

**Расстояние между
скрещивающимися
прямыми**

Автор Сизова Н. В.

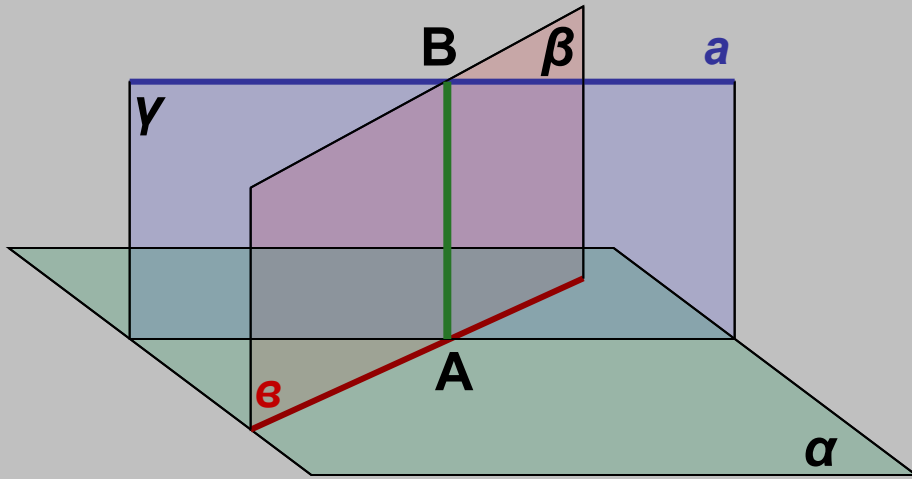
Определение

Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.

Теорема

К любым двум скрещивающимся прямым можно провести общий перпендикуляр и притом только один.

Доказательство:



$$1) \alpha \boxtimes a, b \subset \alpha$$

$$b \subset \beta, \beta \perp \alpha$$

$$a \subset \gamma, \gamma \perp \alpha$$

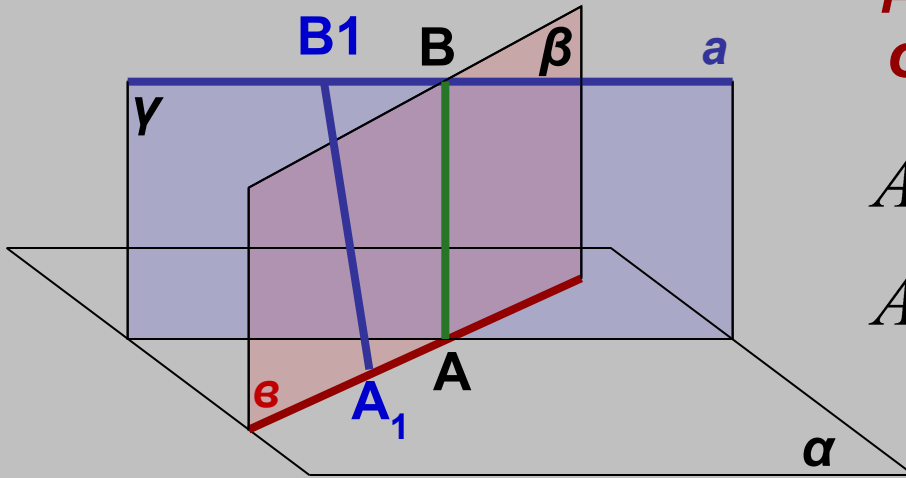
$$2) \left. \begin{array}{l} b \cap \gamma = A \\ a \cap \beta = B \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = AB$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \beta \cap \gamma = AB, \\ \gamma \perp \alpha, \\ \beta \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp b$$

$$4) \left. \begin{array}{l} a \boxtimes \alpha \\ AB \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp a$$

Значит AB – общий перпендикуляр

Доказательство единственности



Допустим, что A_1B_1 – другой общий перпендикуляр, тогда

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ A_1B_1 \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$$

Значит прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

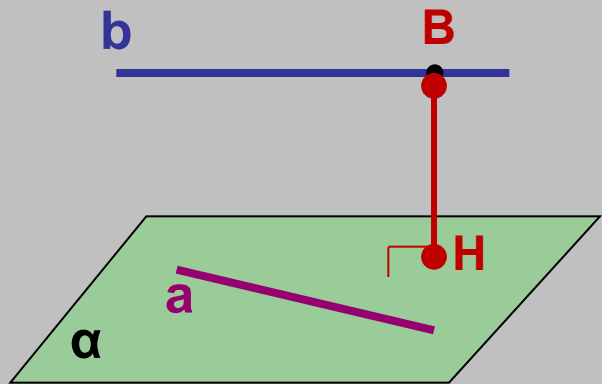
$$B \in a, B_1 \in a \Rightarrow BB_1 \equiv a$$

$$A \in b, A_1 \in b \Rightarrow AA_1 \equiv b$$

Значит прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит условию.

