

# Расстояние между скрещивающимися прямыми

Автор Сизова Н. В.

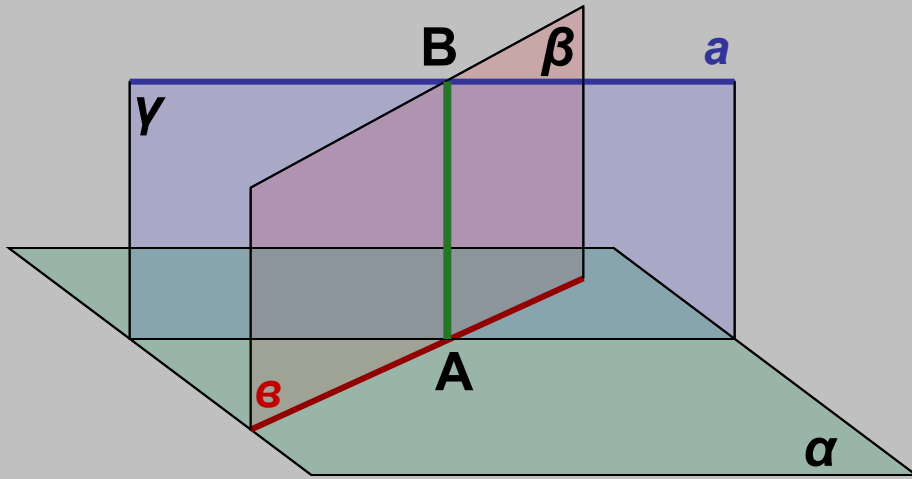
# Определение

*Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.*

# Теорема

*К любым двум скрещивающимся прямым можно провести общий перпендикуляр и притом только один.*

## Доказательство:



$$1) \alpha \boxtimes a, b \subset \alpha$$

$$b \subset \beta, \beta \perp \alpha$$

$$a \subset \gamma, \gamma \perp \alpha$$

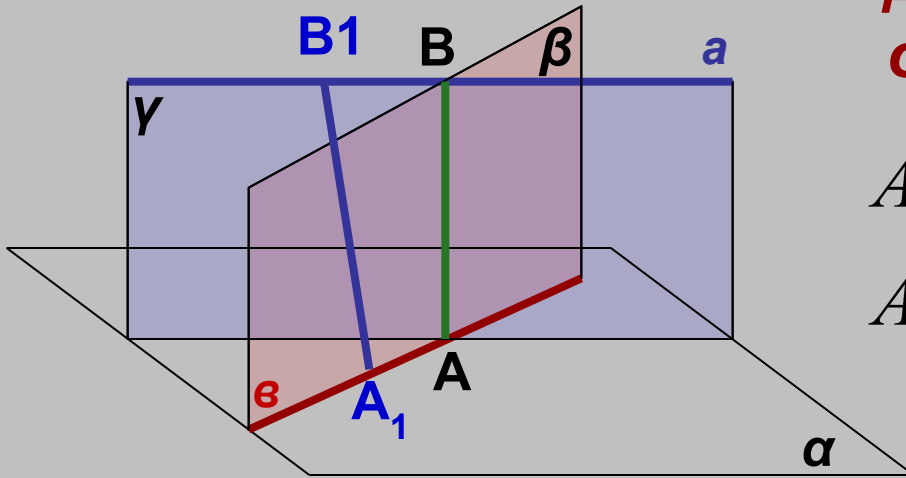
$$2) \left. \begin{array}{l} b \cap \gamma = A \\ a \cap \beta = B \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = AB$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \beta \cap \gamma = AB, \\ \gamma \perp \alpha, \\ \beta \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp b$$

$$4) \left. \begin{array}{l} a \boxtimes \alpha \\ AB \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp a$$

**Значит  $AB$  – общий перпендикуляр**

# Доказательство единственности



*Допустим, что  $A_1B_1$  – другой общий перпендикуляр, тогда*

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ A_1B_1 \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \boxtimes A_1B_1$$

*Значит прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  лежат в одной плоскости.*

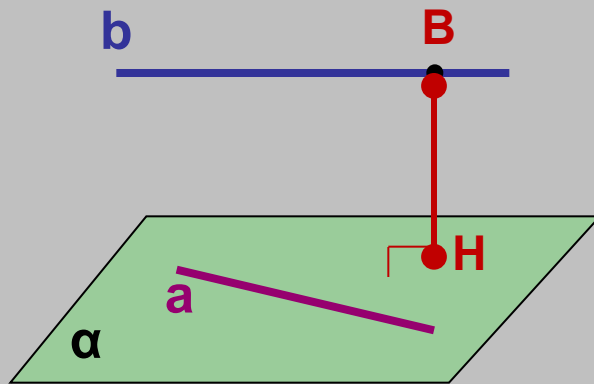
$$B \in a, B_1 \in a \Rightarrow BB_1 \equiv a$$

$$A \in b, A_1 \in b \Rightarrow AA_1 \equiv b$$

*Значит прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости, что противоречит условию.*

# Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

## 1 способ

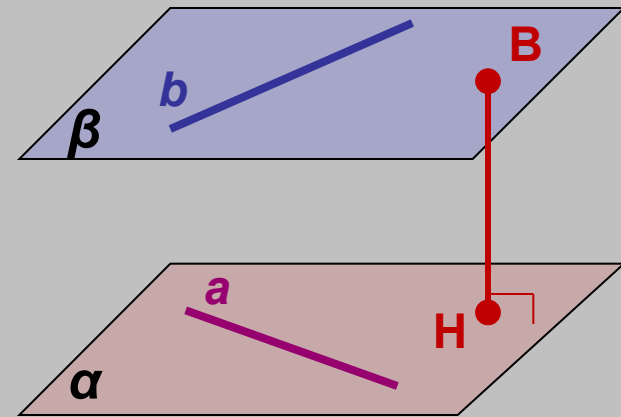


$$a \subset \alpha, \alpha \not\parallel b$$

$$B \in b, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(b, \alpha) = BH$$

## 2 способ

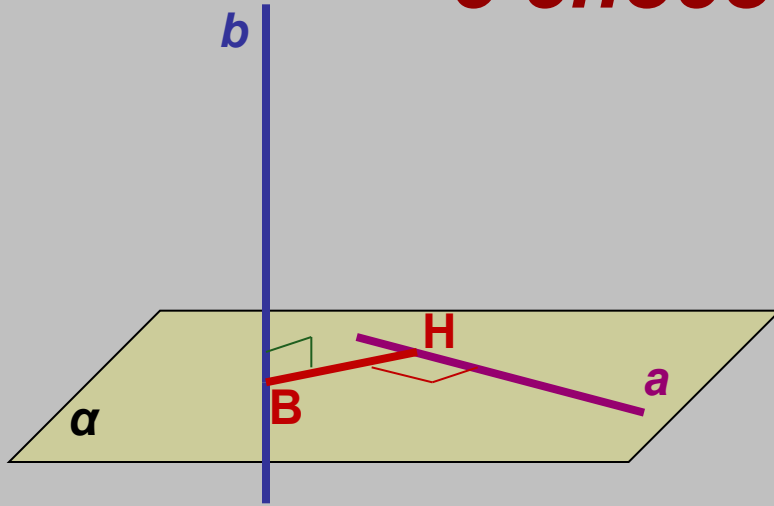


$$a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \not\parallel \beta$$

$$B \in \beta, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta) = BH$$

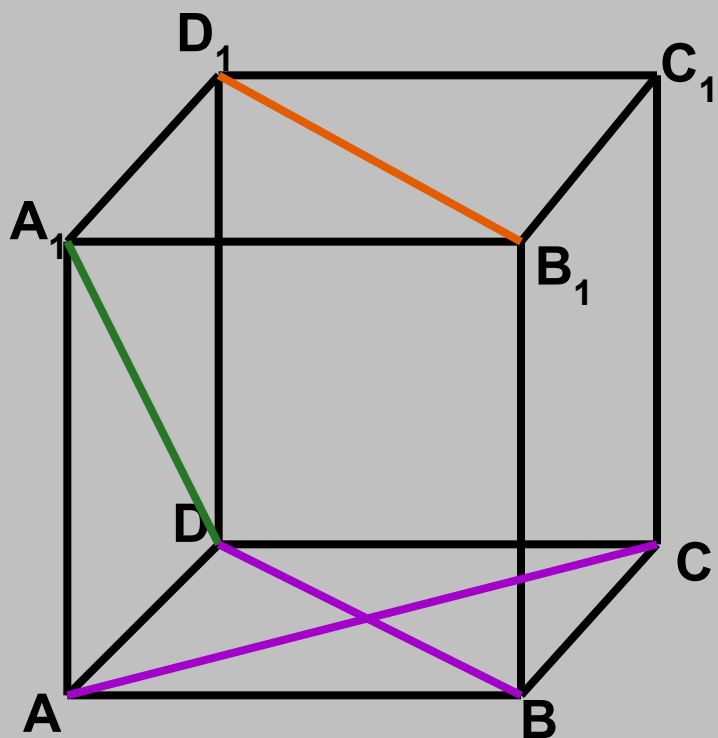
## 3 способ



$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$   
 $b \cap \alpha = B, BH \perp a,$   
тогда  $\rho(a, b) = BH$

# Решение задач

Найдите расстояние между прямыми:



1)  $DD_1$  и  $AB$ ;

