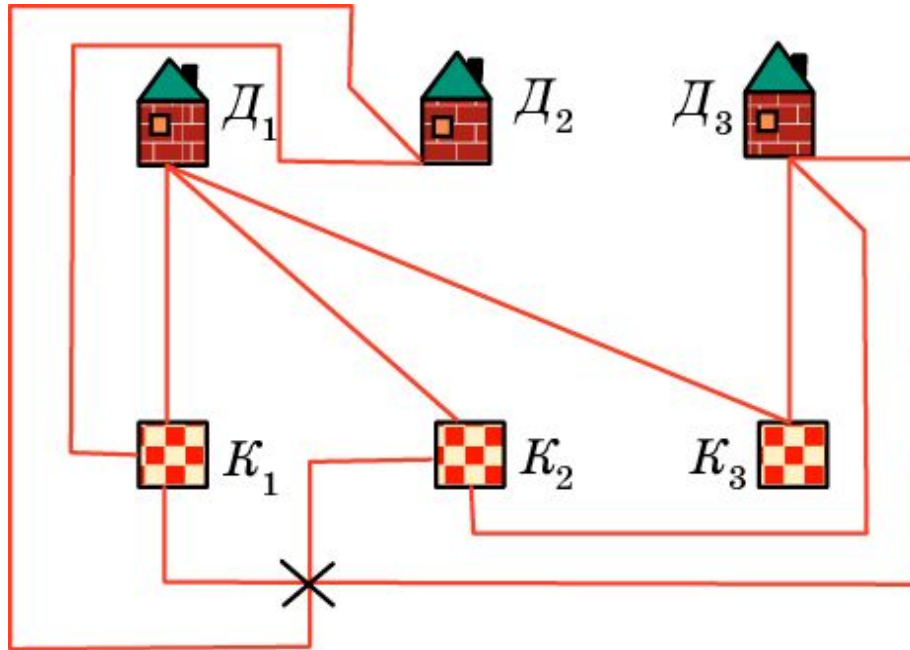


Задача Эйлера

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

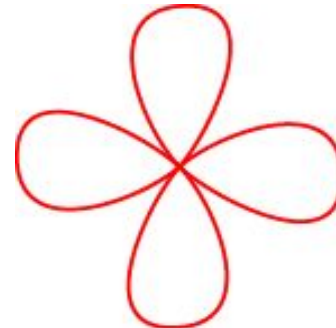
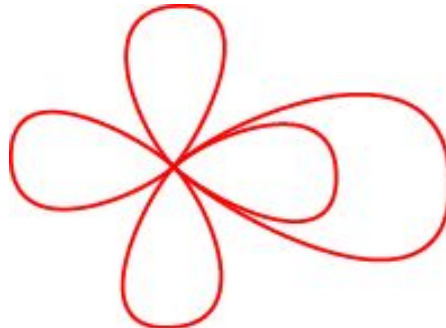
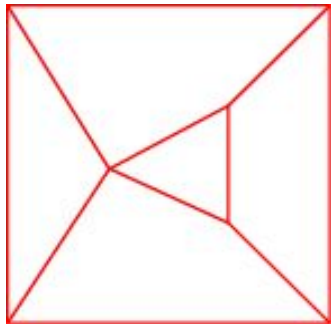
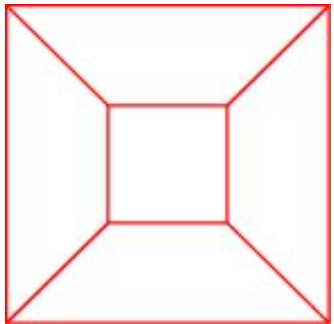


То, что не получилось на рисунке, не является доказательством невозможности соединения дорожками домиков и колодцев. Для доказательства воспользуемся следующей теоремой Эйлера.