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

1 способ

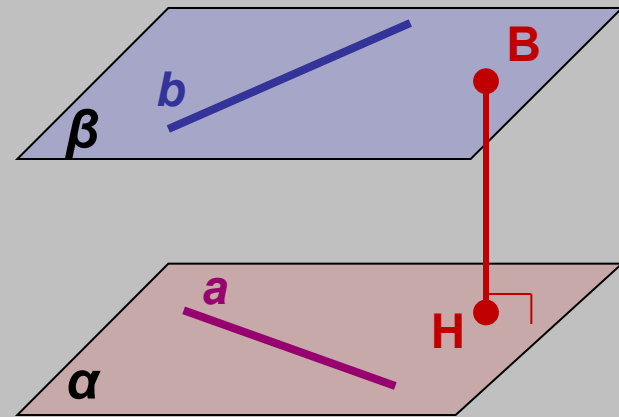


$$a \subset \alpha, \alpha \not\parallel b$$

$$B \in b, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(b, \alpha) = BH$$

2 способ

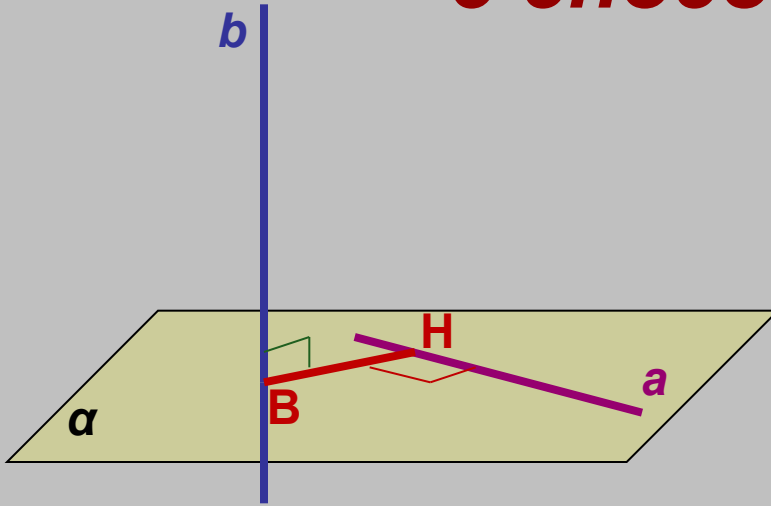


$$a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \not\parallel \beta$$

$$B \in \beta, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta) = BH$$

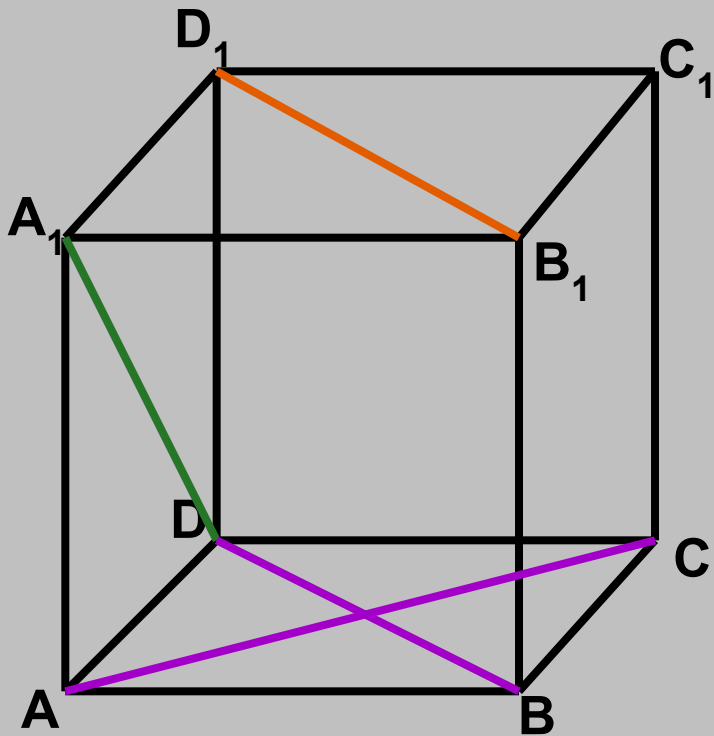
3 способ



$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$
 $b \cap \alpha = B, BH \perp a,$
тогда $\rho(a, b) = BH$

Решение задач

Найдите расстояние между прямыми:



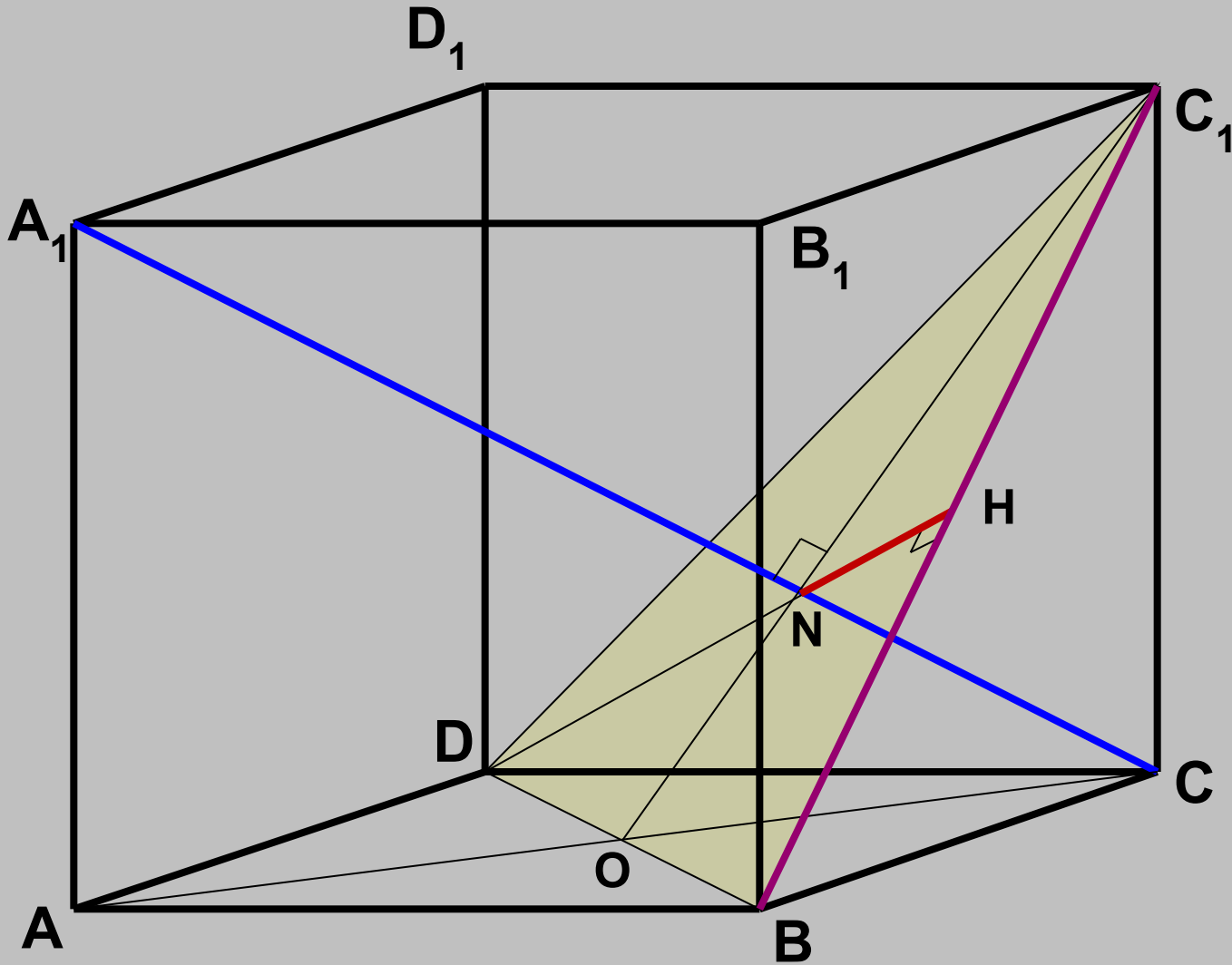
1) DD_1 и AB ;

2) DA_1 и BC ;