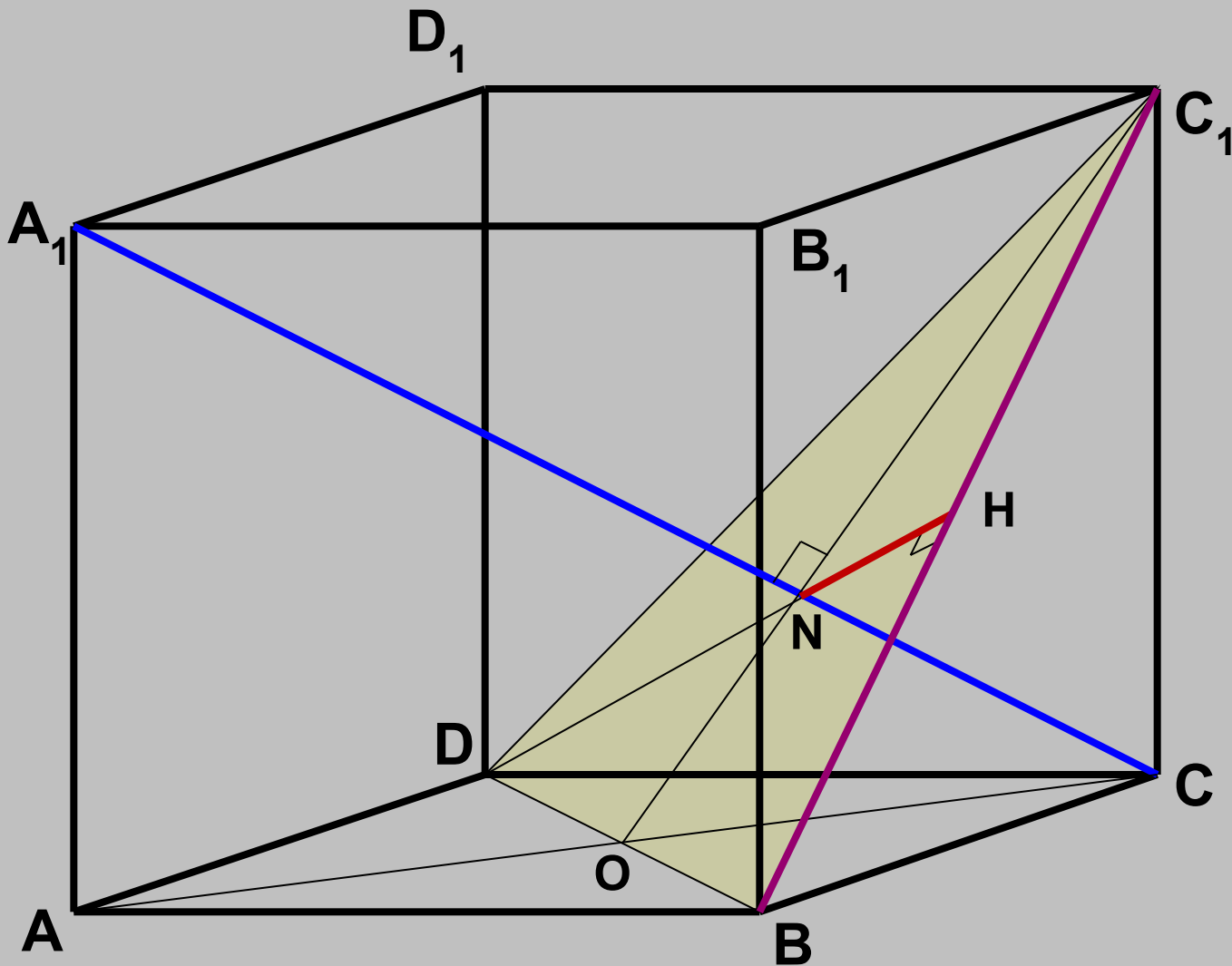
2)  $DA_1$  и  $BC$ ;

3)  $D_1B_1$  и  $AC$ ;

