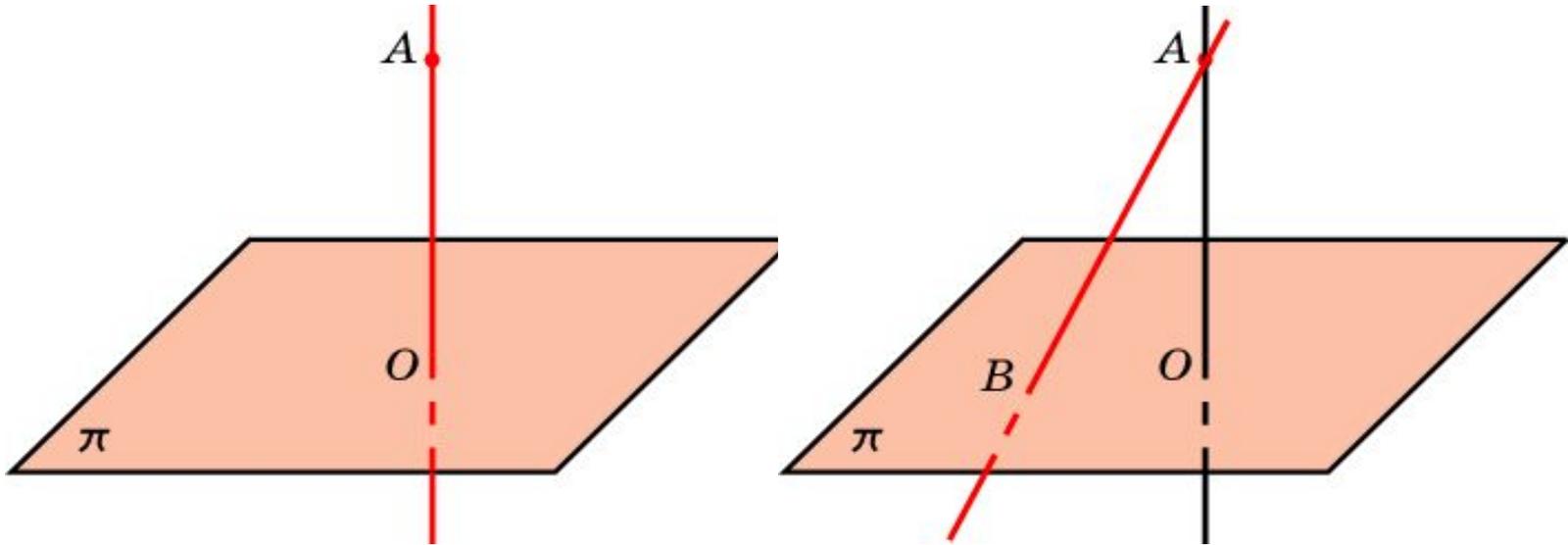


## ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

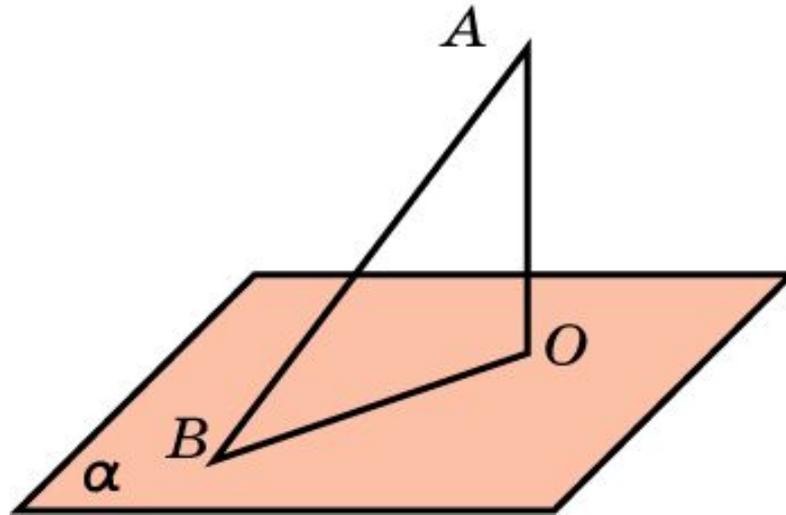
Пусть точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\pi$ . Проведем прямую  $a$ , проходящую через эту точку и перпендикулярную  $\pi$ . Точку пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\pi$  обозначим  $O$ . Отрезок  $AO$  называется **перпендикуляром**, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .



**Наклонной** к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

## Теорема о перпендикуляре и наклонной

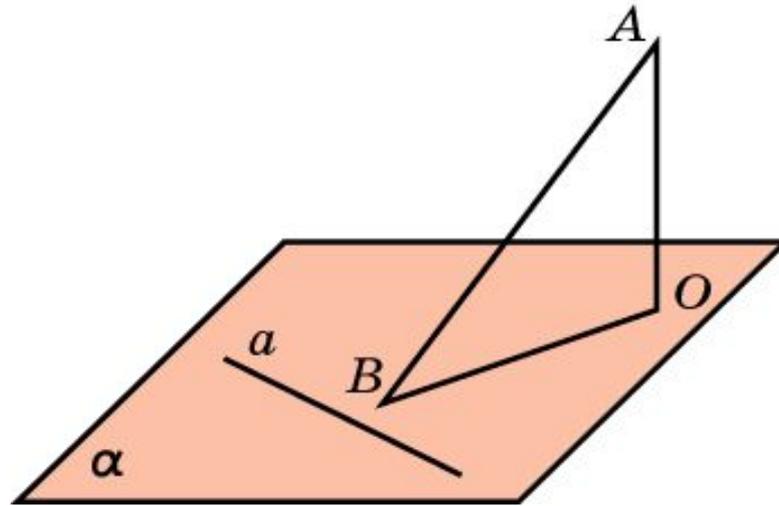
**Теорема.** Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.



**Доказательство.** Пусть  $AB$  – наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $AO$  – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость. Соединим отрезком точки  $O$  и  $B$ . Треугольник  $AOB$  прямоугольный,  $AB$  – гипотенуза,  $AO$  – катет. Следовательно,  $AO < AB$ .

## Теорема о трех перпендикулярах

**Теорема.** Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.



**Доказательство.** Пусть прямая  $a$  плоскости  $\alpha$  перпендикулярна проекции  $OB$  наклонной  $AB$ . Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $OB$  и  $AO$ . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $AOB$  и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной  $AB$ .

## Упражнение 1

Верно ли утверждение: «Если из двух различных точек, не принадлежащих плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны»?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

К плоскости прямоугольника  $ABCD$  в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение о том, что произвольная точка  $M$  этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника?

Ответ: Да.

## Упражнение 3

Точка  $M$  равноудалена от всех точек окружности. Верно ли утверждение о том, что она принадлежит перпендикуляру к плоскости окружности, проведённому через её центр?

Ответ: Да.

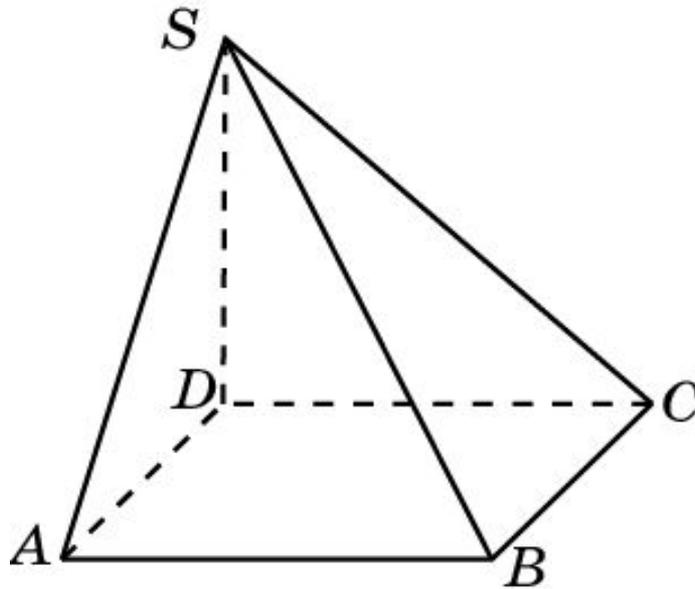
## Упражнение 4

Найдите ГМ оснований наклонных одинаковой длины, проведённых к данной плоскости из данной точки.

Ответ: Окружность.

## Упражнение 5

Основание  $ABCD$  пирамиды  $SABCD$  – прямоугольник,  $AB < BC$ . Ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  укажите наименьший и наибольший.



**Ответ:**  $SD$  – наименьший;  $SB$  – наибольший.

## Упражнение 6

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите проекцию отрезка  $AC$ , если  $AC = 37$  см,  $AB = 35$  см.

Ответ: 12 см.

## Упражнение 7

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AC$ , если  $AB = 6$  см,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

Ответ: 12 см.

## Упражнение 8

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AB$ , если  $AC = 2\sqrt{10}$  см,  $BC = 3AB$ .

Ответ: 2 см.

## Упражнение 9

Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

Ответ: 9 см.

## Упражнение 10

Отрезок  $BC$  длиной 12 см является проекцией отрезка  $AC$  на плоскость  $\alpha$ . Точка  $D$  принадлежит отрезку  $AC$  и  $AD:DC = 2:3$ . Найдите отрезок  $AD$  и его проекцию на плоскость  $\alpha$ , если известно, что  $AB = 9$  см.

**Ответ:** 6 см; 4,8 см.

## Упражнение 11

Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ , катеты которого  $AC$  и  $BC$  равны соответственно 20 и 15 см. Через вершину  $A$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BC$ . Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

Ответ:  $3\sqrt{41}$  см.

## Упражнение 12

Сторона ромба равна  $a$ , острый угол  $60^\circ$ . Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна  $b$ . Найдите проекции диагоналей ромба.

Ответ:  $b$  и  $\sqrt{2a^2 + b^2}$  .

## Упражнение 13

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

**Ответ:** Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

## Упражнение 14

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой.

**Ответ:** Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника с вершинами в данных точках, и перпендикулярная плоскости этого треугольника.