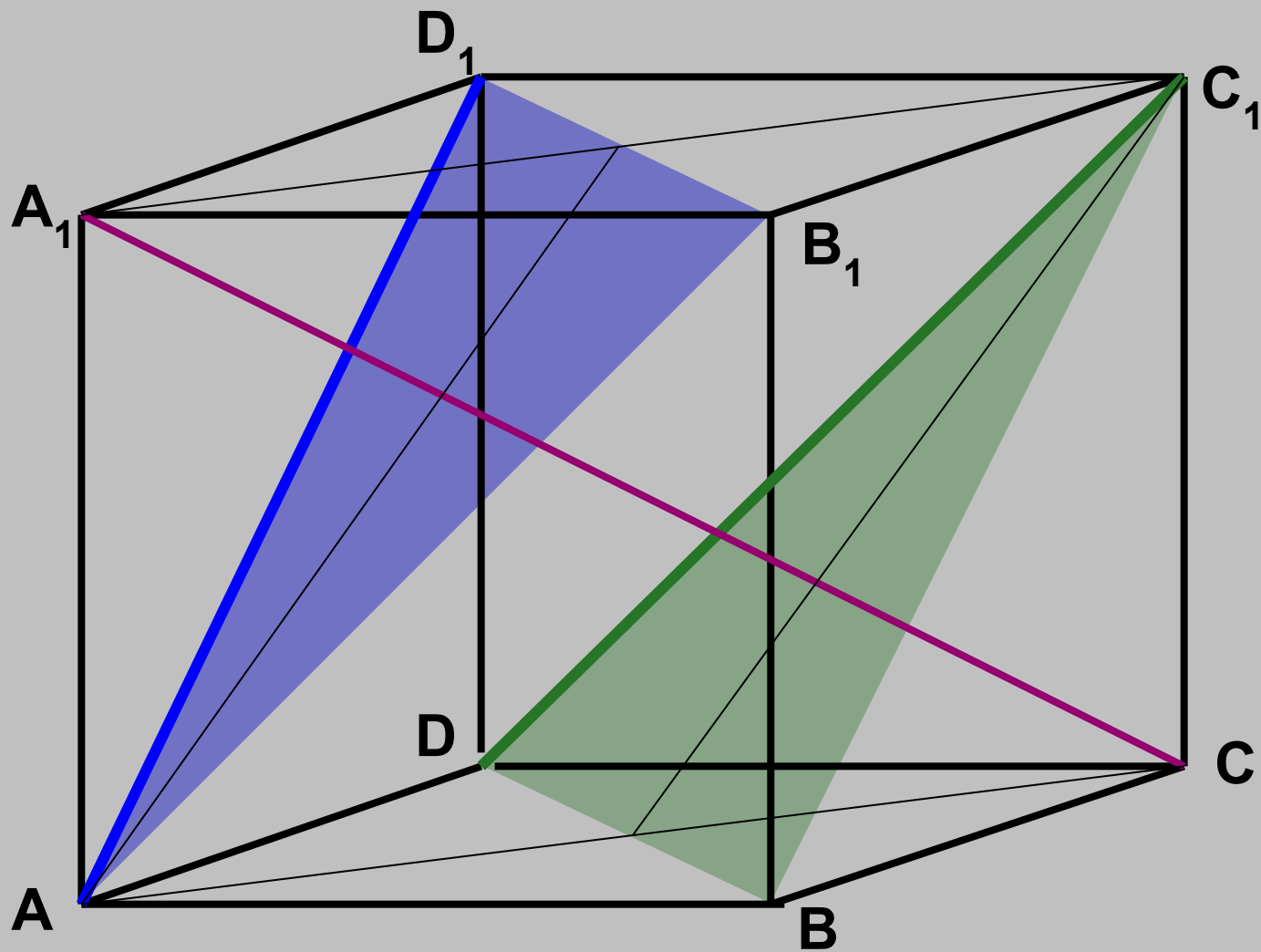
3) D_1B_1 и AC ;

4) DB и C_1C ;

Ребро куба равно a . Найдите расстояние между прямыми: 1) A_1C и BC_1 .

