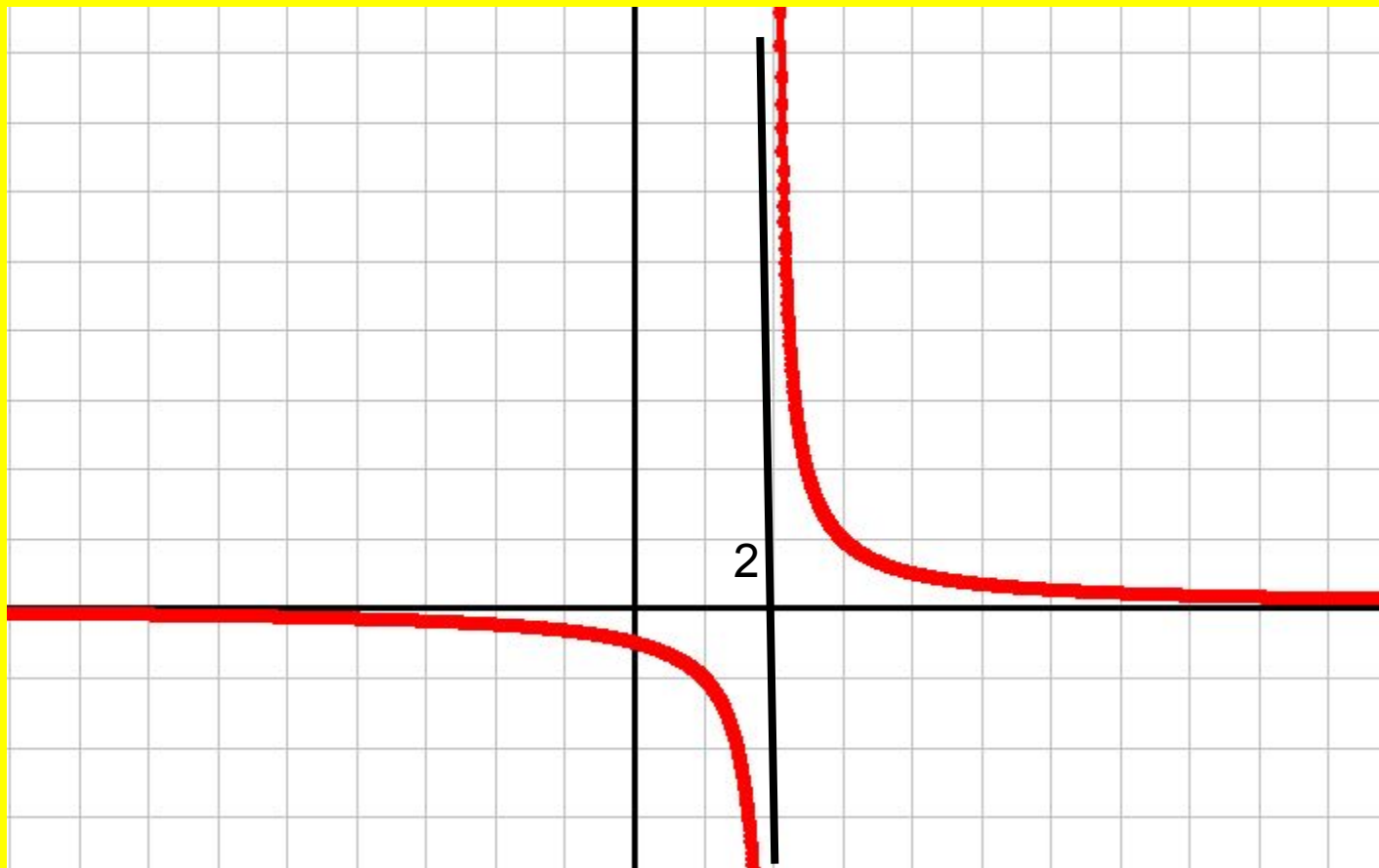


# *Асимптоты*

**Построение эскизов графиков.**

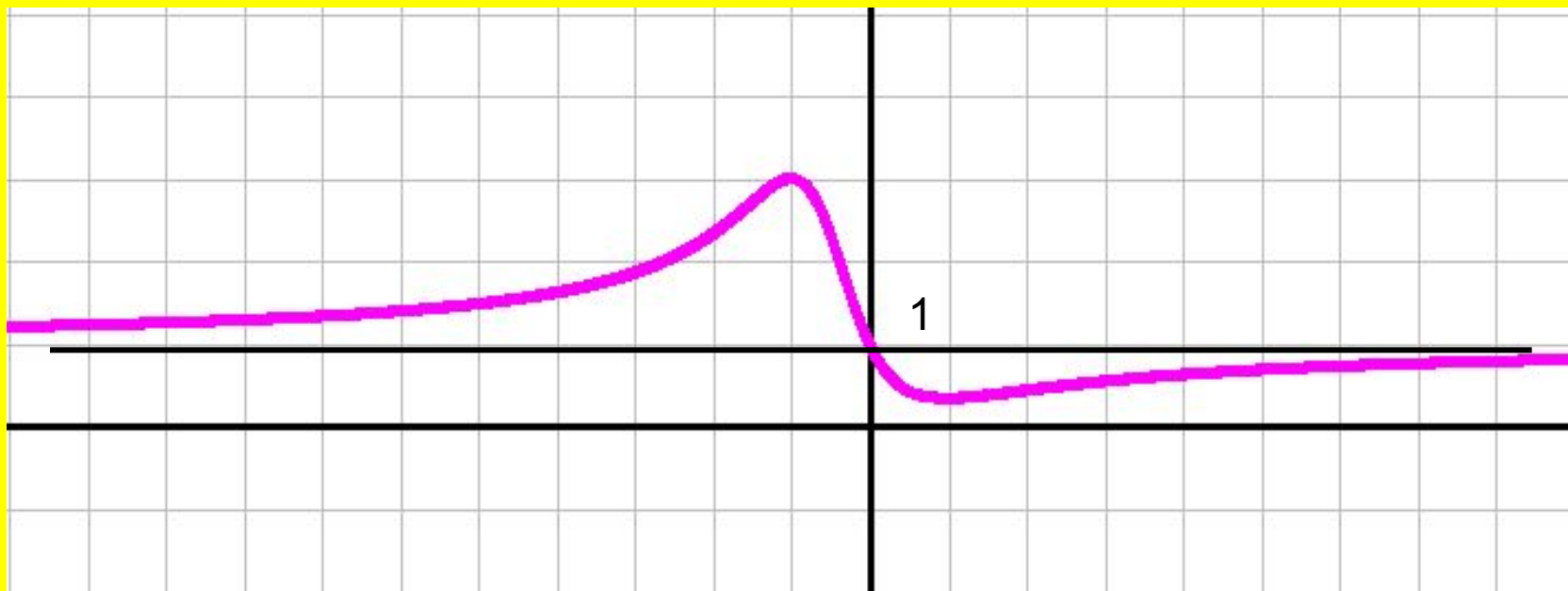


$$y = \frac{1}{x-2} \quad D(y) : x \neq 2$$

**Определение:** прямая вида  $x=a$  называется **вертикальной асимптотой** для  $y=f(x)$ , если

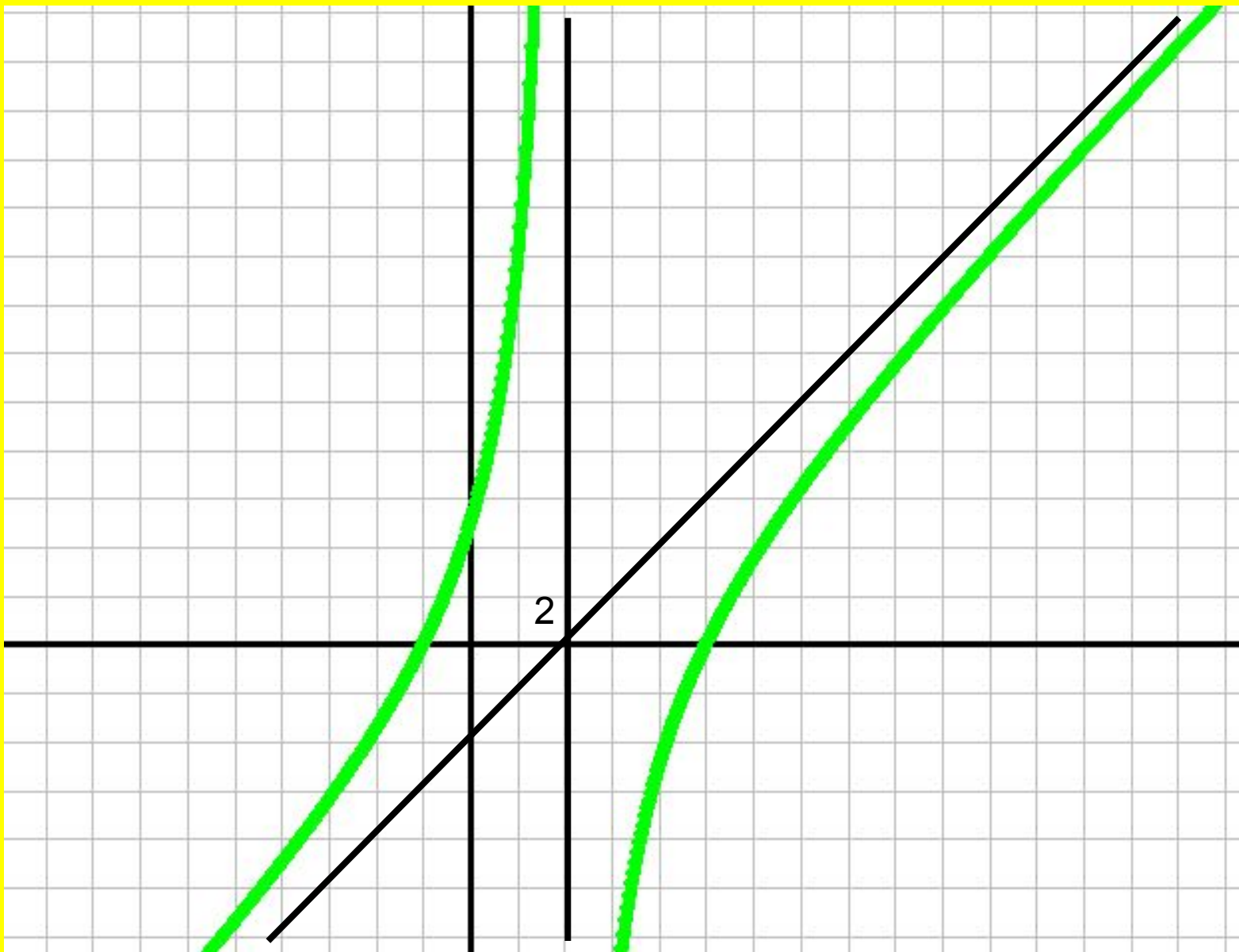
$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$$

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

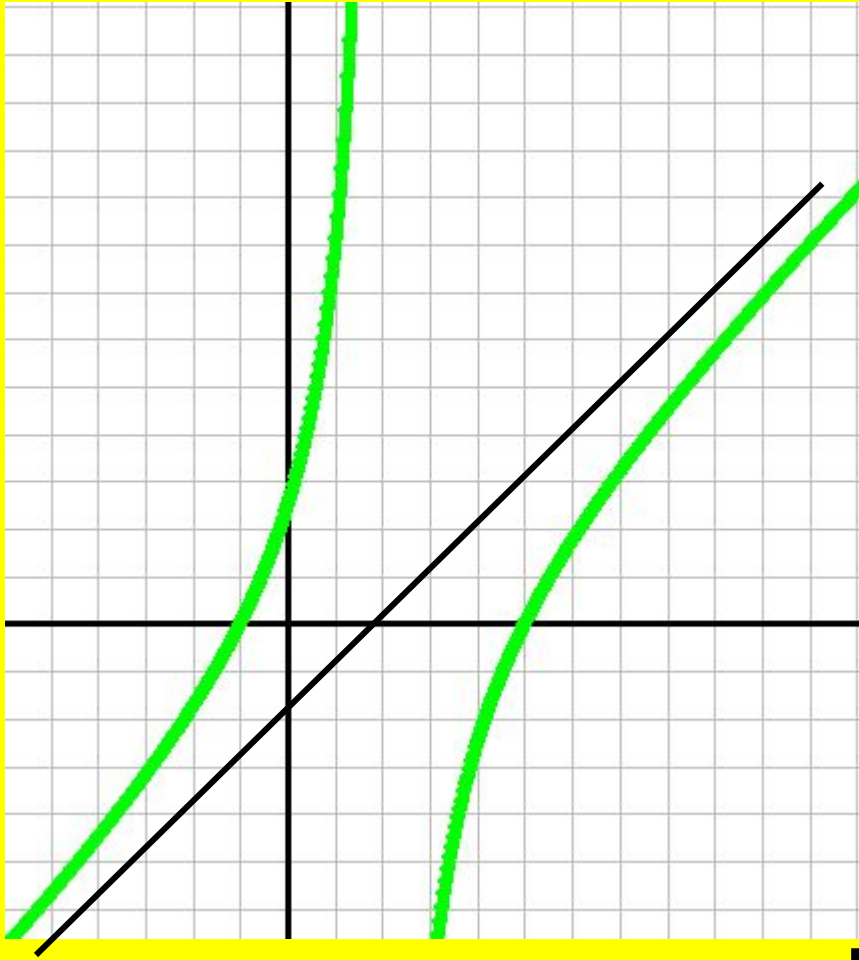


**Определение:** прямая вида  $y=b$   
называется **горизонтальной асимптотой**,

если  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$



$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}$$



**Определение:**  
прямая вида  
 $y=kx+b$   
называется  
наклонной  
асимптотой,  
если для  $y=f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

# Примечания:

**1. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.**

**2. У дробно-рациональной функции горизонтальные асимптоты существуют, если степень числителя меньше или равна степени знаменателя.**

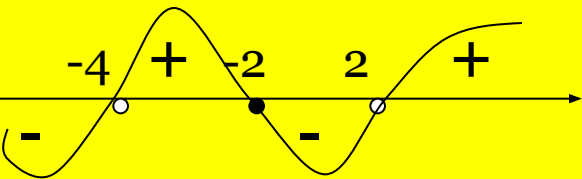
**3. У дробно-рациональной функции наклонная асимптота существует, если степень числителя больше, чем степень знаменателя.**

