МОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

Геометрические задачи типа «С4»

по материалам ЕГЭ – 2010

Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,

г. Инсар, Республика Мордовия

Задачи

№1

№2

№3

№4

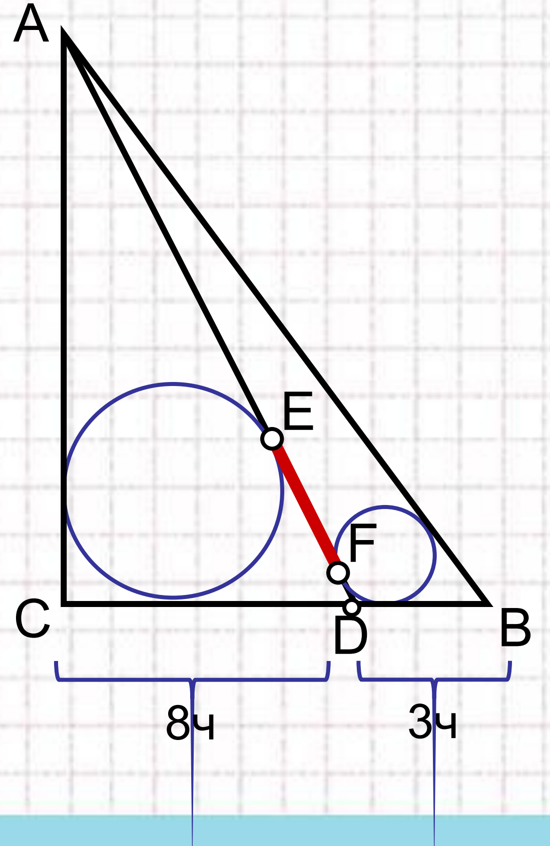
Желаю успеха!

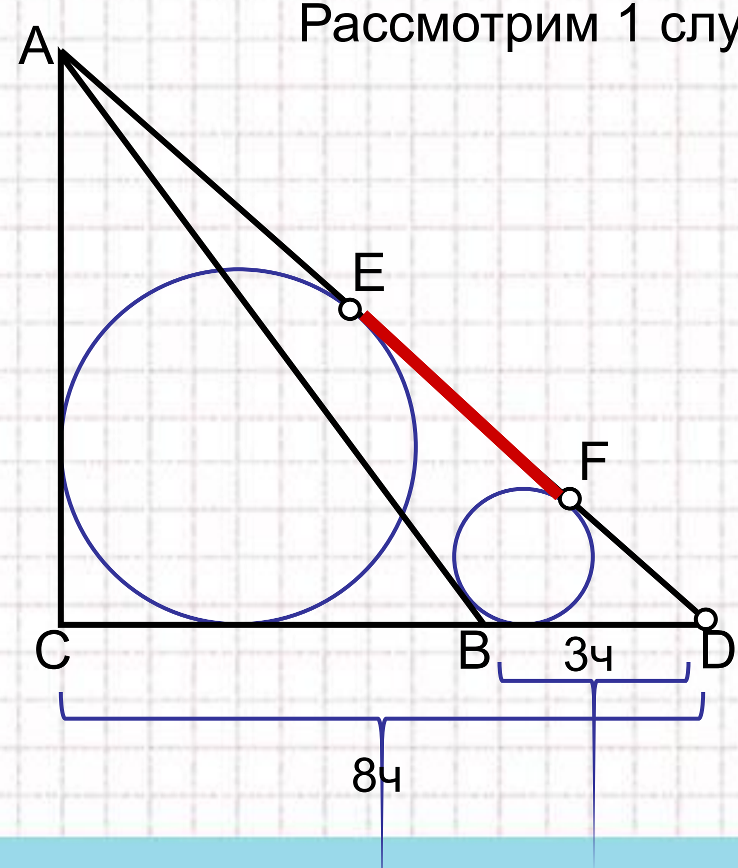
Помните: "Дорогу осилит идущий!"