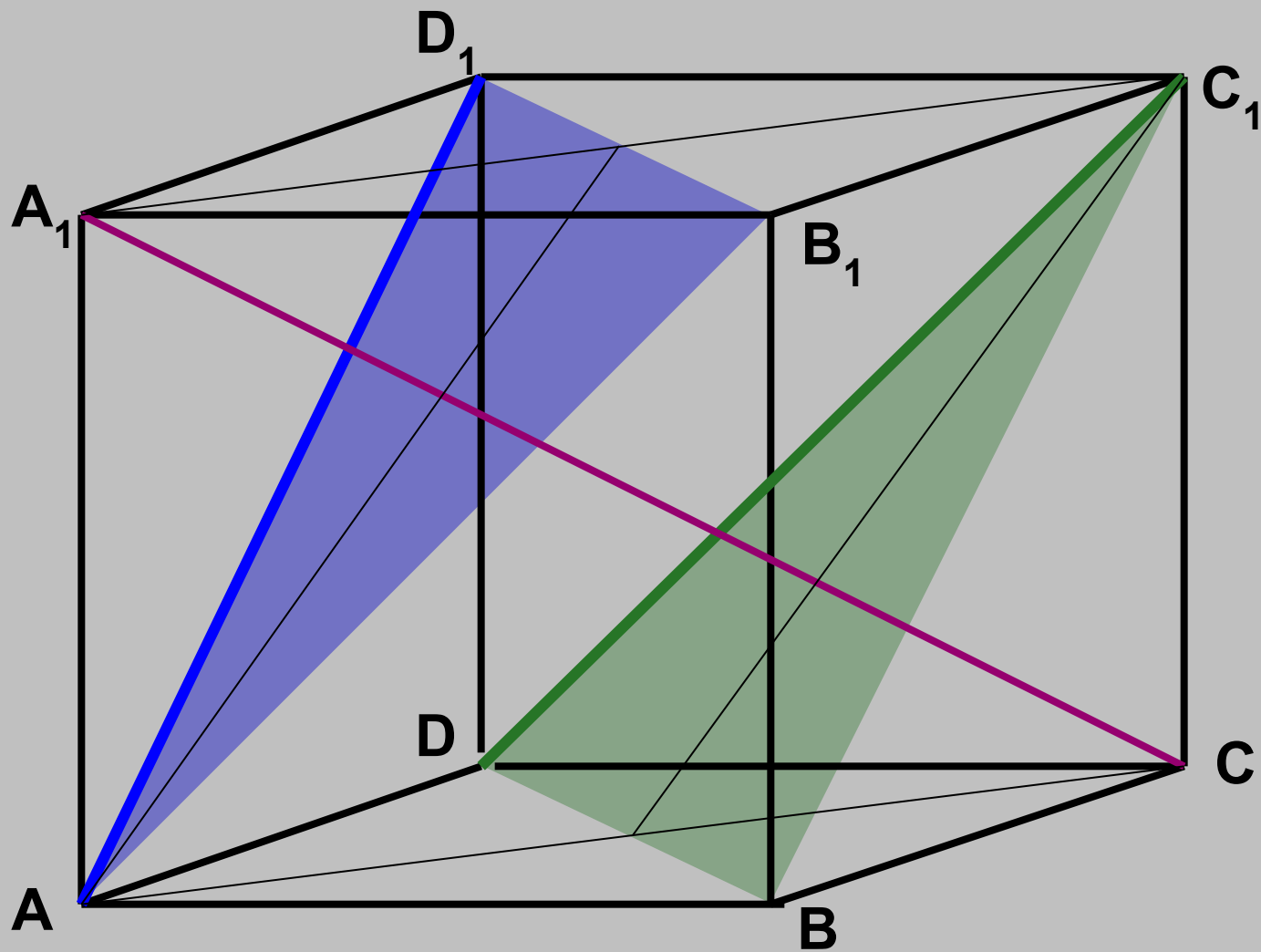
4)  $DB$  и  $C_1C$ ;



Ребро куба равно  $a$ . Найдите расстояние между прямыми: 1)  $A_1C$  и  $BC_1$ .