**4. Для более точного построения эскиза нужно найти:**

- промежутки знакопостоянства функции**
- нули функции**
- точки пересечения графика с осями (по возможности) и с асимптотами**

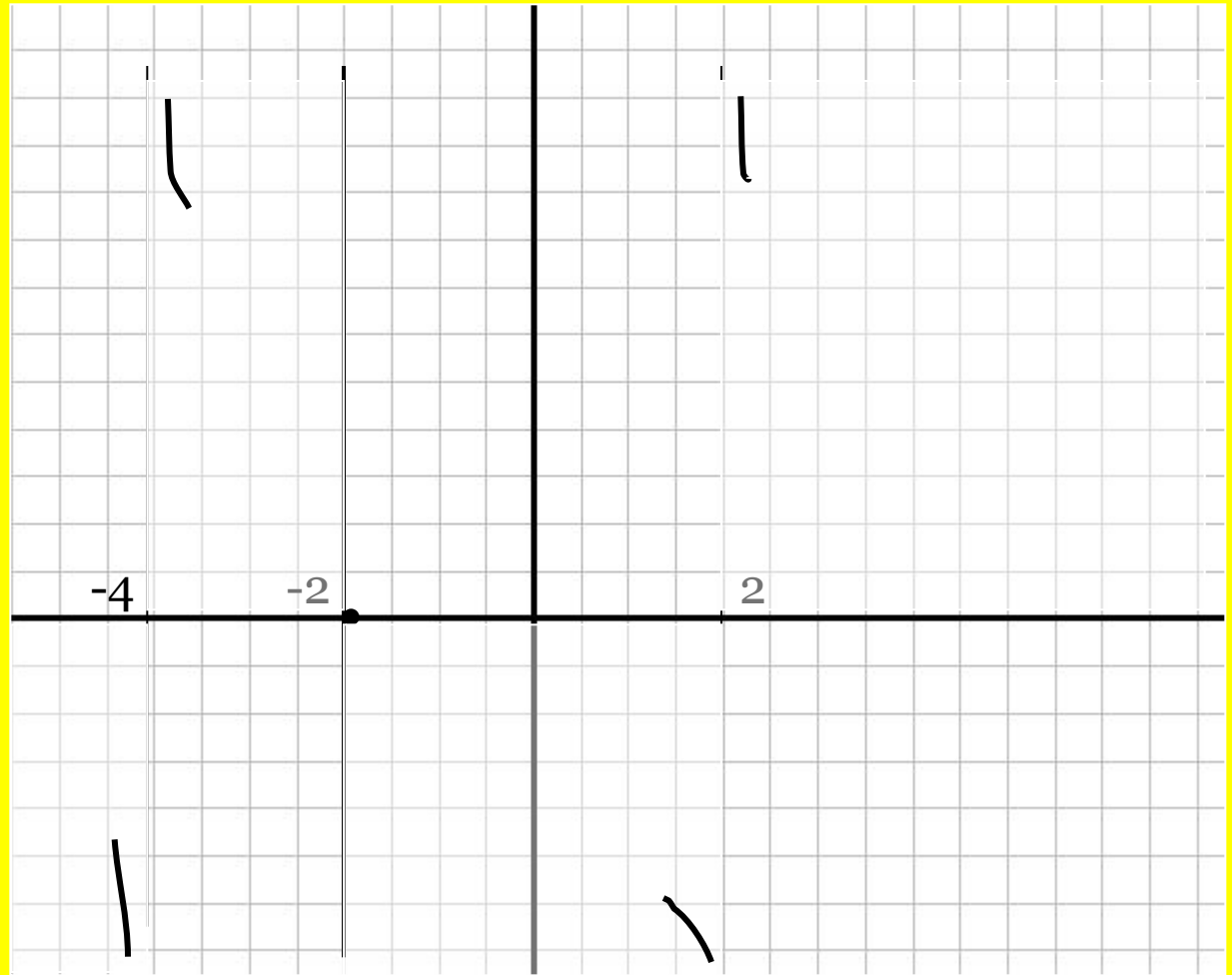
# Области существования графика на координатной плоскости.

$$y = \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$$



Если  $y > 0$ , то график расположен выше оси  $Ox$

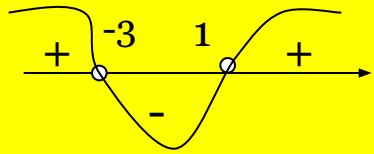
Если  $y < 0$ , то график расположен ниже оси  $Ox$



# Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$D(y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = 0$$

**$y=0$ - горизонтальная асимптота**

**$x=-3$  и  $x=1$ -  
вертикальные  
асимптоты**

Для более точного построения возьмем контрольные

точки:

$x=2$

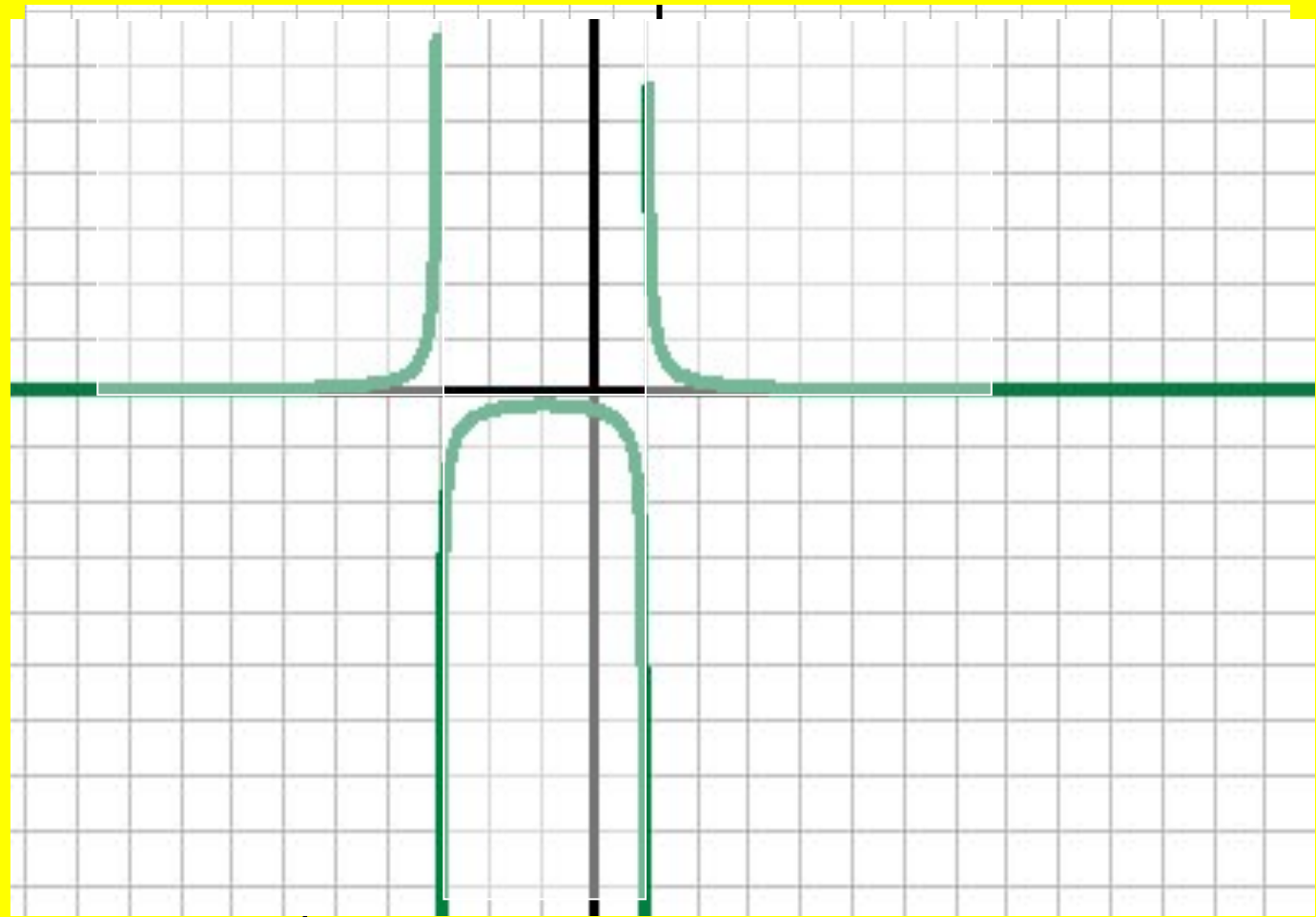
$x=0$

$x=-4$

$y=1/5$

$y=-1/3$

$y=1/5$



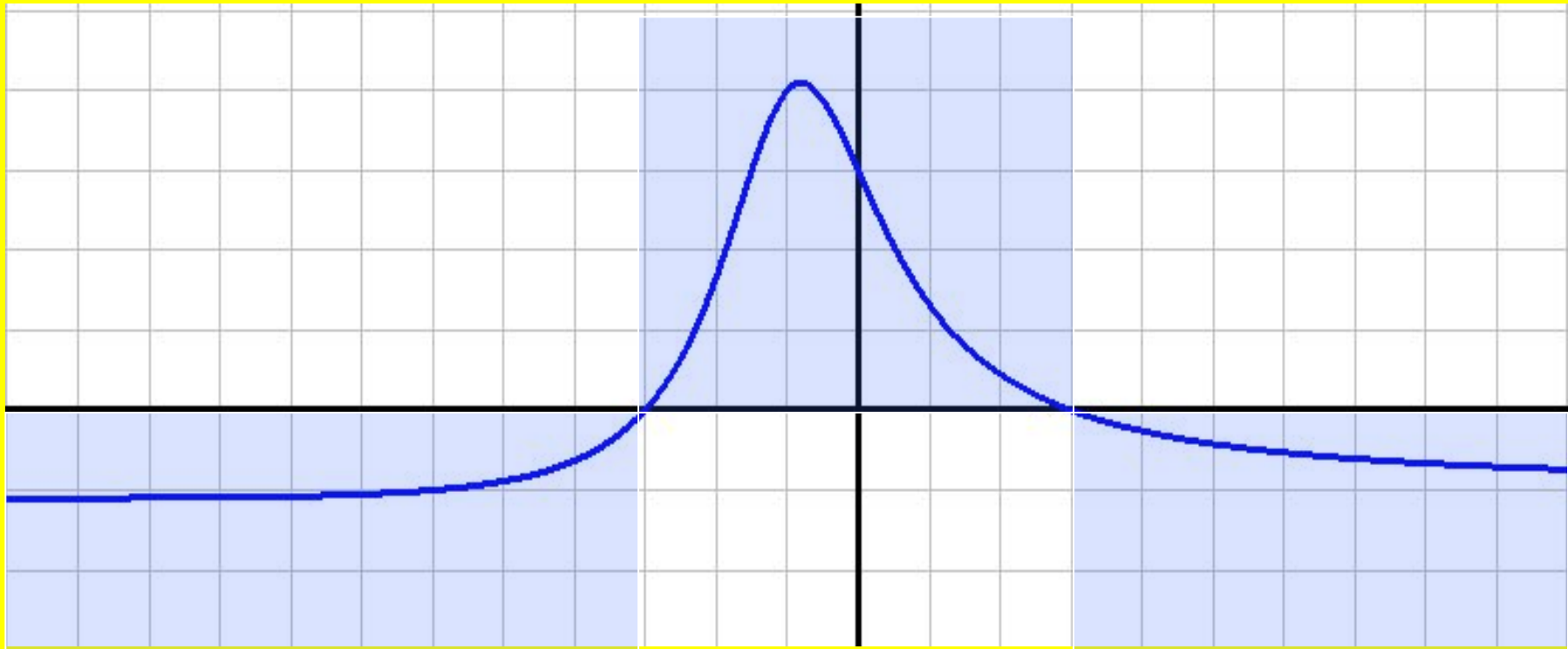


*Нахождение асимптот и построение эскизов графиков*

$$y = \frac{9 - x^2}{x^2 + 2x + 3}$$

$D(f) : x \in \mathbb{R}$ , вертикальных асимптот нет

Горизонтальная асимптота  $y = -1$ .