№ 1 **В треугольнике ABC AB=15, BC = 12, CA = 9. Точка D лежит на прямой BC так, что BD:DC = 3:8. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.**

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC.

Рассмотрим 1 случай.

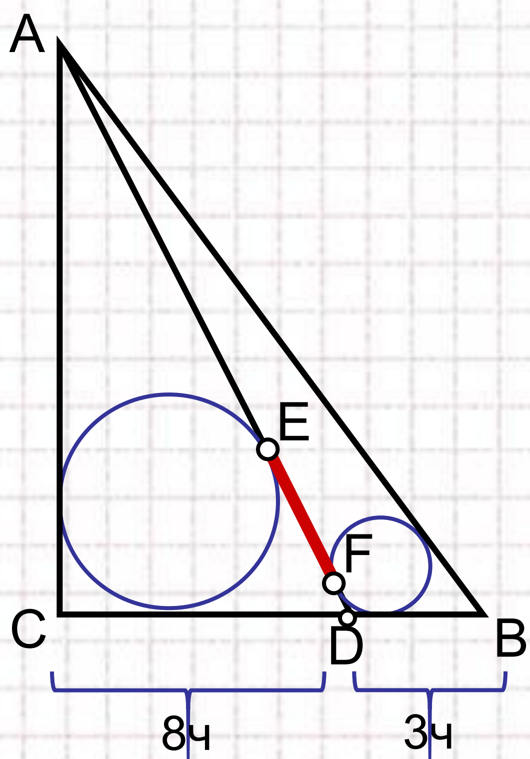




№ 1 **В треугольнике ABC AB=15, BC = 12, CA = 9. Точка D лежит на прямой BC так, что BD:DC = 3:8. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.**

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC.

Рассмотрим 1 случай.



Найдем: $BD = \frac{3}{11} \cdot BC = \frac{36}{11}, \quad DC = \frac{8}{11} \cdot BC = \frac{96}{11}.$

Из ΔADC, $DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2},$?

Из ΔADB, $DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$

Значит,

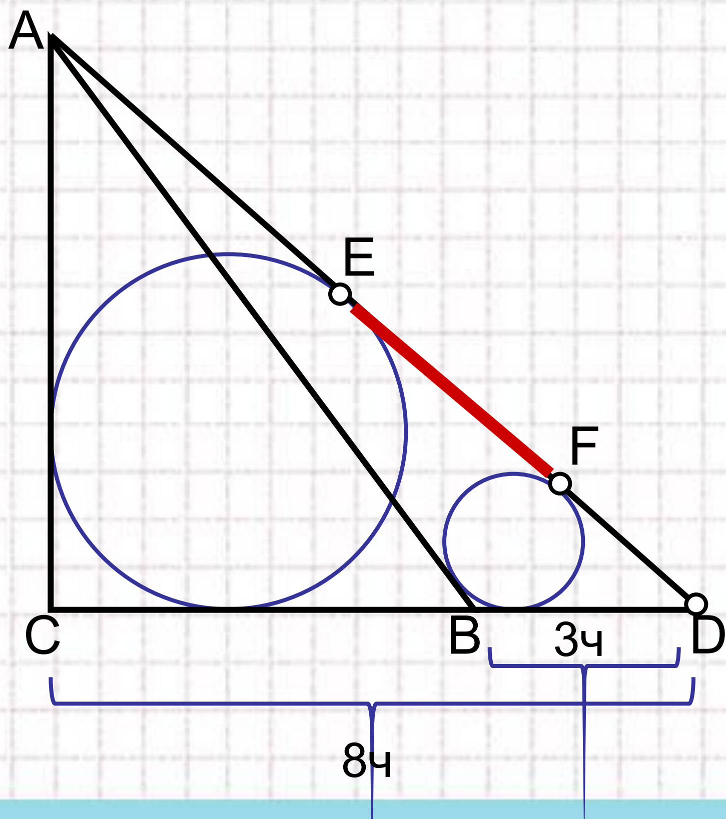
$$EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = \frac{63}{11}.$$

№ 1

В треугольнике ABC AB=15, BC = 12, CA = 9. Точка D лежит на прямой BC так, что BD:DC = 3:8. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC.