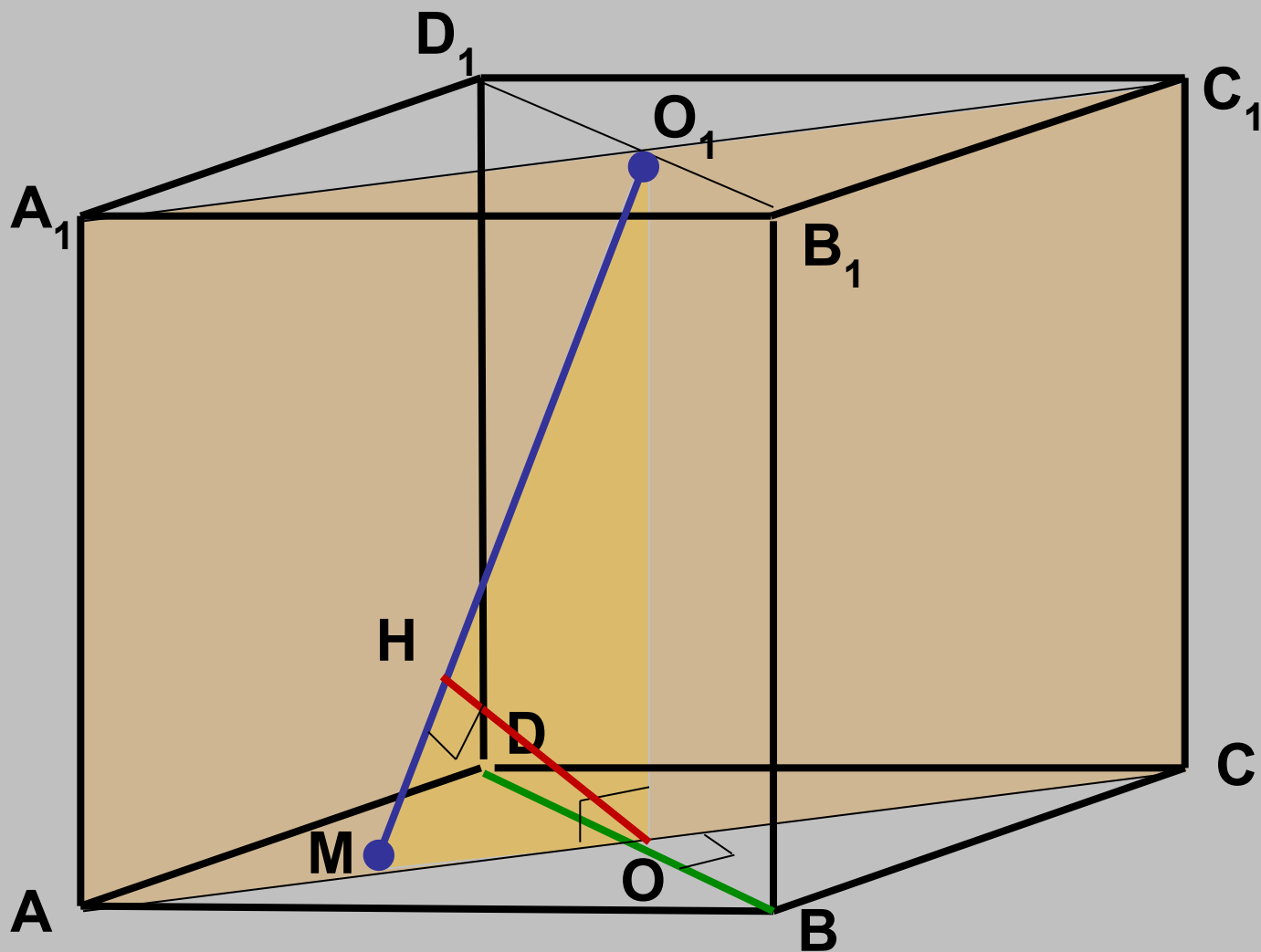


2) Найдите  $\rho(AD_1, DC_1)$



$$\rho(AD_1, DC_1) = \rho(AD_1B_1; DBC_1) = \frac{1}{3} A_1C$$

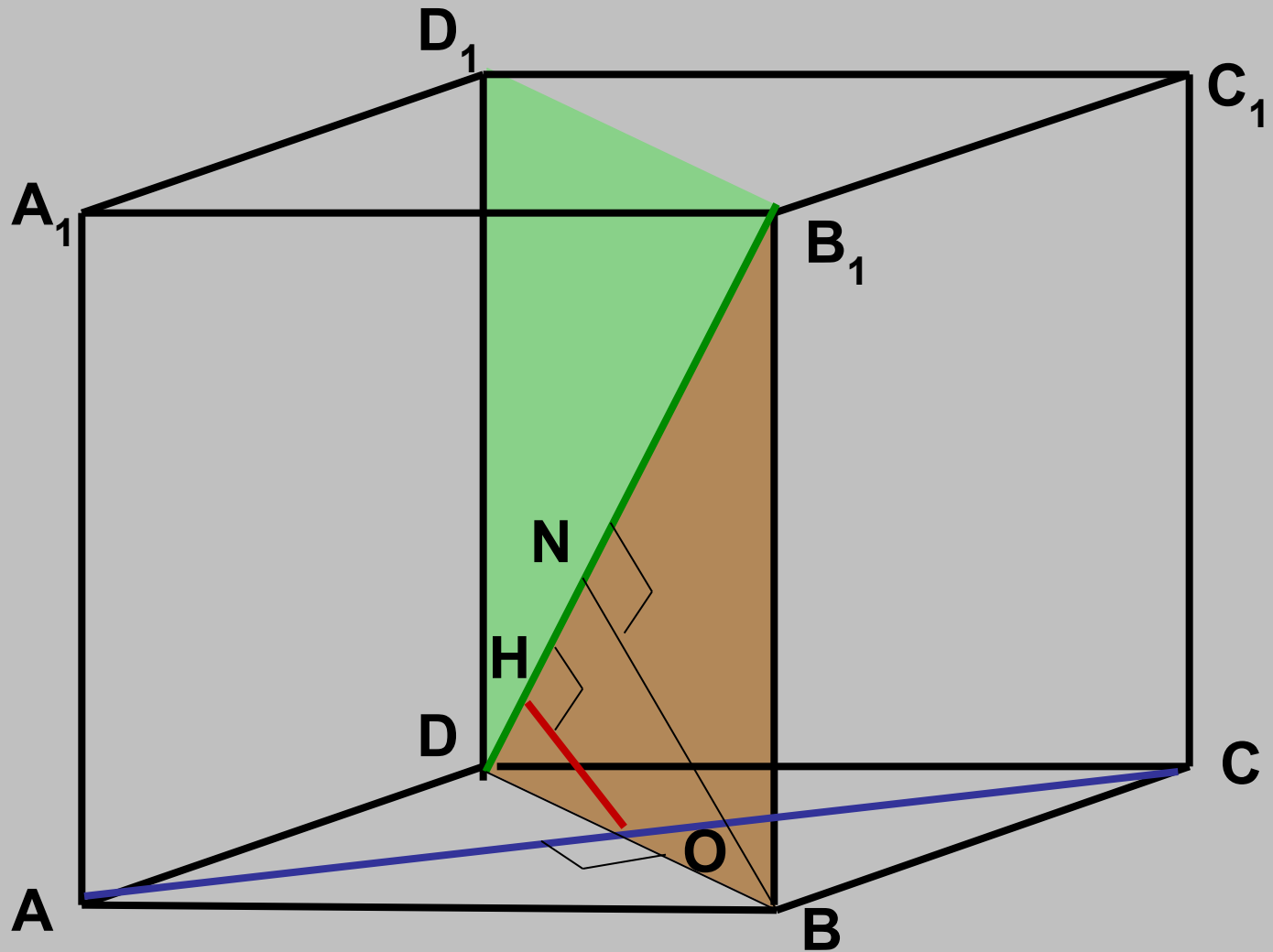
3)  $M$  – середина  $AO$ , найти  $\rho(BD, O_1M)$