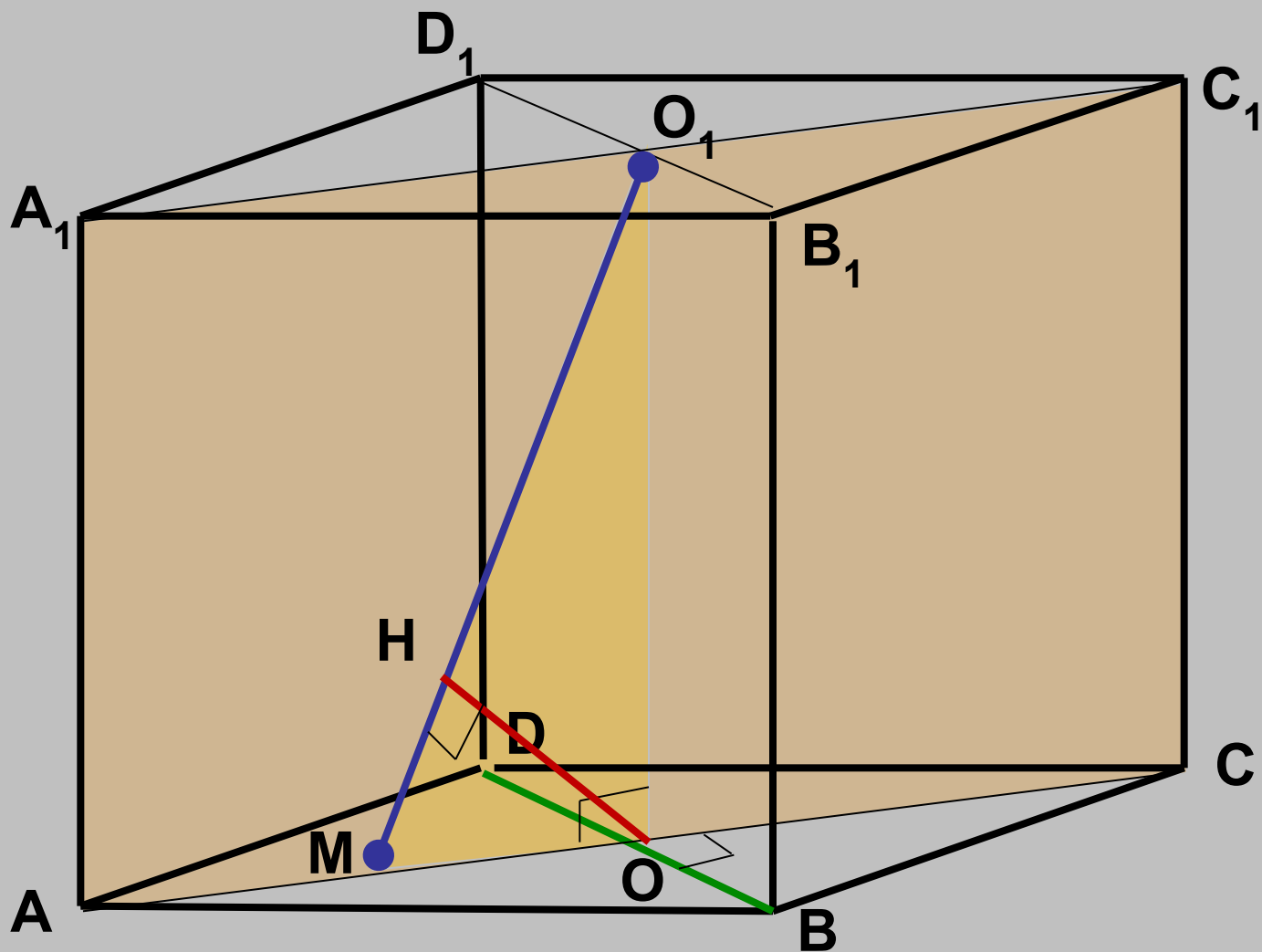


2) Найдите $\rho(AD_1, DC_1)$



$$\rho(AD_1, DC_1) = \rho(AD_1B_1; DBC_1) = \frac{1}{3} A_1C$$

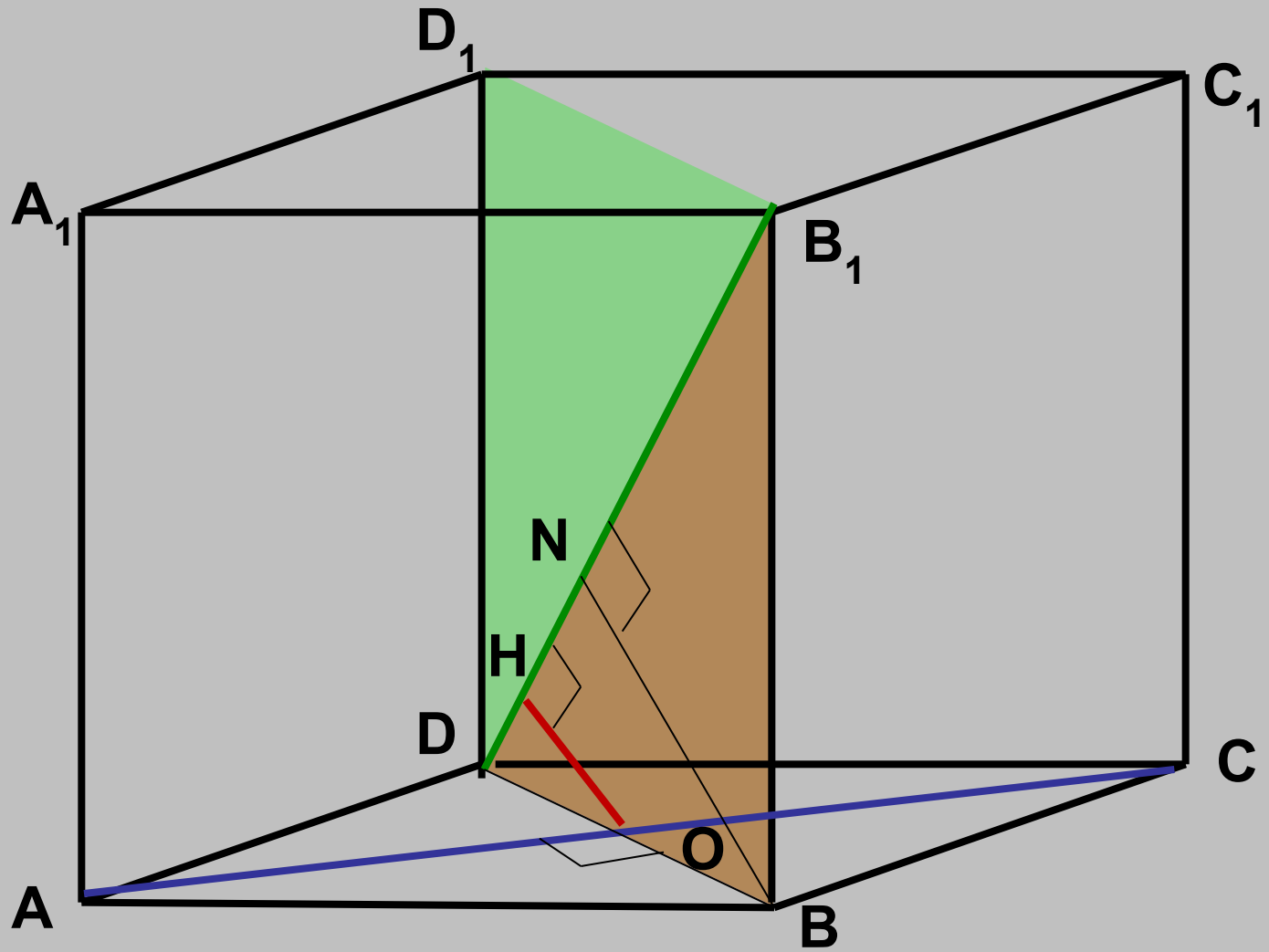
3) M – середина AO , найти $\rho(BD, O_1M)$