Рассмотрим 2 случай.



$$BC = \frac{5}{8} \cdot DC = 8, \quad DC = \frac{96}{5},$$

$$BD = DC - BC = \frac{96}{5} - 12 = \frac{36}{5}.$$

Из ΔADC, $DE = \dfrac{AD + DC - AC}{2} = \dfrac{AD + DC - 9}{2},$

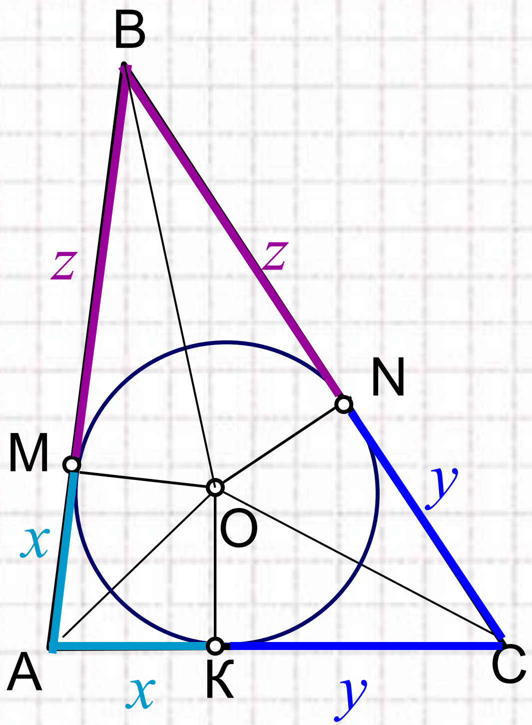
Из ΔADB, $DF = \dfrac{AD + BD - AB}{2} = \dfrac{AD + BD - 15}{2}.$

Значит, $EF = DE - DF = \dfrac{6 + DC - BD}{2} = 9.$

Ответ: 9 или $\dfrac{63}{11}$.

Вспомогательная задача.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно $\boxed{x = p - a = \dfrac{b + c - a}{2}.}$



Доказательство.

Мы знаем, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, значит AM=AK=x, BM=BN=y, CK=CN=z.

Тогда, периметр ΔABC равен: $P = 2x + 2y + 2z$, откуда

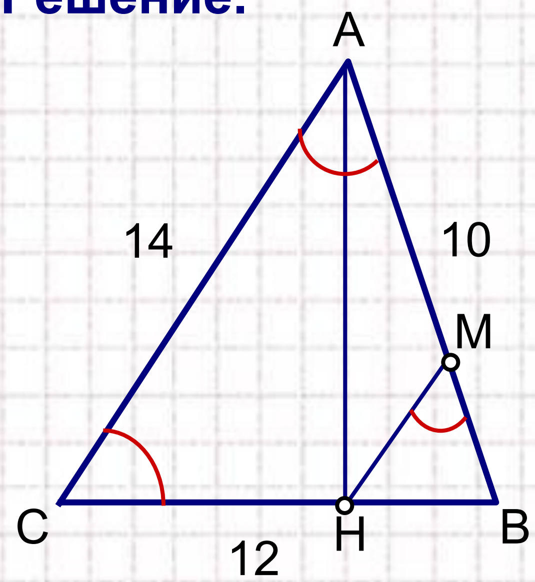
$$p = \frac{P}{2} = x + y + z, \quad \text{или} \quad x = p - (y + z) = p - a,$$

$$x = p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

№ 2

Точка *H* – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14 , опущенной на сторону, равную 12. Через точку *H* проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке *M* . Найдите *HM* .

