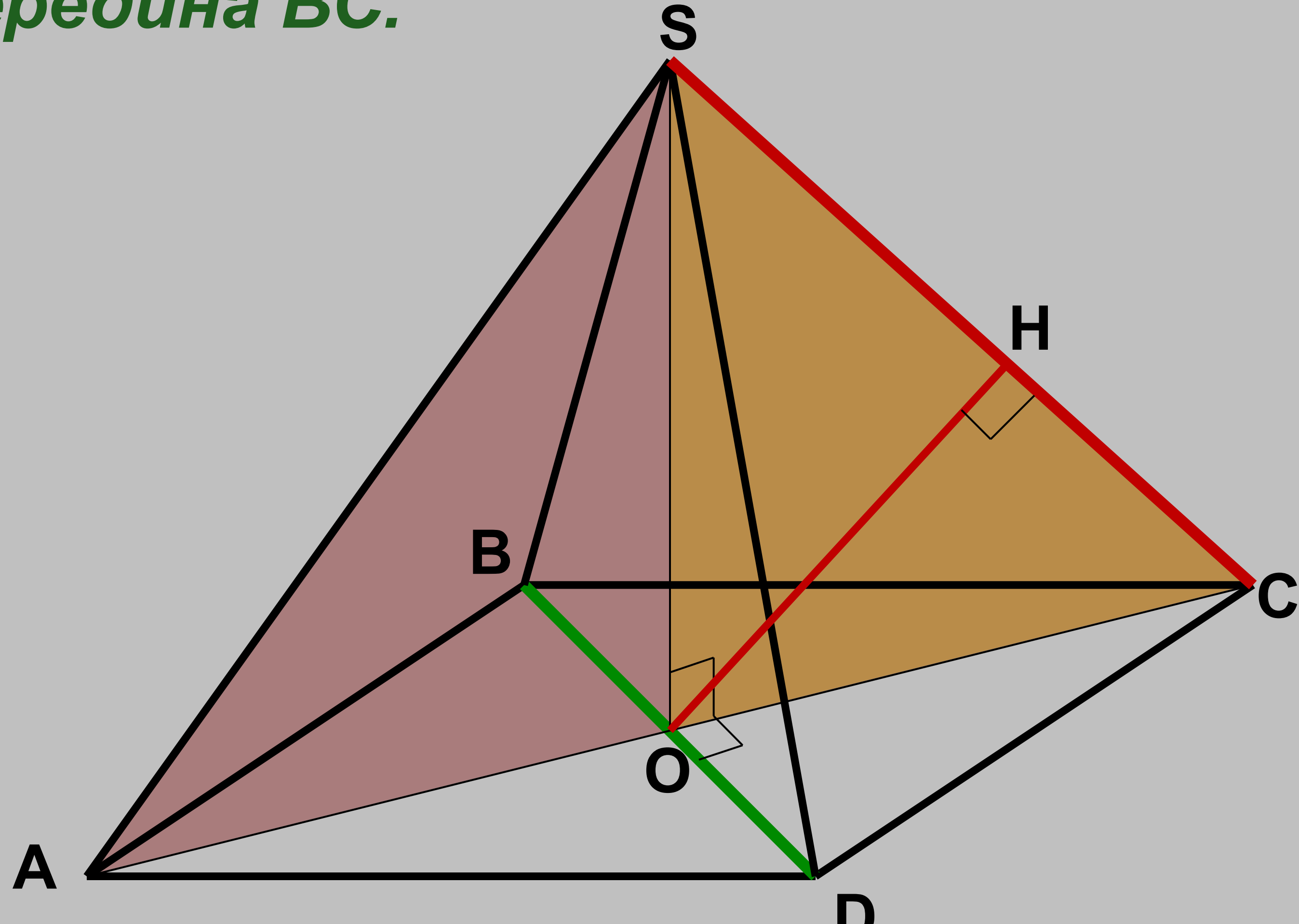
$$\rho\left(BD, O_1M\right) = OH \qquad OH = \frac{a}{3}$$

