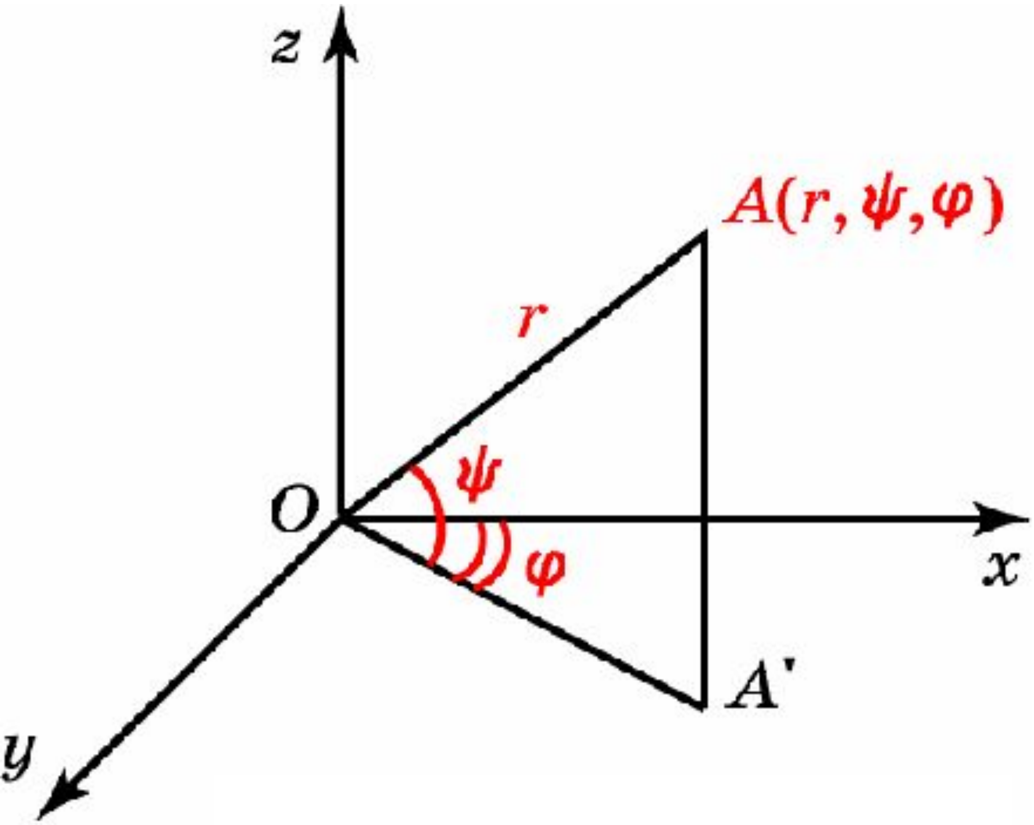
Сферические координаты

Пусть *A* – точка в пространстве с заданной системой координат. Ортогональную проекцию точки *A* на плоскость *Oxy* обозначим *A*', а длину вектора *OA* - через *r*. Угол наклона вектора к плоскости *Oxy* обозначим ψ, причем будем считать его изменяющимся от -90° до +90°.



Если точка *A* расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором и осью *Ox* обозначим φ. Тройка (*r*, ψ, φ) называется сферическими координатами точки *A* в пространстве.

Сферические координаты

Декартовы координаты (x,y,z) точки в пространстве выражаются через ее сферические координаты по формулам

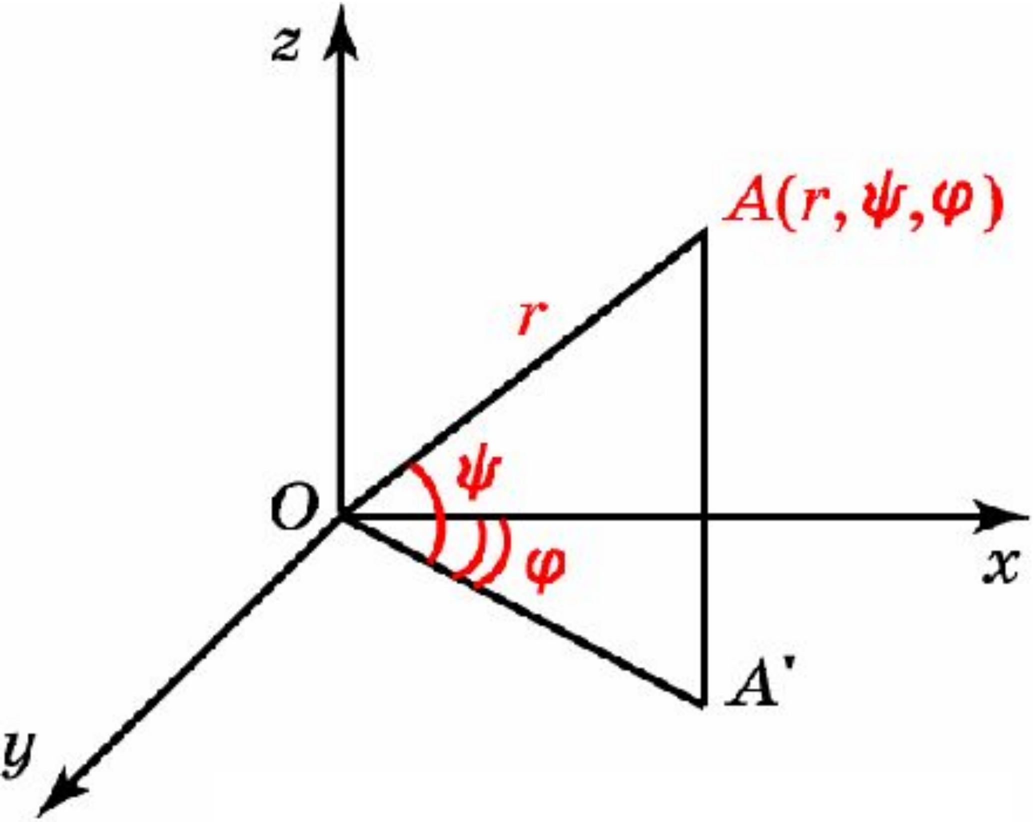
$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

и, наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

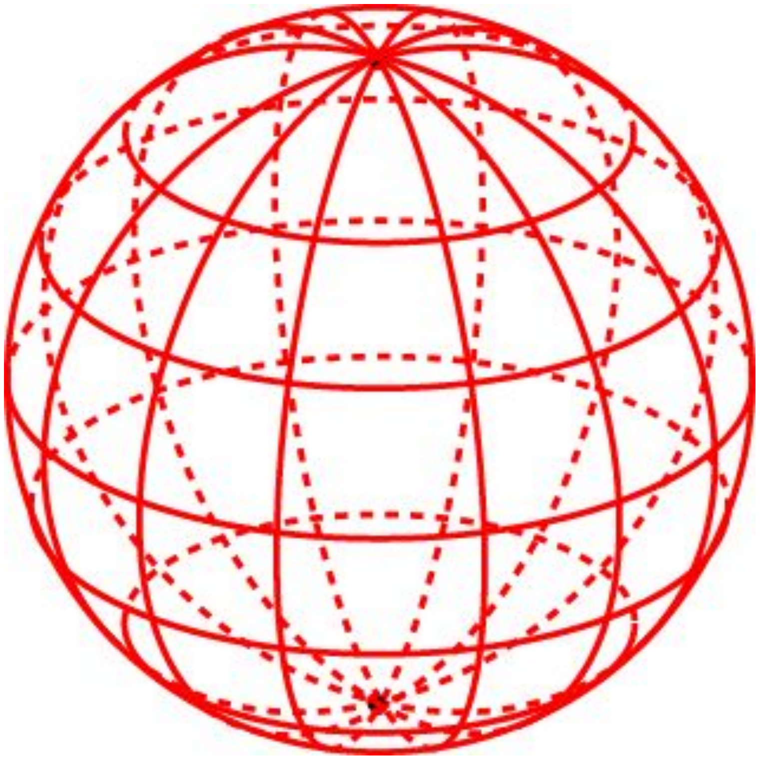
$$\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Сферические координаты

Точки на сфере, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется параллелью. Точки, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую меридианом.



Дуга большой окружности, соединяющая две точки сферы, является кратчайшим путем на сфере между этими двумя точками. Такой путь называют ортодромией, что в переводе с греческого означает "прямой бег".

Кривая, образующая равные углы с разными меридианами, называется локсодромия, что в переводе с греческого означает "косой бег".

Упражнение 1

Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: (1,45°,120°), (2,-30°,-90°), (1,90°, 60°).

Ответ: $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad (0, -\sqrt{3}, -1), (0, 0, 1).$

Упражнение 2

Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1,1,1)$, $B(-1,0,1)$, $C(0,0,2)$.

Ответ: A: $r = \sqrt{3}, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$B(\sqrt{2}, 45^\circ, 180^\circ)$; $C(2, 90^\circ, 0^\circ)$.

Упражнение 3

Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

Ответ: (0,0º,0º); (1,0º,0º); ($\sqrt{2}$,0º,45º); (1,0º,90º); (1,90º,0º); ($\sqrt{2}$, 45º,0º); ($\sqrt{3}$,ψ,ϕ), $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ($\sqrt{2}$,45º,90º).

Упражнение 4

Точка *A* имеет сферические координаты (r, ψ, ϕ). Найдите сферические координаты точки, симметричной данной, относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

Ответ: а) (r, -ψ, ϕ), (r, ψ, 180^o-ϕ), (r, ψ, -ϕ);

б) (r, -ψ, -ϕ), (r, -ψ, 180^o-ϕ), (r, ψ, 180^o+ϕ);

в) (r, -ψ, 180^o+ϕ).

Упражнение 5

Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.

Ответ: а) Сфера;

б) коническая поверхность;

в) полуплоскость.

Упражнение 6

Какая фигура в пространстве задается неравенствами: а) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$; б) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$; в) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$, $0 \leq \phi \leq \pi$?

Ответ: а) Полушар;

б) полушар;

в) четверть шара.

Упражнение 7

Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}, 0°, 45°)$, $B(2, 60°, 0°)$.

Ответ: 2.

Упражнение 8

Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при ее продолжении в обе стороны?

Ответ: На полюсах.

Упражнение 9

Напишите уравнение сферы в сферических координатах

Ответ: $r = 1$.

Упражнение 10

Найдите длины дуг локсодромии и ортодромии, соединяющих точки $A_1(R, 45°, 0°)$, $A_2(R, 45°, 180°)$ на сфере.

Ответ: $\pi R\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi R}{2}$.