Решение.



Пусть AB = 10, BC = 12, AC = 14.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

ΔABH – прямоугольный, BH = AB·cosB = 2.

По условию ΔABC∞ΔHBM, и имеют общий угол B, значит возможны два случая.

1 случай. ∠BMH = ∠BAC; $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

значит, $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$.

2 случай. ∠BMH = ∠ACB; $k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, значит, $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

№ 3

Площадь трапеции *ABCD* равна 240. Диагонали пересекаются в точке *O* , отрезки, соединяющие середину *P* основания *AD* с вершинами *B* и *C* , пересекаются с диагоналями трапеции в точках *M* и *N* . Найдите площадь четырехугольника *OMPN* , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

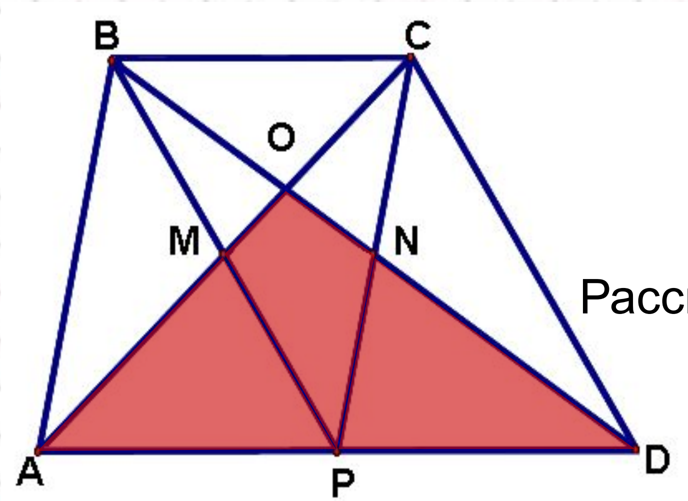
Решение. Возможно два вида трапеции. В обоих случаях:

1) нижнее основание вдвое больше верхнего, BC = a, AD = 2a,

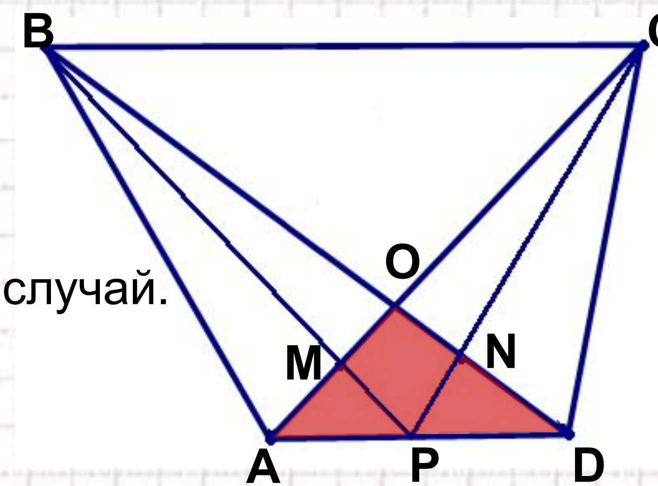
2) верхнее основание вдвое больше нижнего, AD = a, BC = 2a.