$$\rho(BD, O_1M) = OH$$

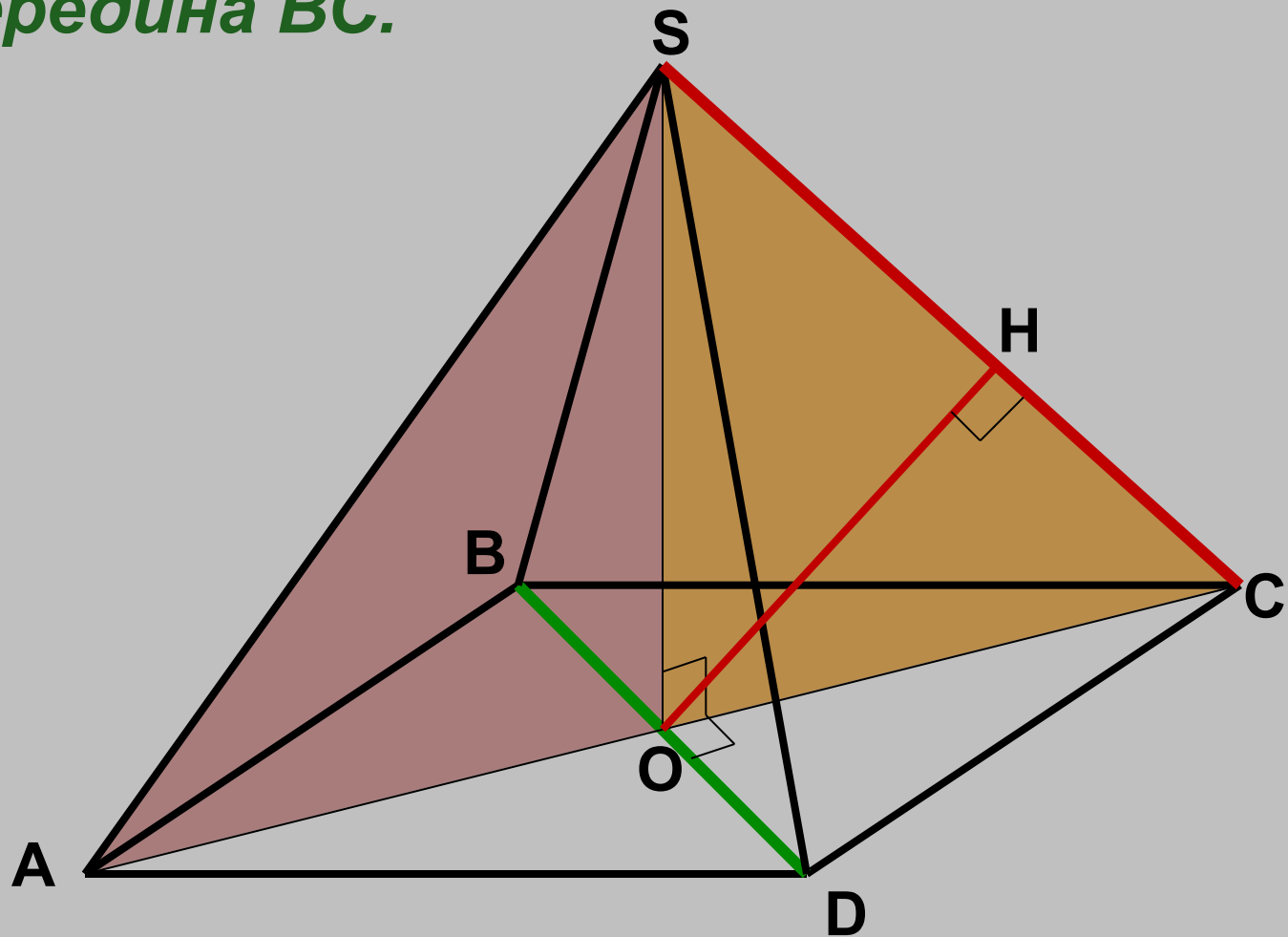
$$OH = \frac{a}{3}$$

4) Найдите  $\rho(B_1D, AC)$



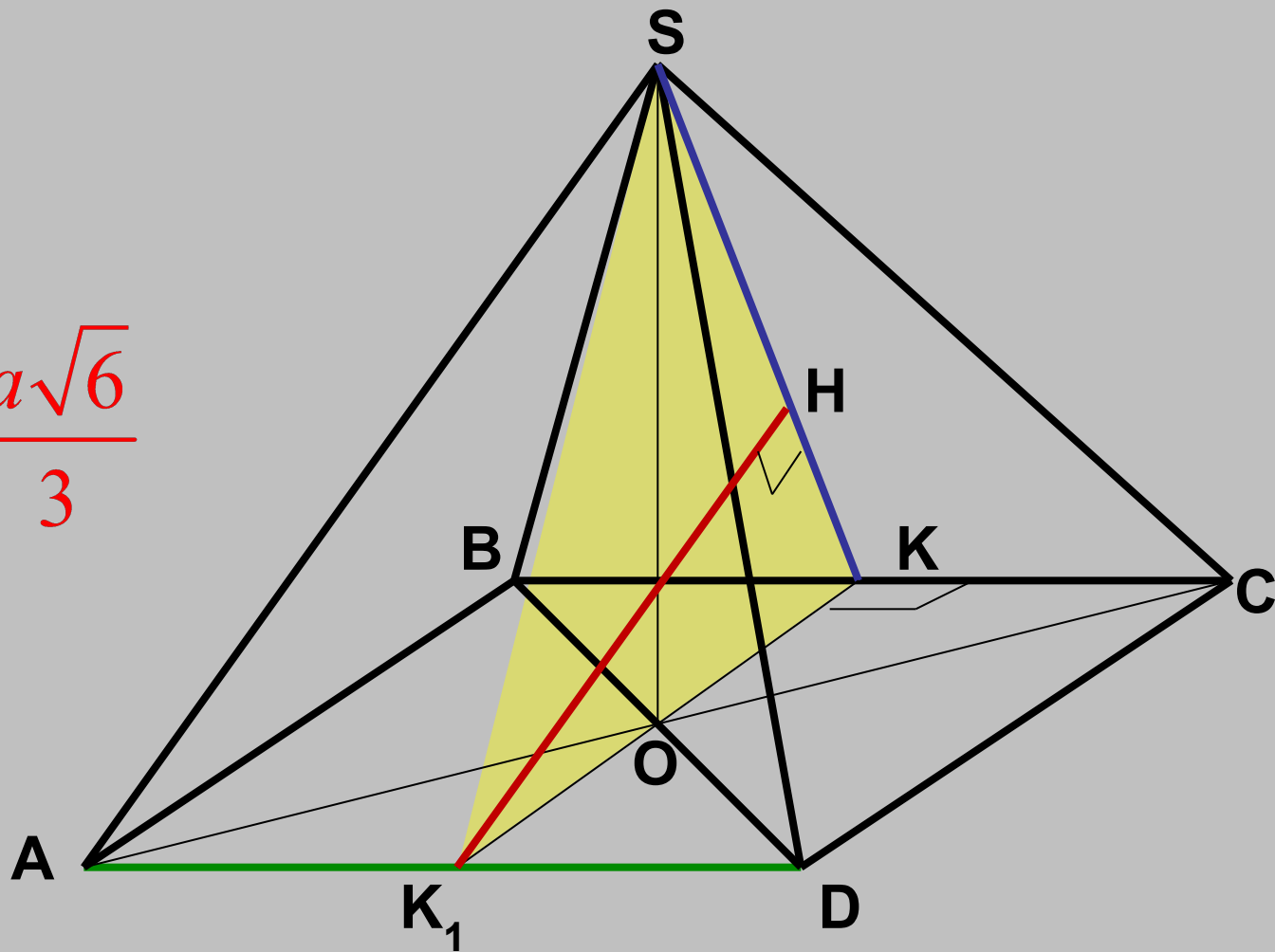
$$OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

4) Дана правильная пирамида, все рёбра которой равны  $a$ . Найти  $\rho(BD, SC)$ ,  $\rho(AD, SK)$ , если  $K$  – середина  $BC$ .