$$\rho(BD, O_1M) = OH$$

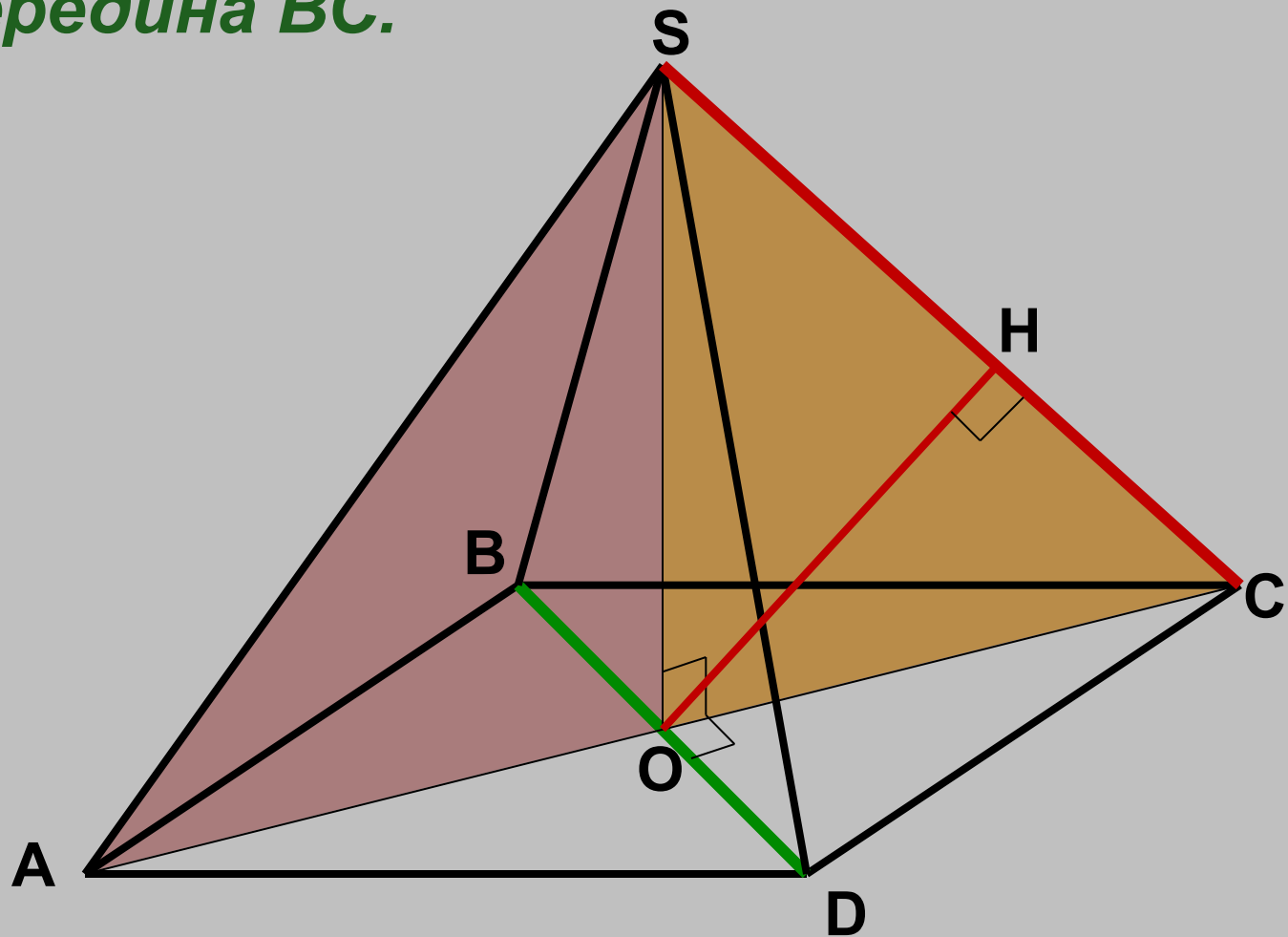
$$OH = \frac{a}{3}$$

4) Найти $\rho(B_1D, AC)$



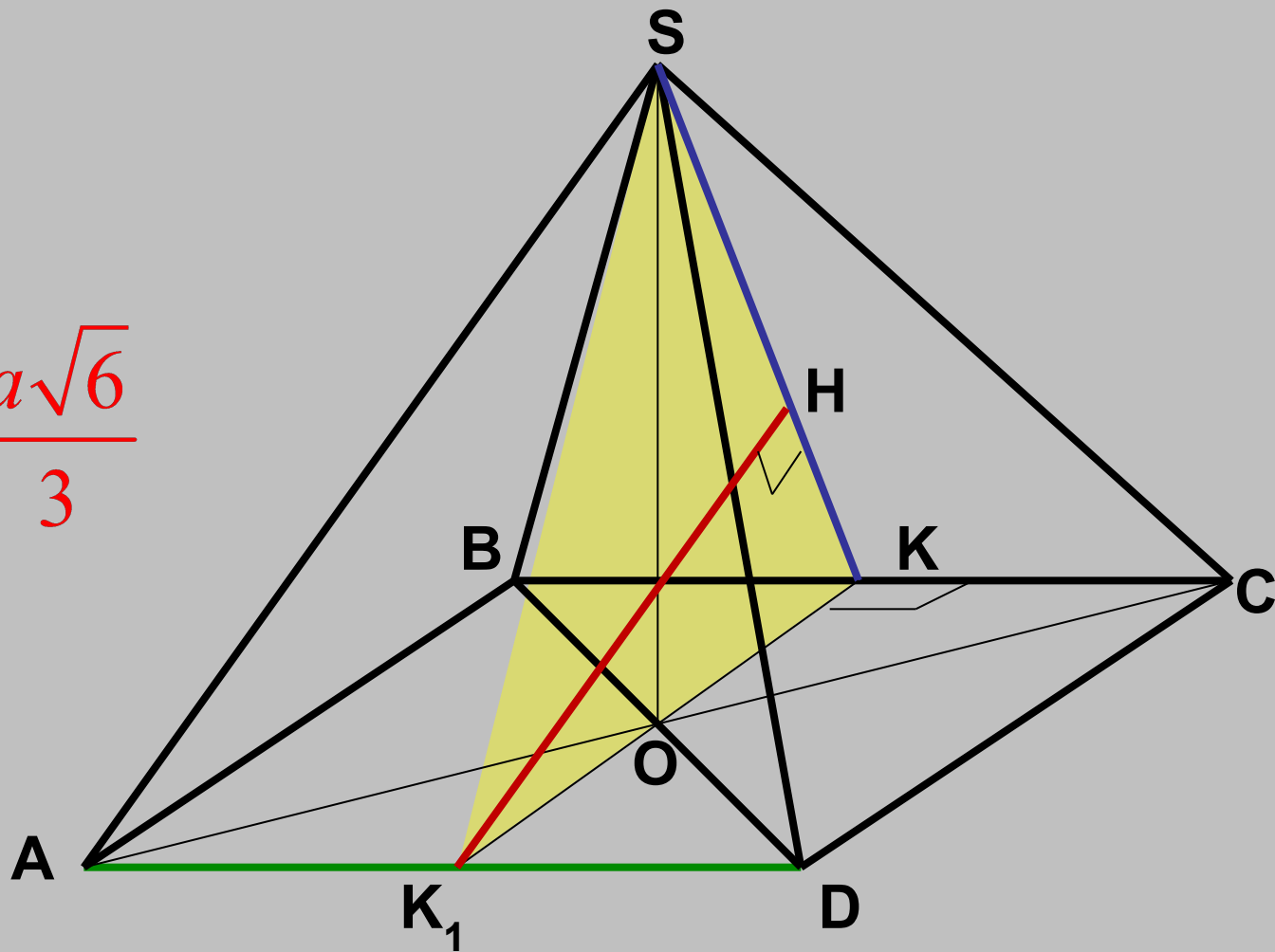
$$OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

4) Дана правильная пирамида, все рёбра которой равны a . Найти $\rho(BD, SC)$, $\rho(AD, SK)$, если K – середина BC .