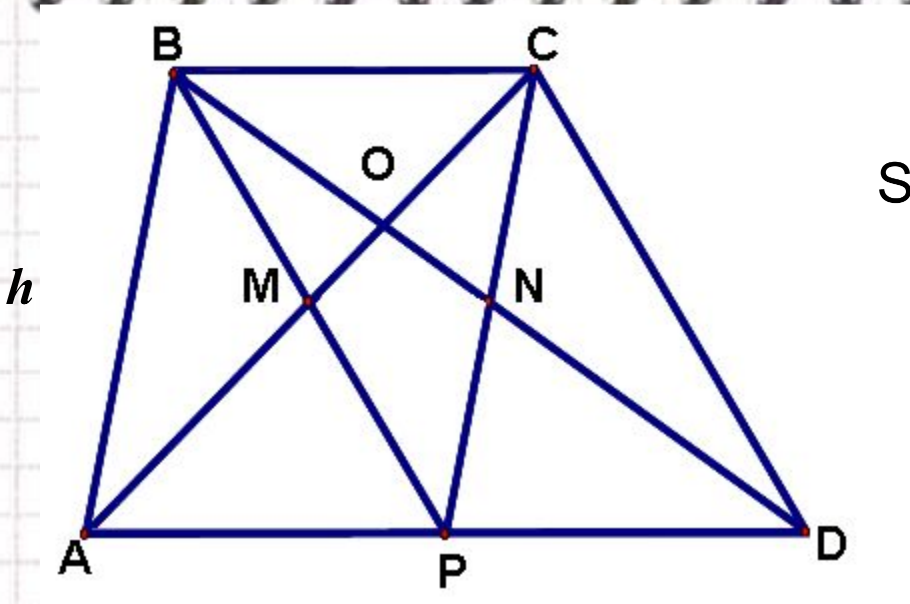
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot h = \frac{a+3a}{2}\cdot h = \frac{4}{2}\cdot ah = 2ah = 240, \quad ah = 120$$

Найдем площадь OMPN: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$.



Рассмотрим первый случай.





о условию BC = a, AD = 3a, ah = 120.

$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$.

) $\Delta BOC \infty \Delta AOD$, по трем углам

$= \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$

начит высота ΔAOD равна $\frac{3}{4}h$, тогда:

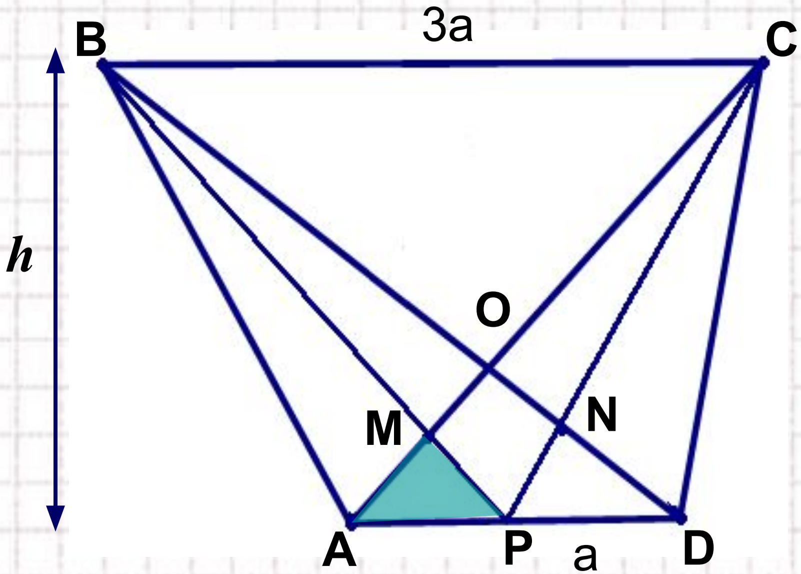
$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8} \cdot 3ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135.$$

2) $\Delta BMC \infty \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{a}{3a/2} = \frac{2}{3}.$

Тогда высота треугольника AMP равна 3/5 высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{20} \cdot 120 = 54.$$

3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 135 - 2 \cdot 54 = 27.$



По условию BC = 3a, AD = a, ah = 120.

$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$.