4) Найти $\rho\left(B_1D, AC\right)$



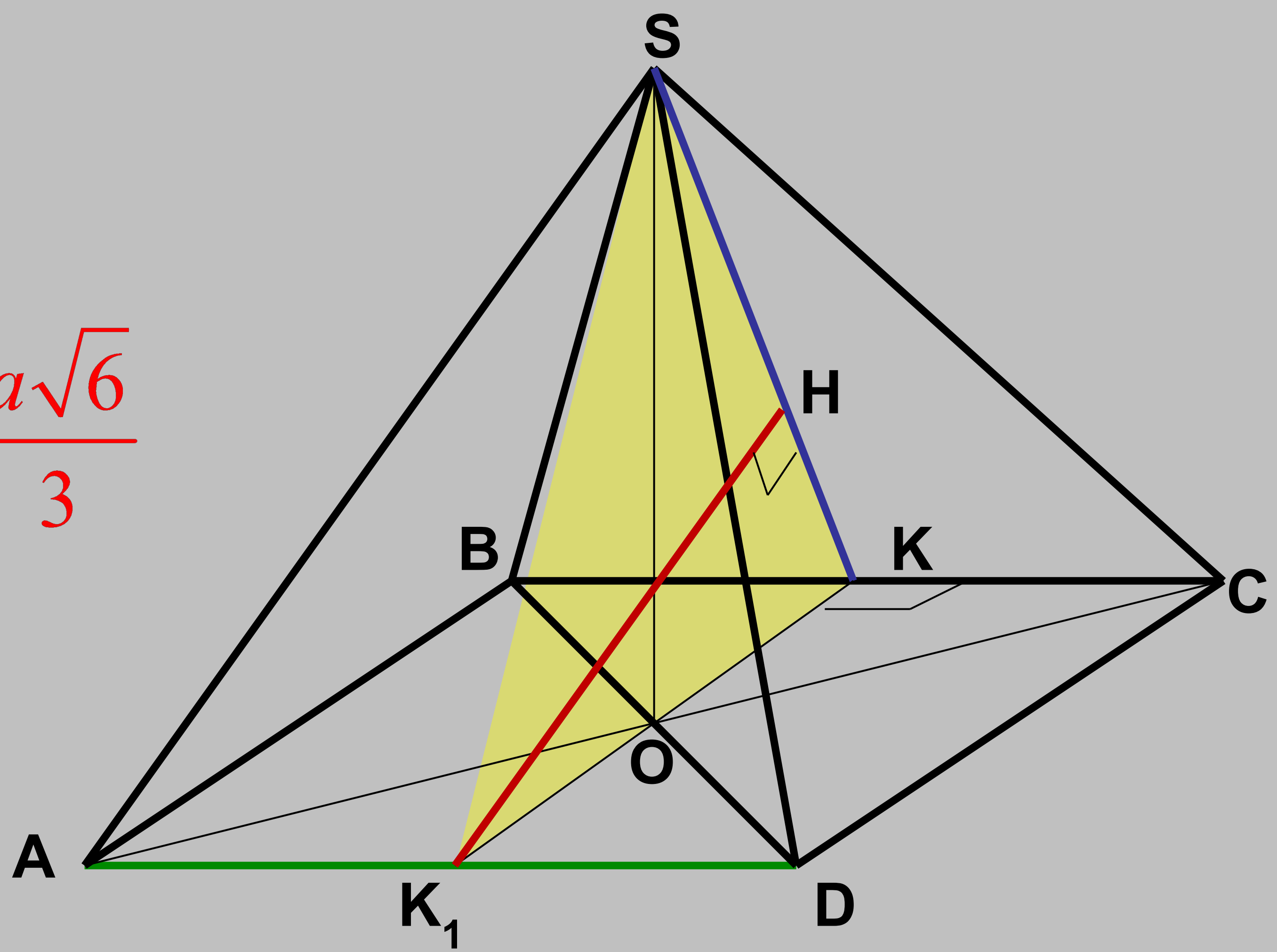
$$OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

4) Дана правильная пирамида, все рёбра которой равны а. Найти $\rho\left(BD,SC\right), \rho\left(AD,SK\right)$, если К – середина ВС.