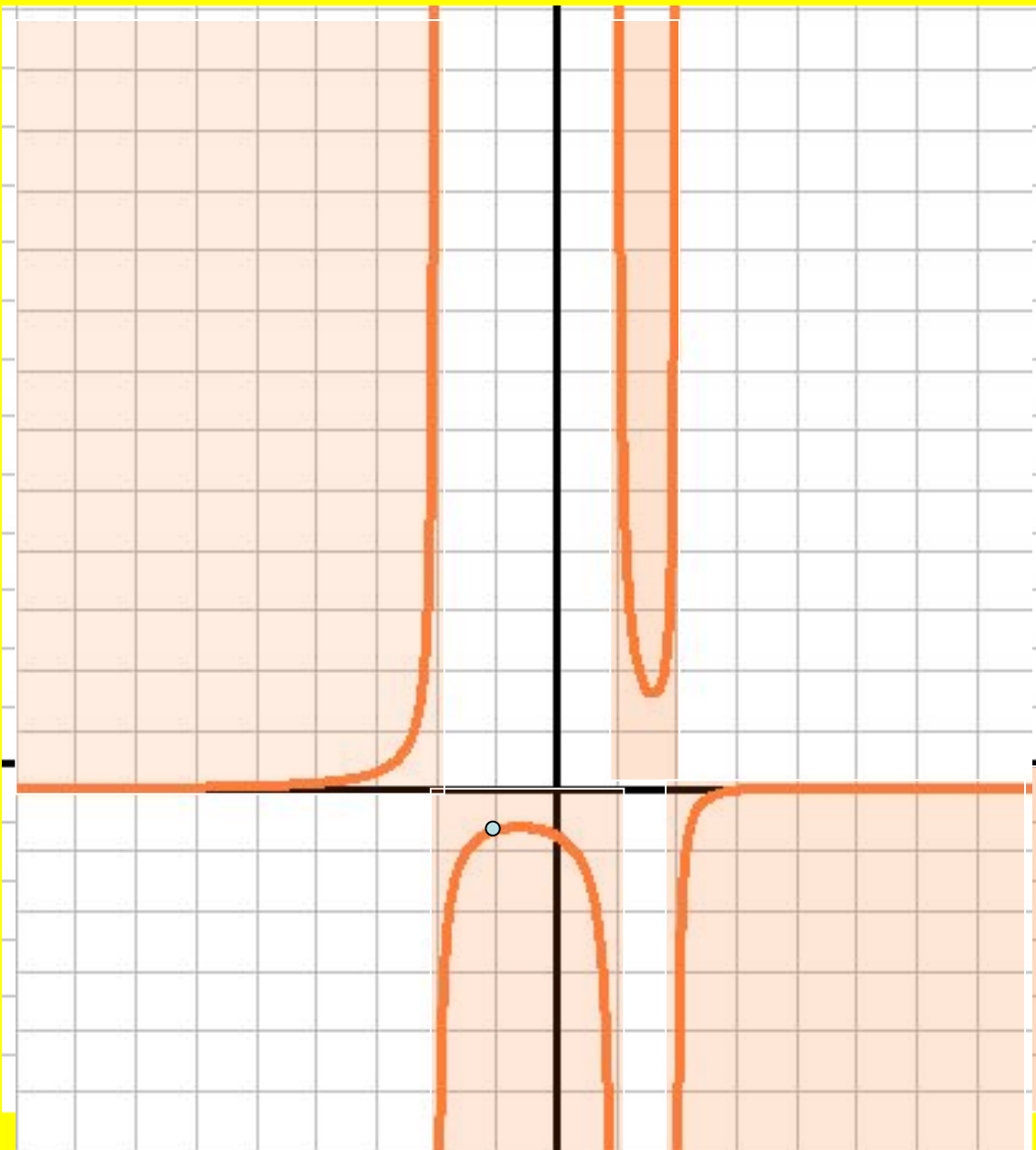


$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

**$x=2, x=1, x=-2$**

***Вертикальные  
асимптоты***

***$y=0$  – горизонтальная  
асимптота***



# Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 2}$$

$$D(f) : x \in \mathbb{R}$$

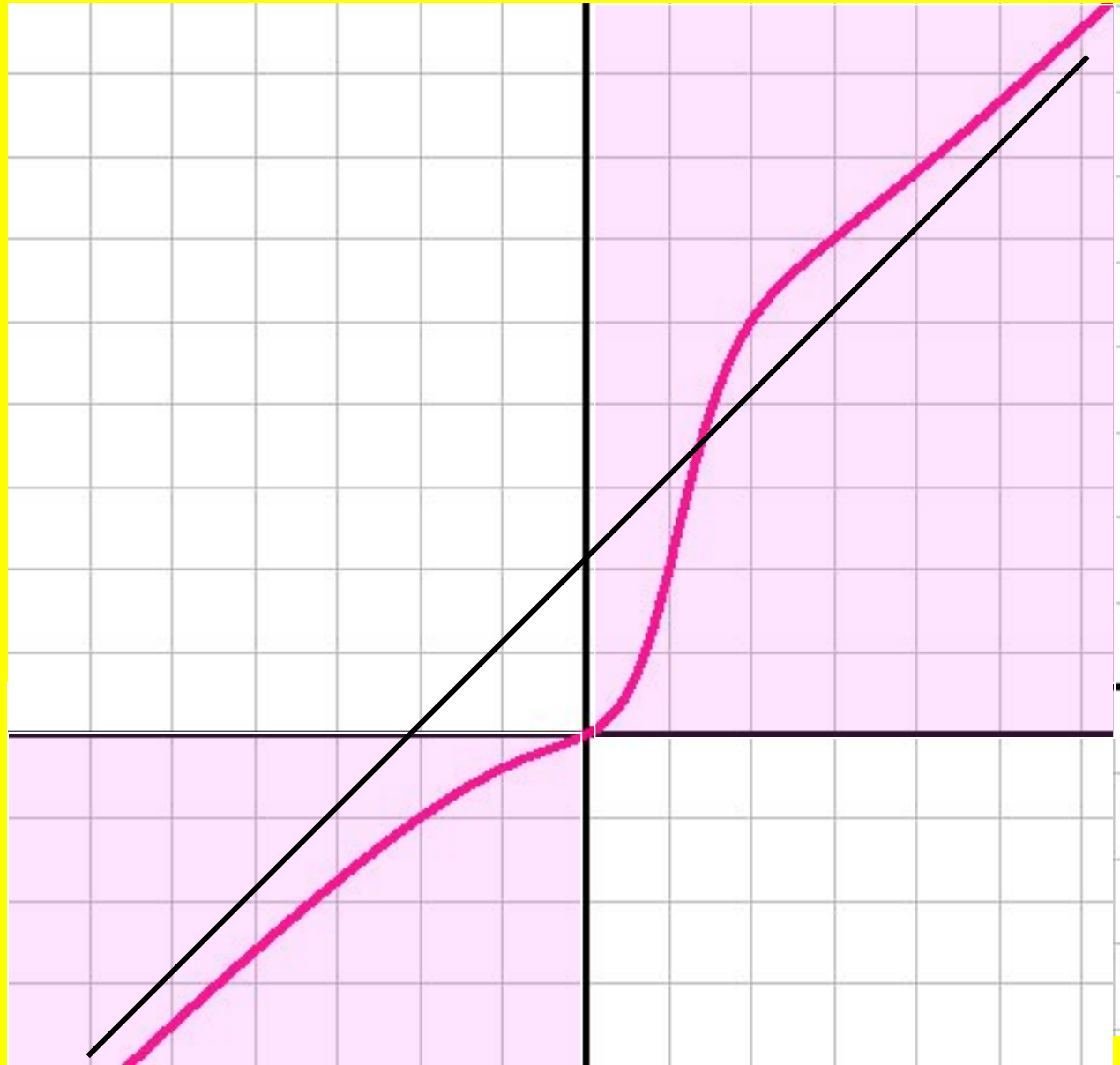
Вертикальных асимптот нет.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

Горизонтальных асимптот нет.

Наклонная асимптота  $y = x + 2$

При  $x = 4/3$  график  $y = f(x)$  пересекает  $y = x + 2$  в точке  $y = 3 \frac{1}{3}$



## Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$

**Вертик. асимптота  $x=2$**

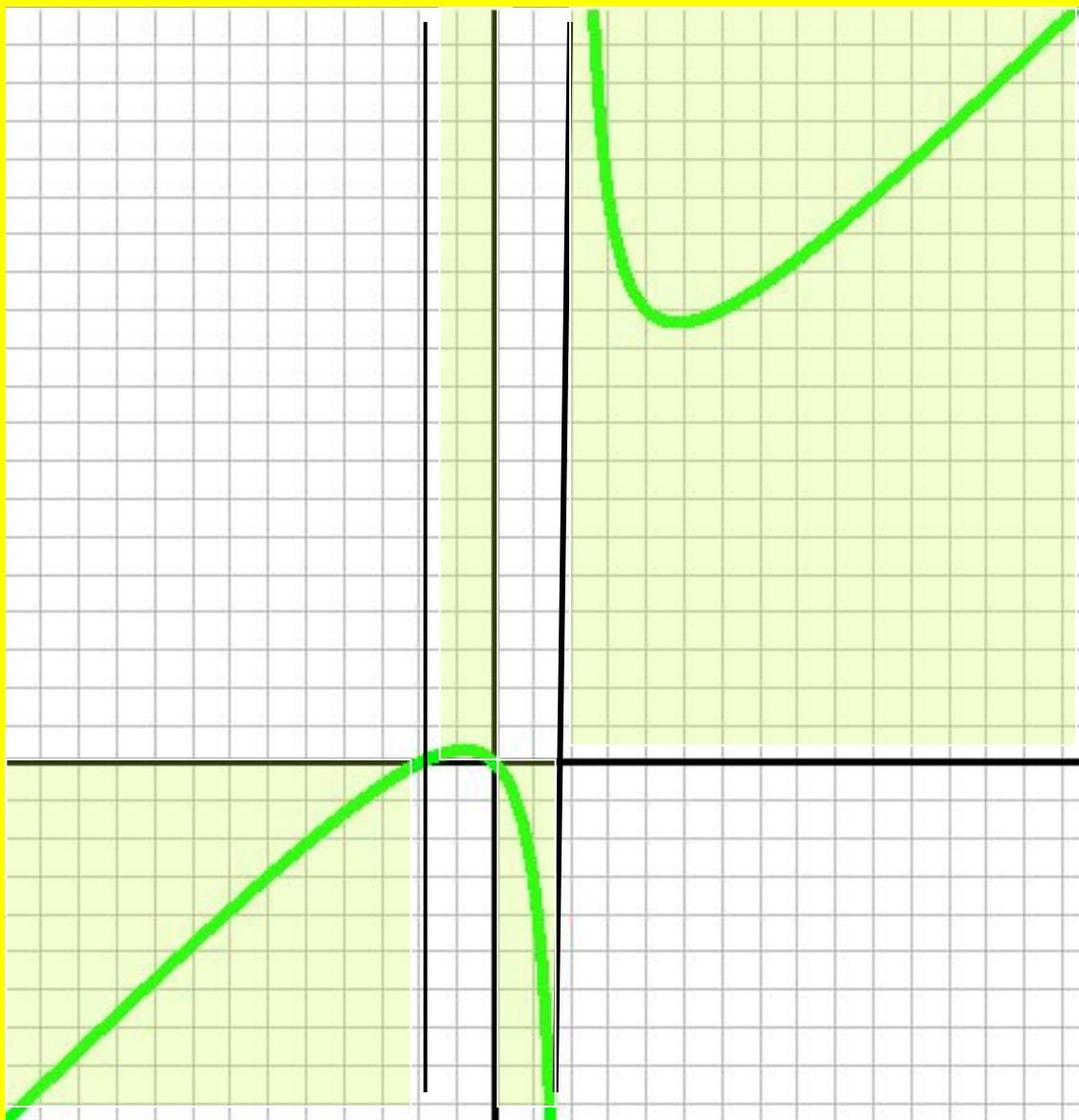
**Ноль функции  $x=-2$**

**Горизонт. асимптот нет**

**Наклонная асимптота  
 $y=x+4$**

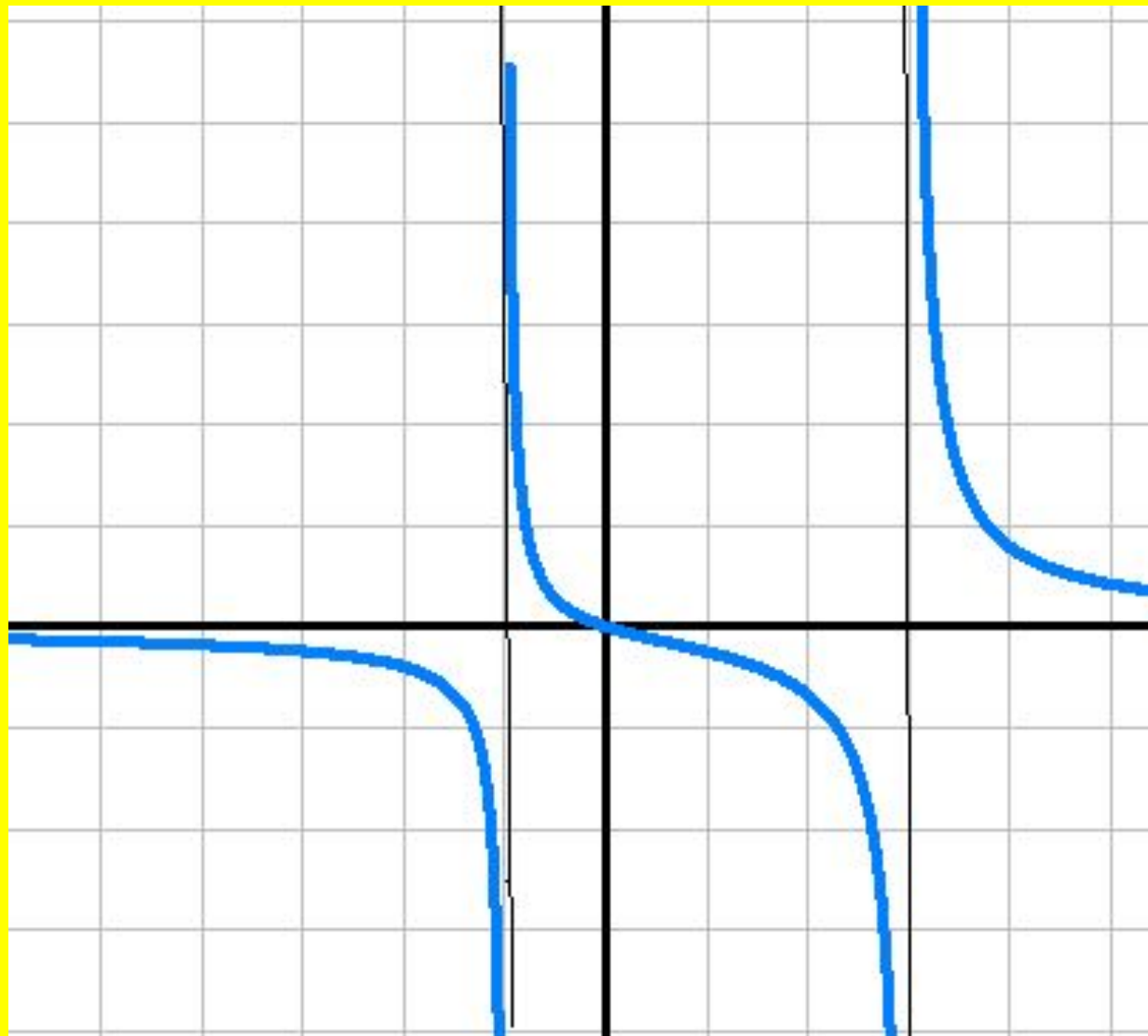