1) $\Delta BOC \infty \Delta AOD$, по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{3a}{a} = 3.$$

Значит высота ΔAOD равна $\frac{1}{4}h$, тогда:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8} \cdot ah = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15.$$

2) $\Delta BMC \infty \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{3a}{a/2} = 6.$

Тогда высота треугольника AMP равна 1/7 высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{28} \cdot 120 = \frac{30}{7}.$$

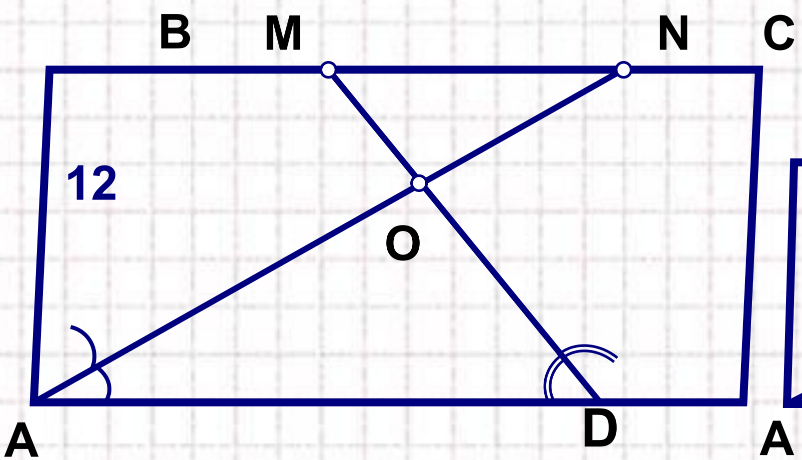
3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 15 - 2 \cdot \frac{30}{7} = 5.$

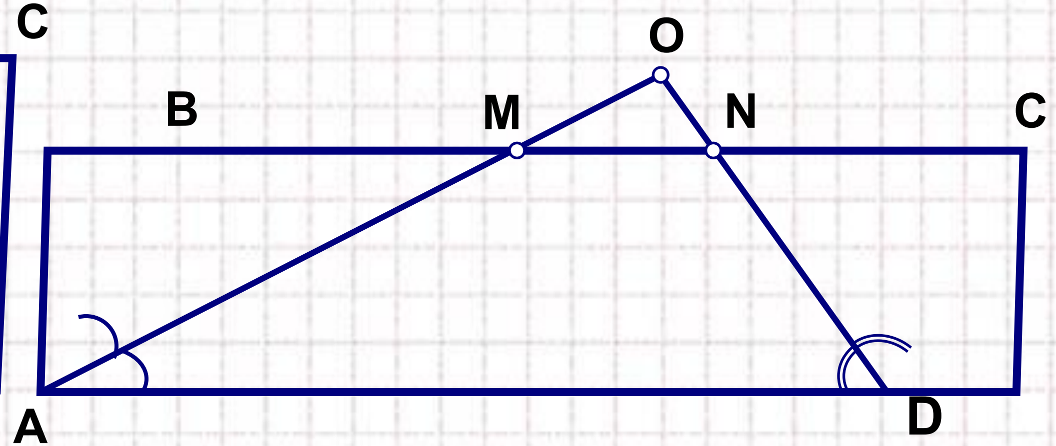
Ответ: 27 или 5.

№ 4 **В параллелограмме ABCD AB=12, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что BM:MN=1:7. Найдите BC.**

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N.





Возможны два случая.

1) точка O – лежит внутри параллелограмма;

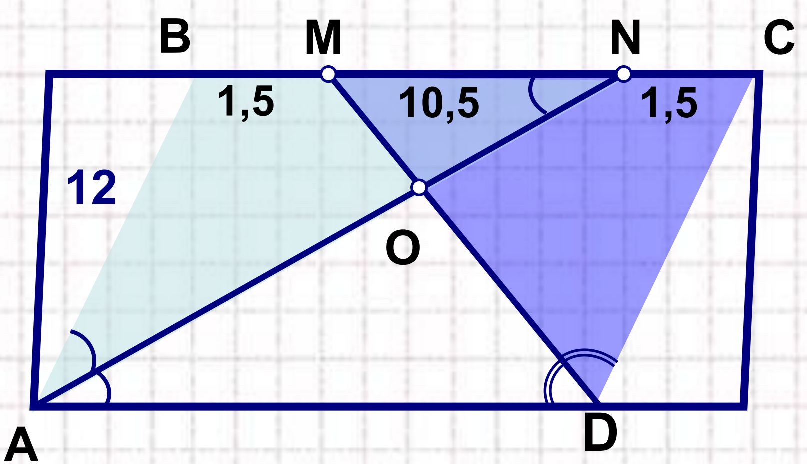
2) точка O – лежит вне параллелограмма.