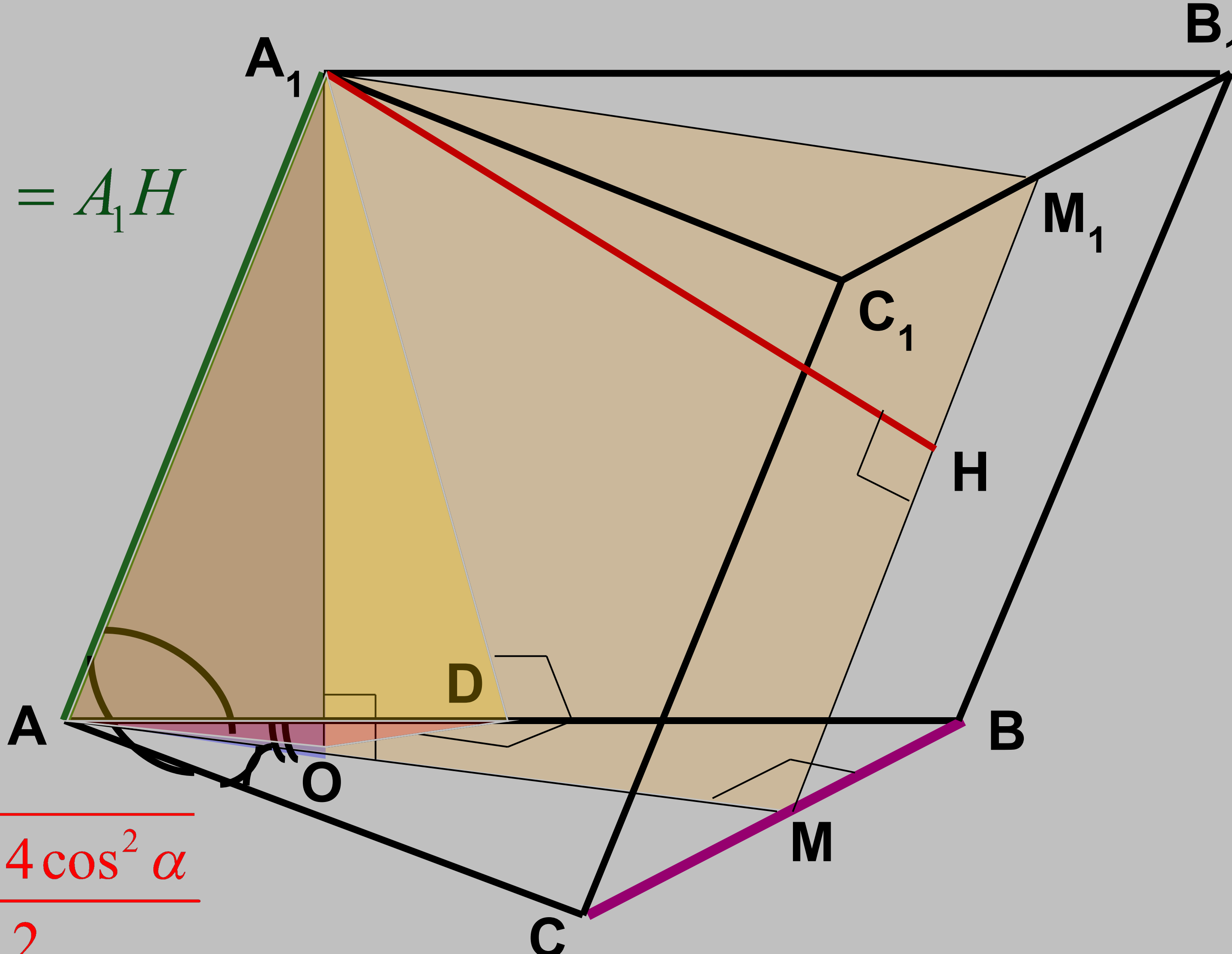
$$OH = \frac{a}{2}$$

$$K_1H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



В наклонной призме все рёбра равны а, □A_1AC = □A_1AB. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и ВС.

$$\rho\left(AA_1, BC\right) = A_1H$$



$$A_1H = \frac{a\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}{2}$$