**Найдем  $E(y)$ :**

$$y \in (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}; +\infty)$$



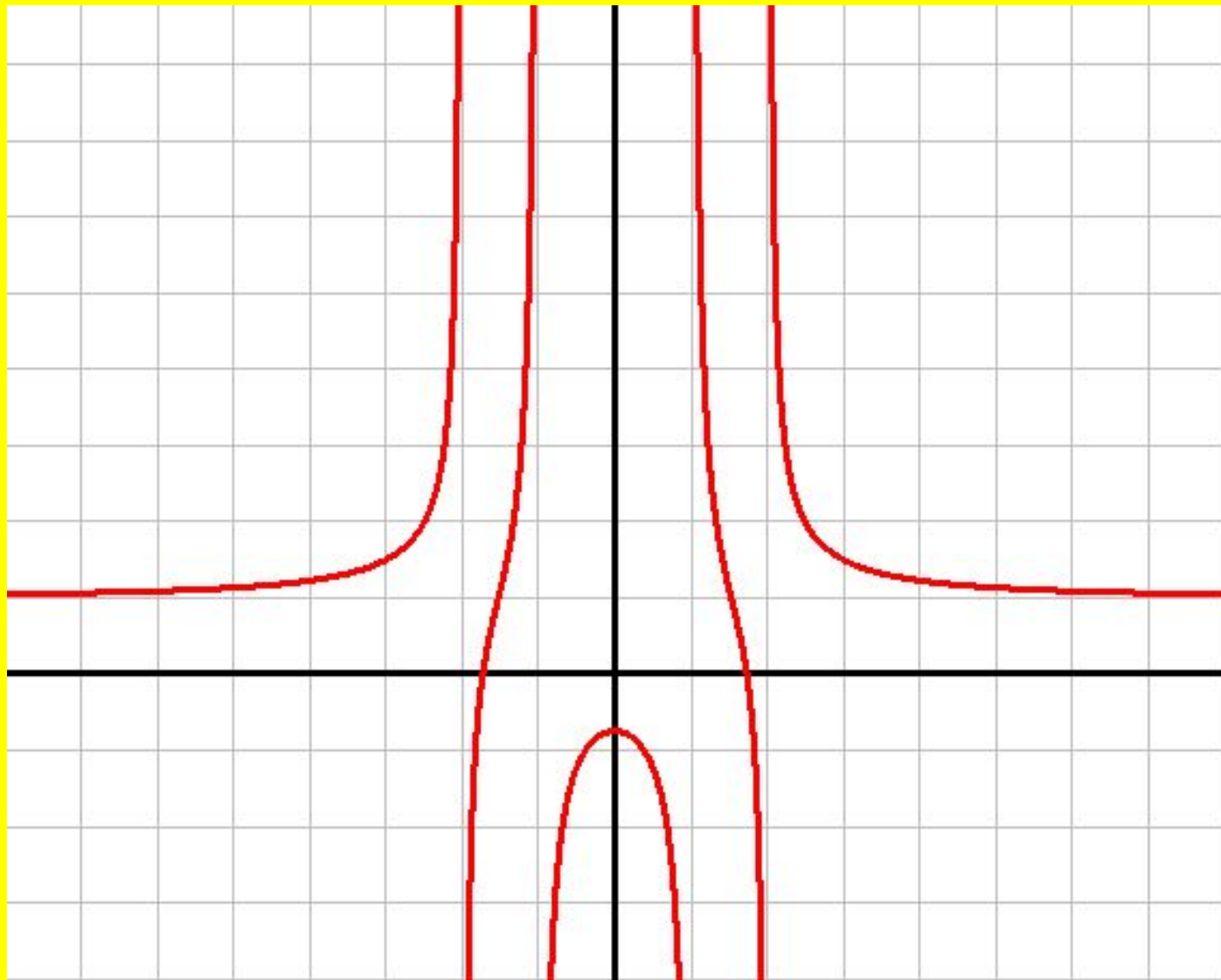
## Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$$



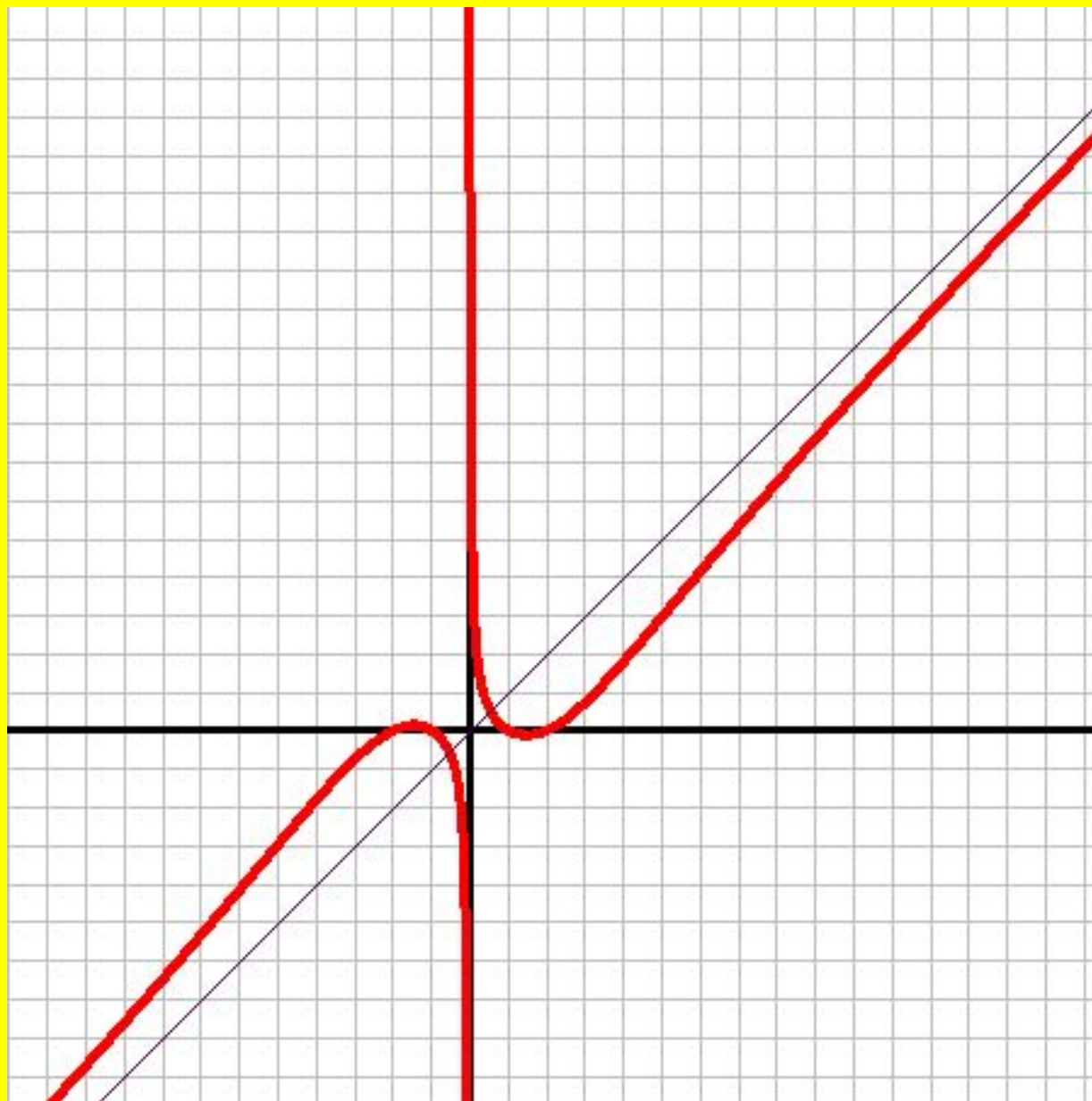
## Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$