Рассмотрим первый случай.

№ 4 **В параллелограмме ABCD AB=12, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что BM:MN=1:7. Найдите BC.**

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN}=\frac{1}{7}<1,$ значит M лежит между точками B и N.



1) ΔABN – равнобедренный, т.к.

∠BNA=∠NAD- накрест лежащие;

AN – биссектриса ∠A,

значит ∠BNA=∠ BAN и AB=BN=12,

тогда $BM=\frac{1}{8}BN=\frac{1}{8}\cdot 12=1,5.$

Найдем MN=BN-BM=12-1,5=10,5.

2) Аналогично, ΔDMC – равнобедренный, MC=DC=12.

Тогда NC= MC-MN=12-10,5=1,5.

3) Значит, BC=BM+MN+NC=13,5.

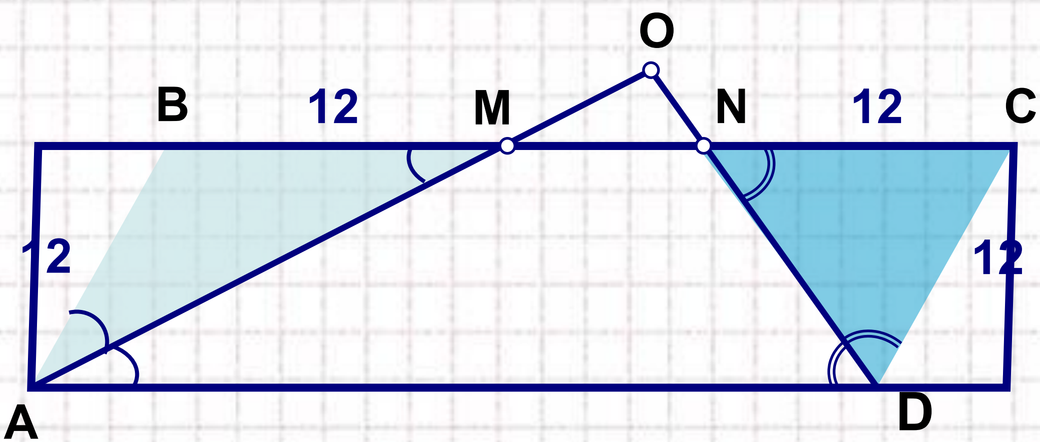
Рассмотрим первый случай

№ 4

В параллелограмме ABCD AB=12, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что BM:MN=1:7. Найдите BC.

Решение. Рассмотрим второй случай:

точка O – лежит вне параллелограмма.



1)ΔABM– равнобедренный, т.к.

∠BMA=∠MAD- накрест лежащие

AM – биссектриса ∠A,

значит ∠BMA=∠ BAM.

Тогда AB=BM=12.

По условию $\frac{BM}{MN}=\frac{1}{7}$, значит $BM=\frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN=8\cdot 12=96.$

2) Аналогично ΔDNC– равнобедренный, тогда NC=DC=12.

3) Значит, BC=BN+NC=96+12=108.

Ответ: 13,5 или 108.

Использованные ресурсы

Тексты задач взяты с сайта Александра Ларина

http://alexlarin.narod.ru/ege.html

Рисунок на слайде №2

http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B

Для создания шаблона презентации использовалась картинка
http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg
и шаблон с сайта http://aida.ucoz.ru