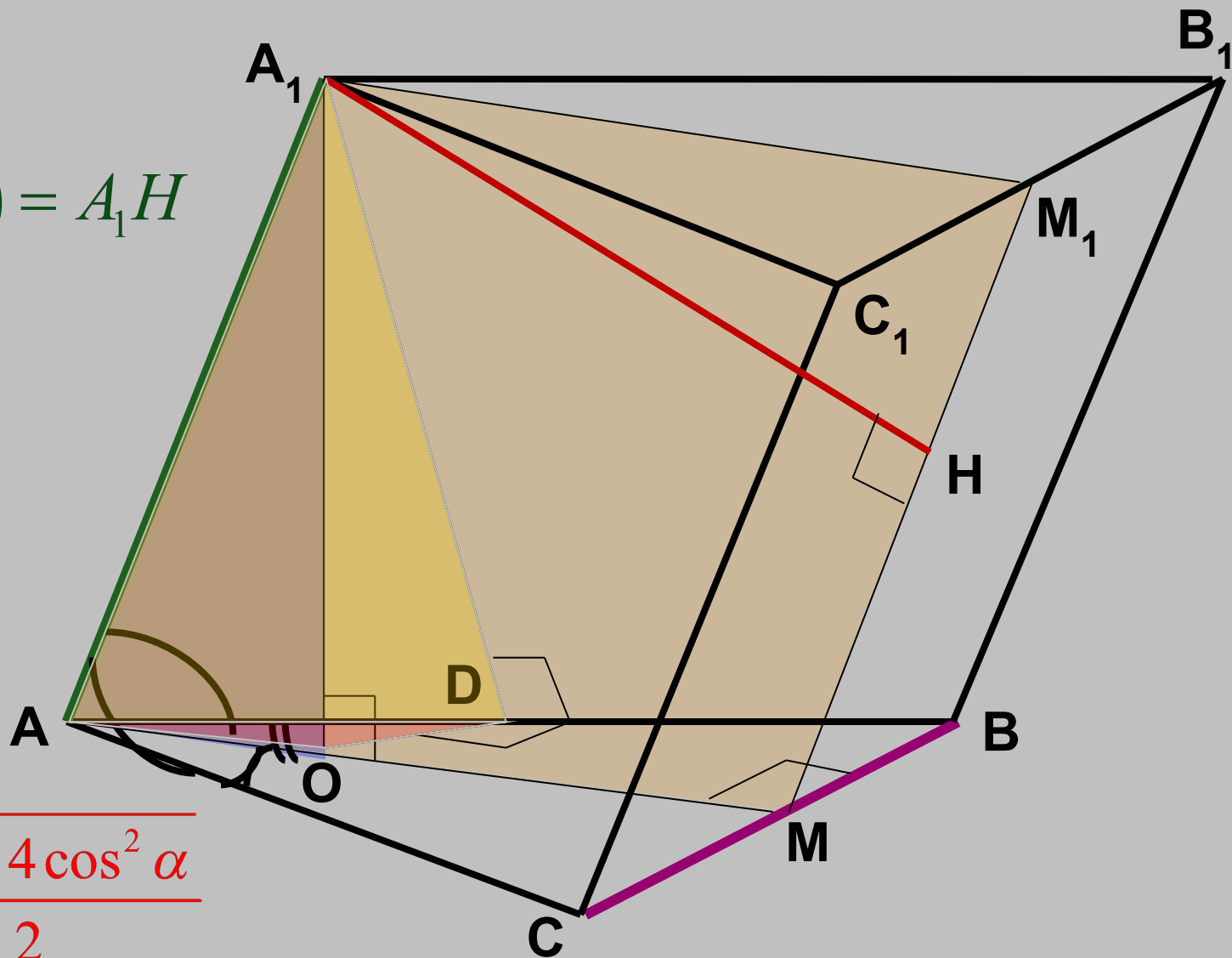
$$OH = \frac{a}{2}$$

$$K_1H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



В наклонной призме все рёбра равны  $a$ ,  $\square A_1AC = \square A_1AB$ . Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .

$$\rho(AA_1, BC) = A_1H$$



$$A_1H = \frac{a\sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}}{2}$$