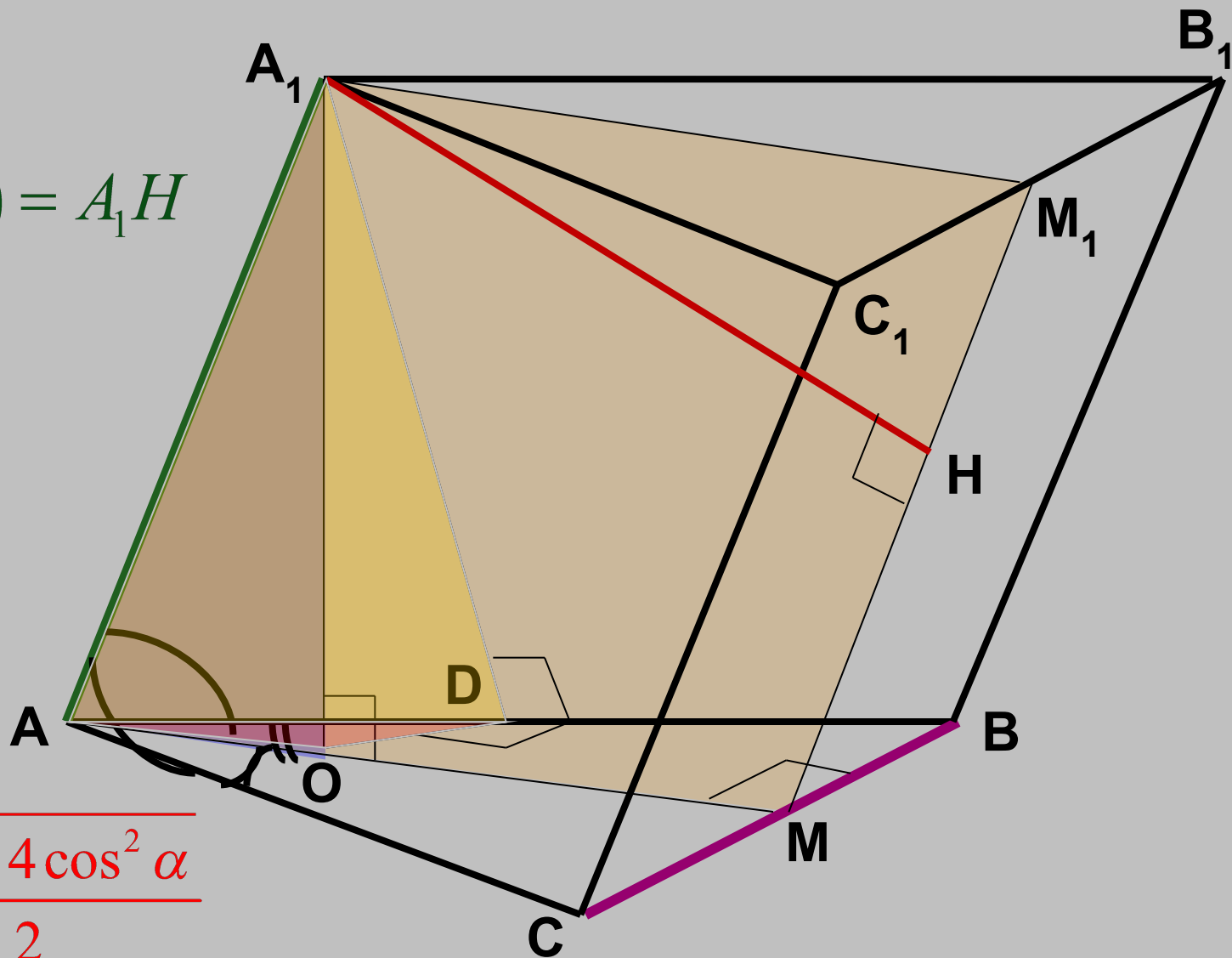
$$OH = \frac{a}{2}$$

$$K_1H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



В наклонной призме все рёбра равны a , $\square A_1AC = \square A_1AB$. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .

$$\rho(AA_1, BC) = A_1H$$



$$A_1H = \frac{a\sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}}{2}$$