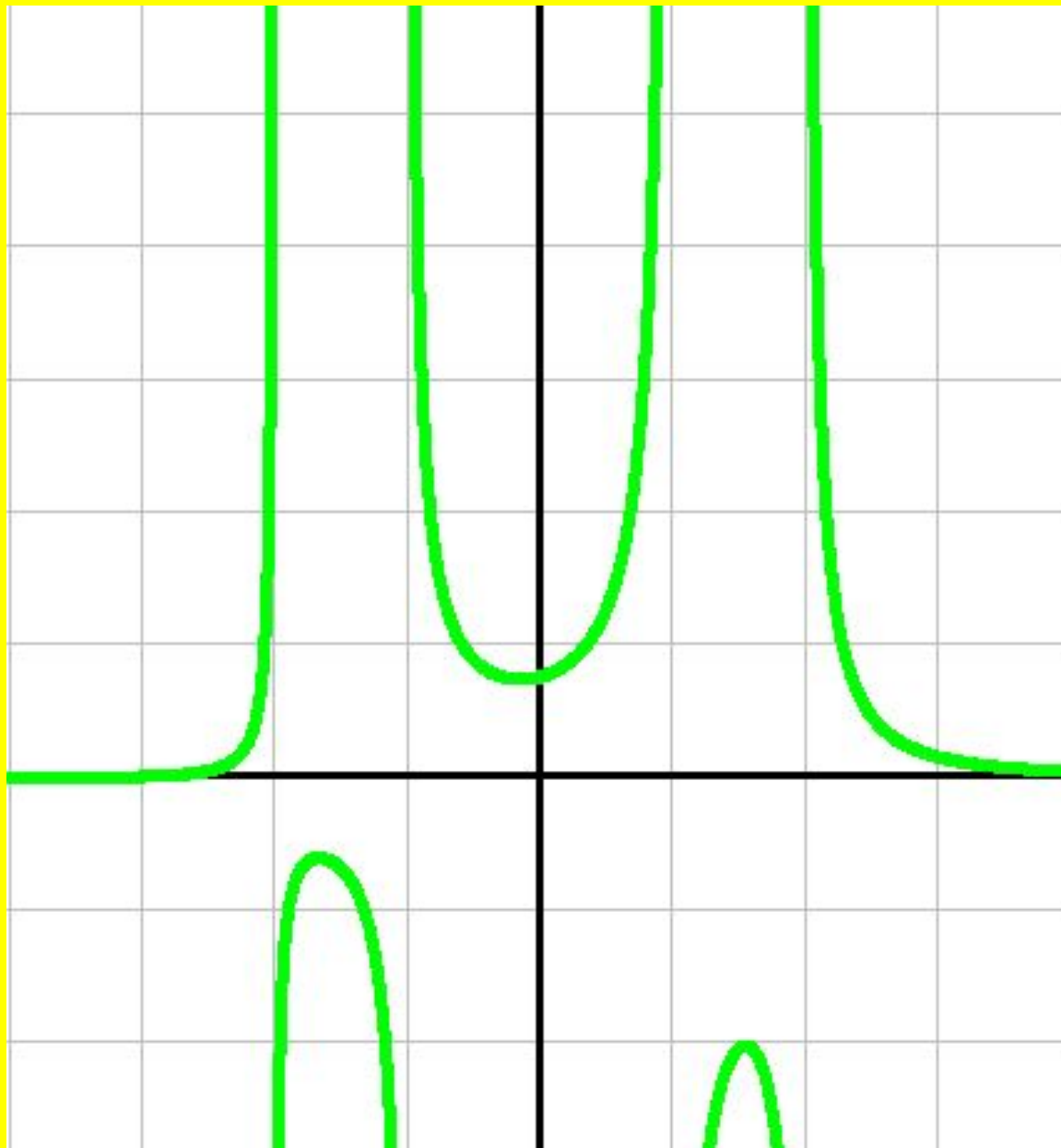
## Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 9x}$$



## Задачи для самостоятельного решения

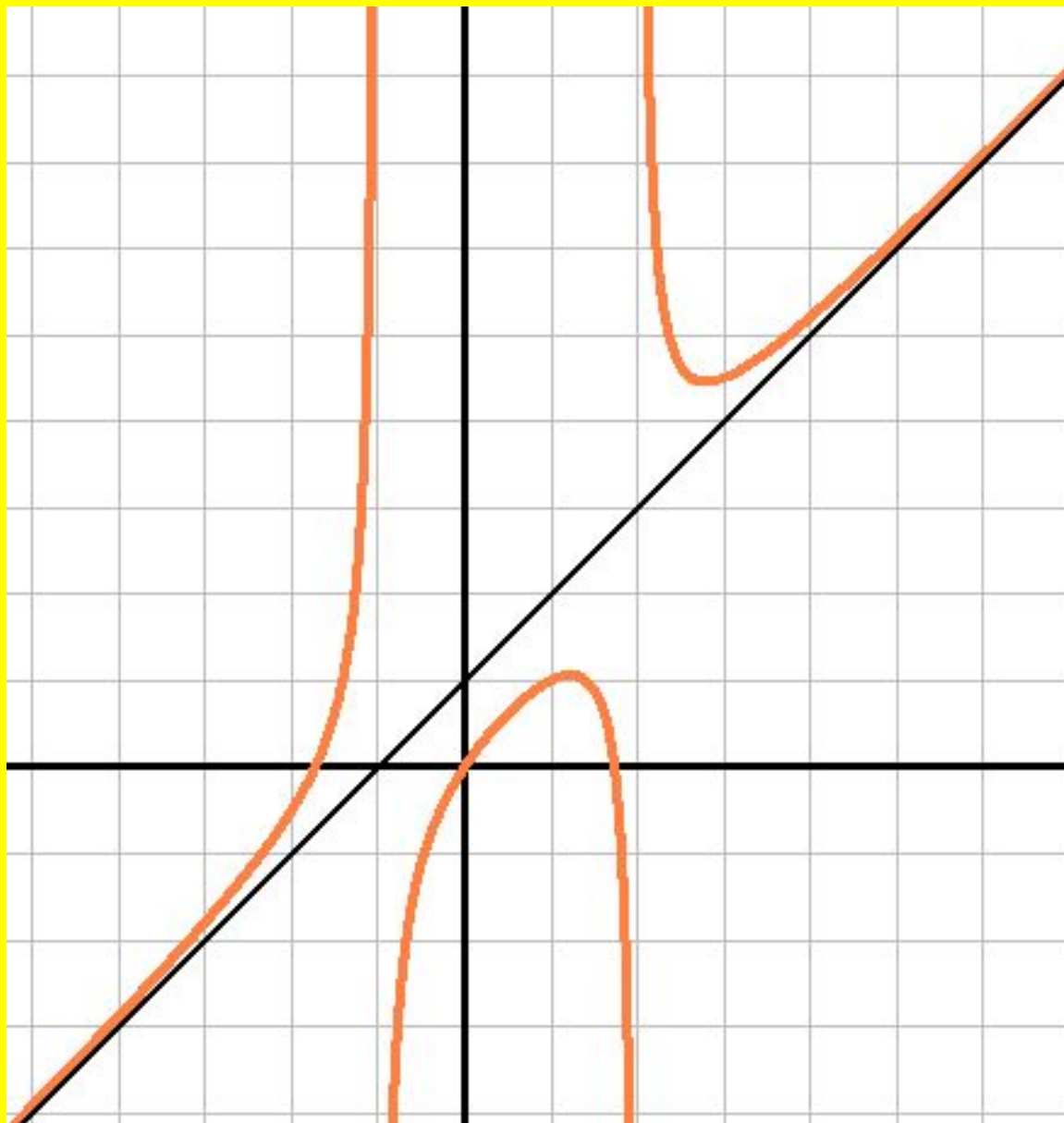
$$y = \frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$





## Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - x - 2}$$



Литература:

1. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», М. «Просвещение» 2010
2. А.Х.Шахмейстер «Построение графиков функции элементарными методами», Издательство Московского университета, МЦНМО, 2003