Теорема Эйлера

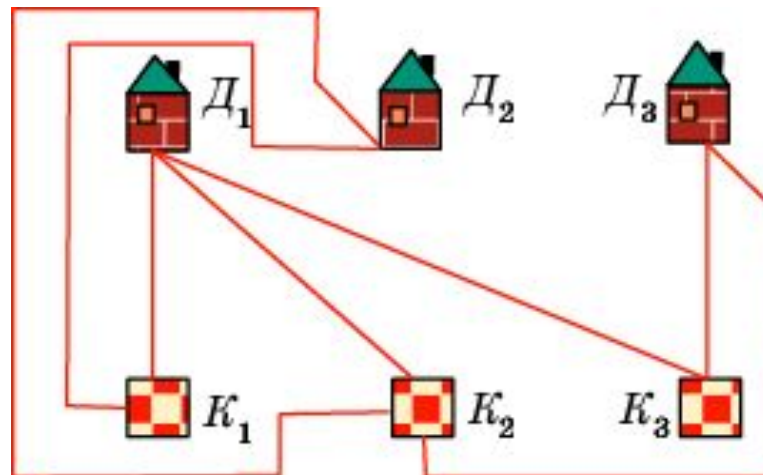
Теорема. Для связного простого графа имеет место равенство $V - P + \Gamma = 2$, где V - число вершин, P - общее число ребер, Γ - число областей (граней), на которые граф разбивает плоскость.

Доказательство. Стянем какое-нибудь ребро графа, соединяющее две вершины, в точку. При этом число ребер и число вершин уменьшатся на единицу и, следовательно, $V - P + \Gamma$ не изменится. Продолжая стягивать ребра, мы придем к графу, у которого имеется одна вершина, а ребрами являются петли. Уберем какое-нибудь ребро. При этом число ребер и число областей уменьшатся на единицу и, следовательно, $V - P + \Gamma$ не изменится. Продолжая убирать ребра, мы придем к графу, у которого имеется одна вершина и одно ребро. У этого графа $V = 1$, $P = 1$, $\Gamma = 2$ и, следовательно, $V - P + \Gamma = 2$. Значит, для исходного графа также выполняется равенство $V - P + \Gamma = 2$.



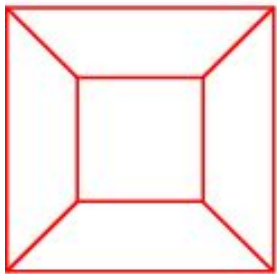
Решение задачи Эйлера

Предположим, что можно провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу. Рассмотрим граф, вершинами которого являются домики и колодцы, а ребрами – дорожки. У него $V = 6$, $P = 9$ и, следовательно, $\Gamma = 5$. Каждая из пяти областей ограничена, по крайней мере, четырьмя ребрами, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро разделяет две области, то количество ребер должно быть не меньше $(5 \cdot 4)/2 = 10$, что противоречит тому, что их число равно 9.

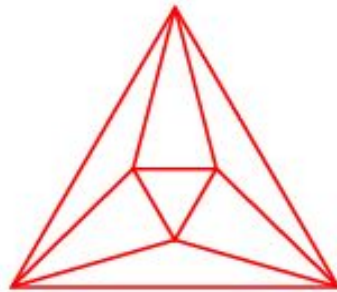


Упражнение 1

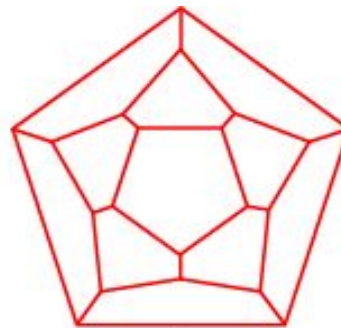
Посчитайте число вершин (V), ребер (P) и областей (Γ) для графов, изображенных на рисунке.



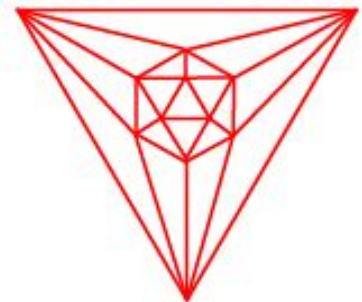
а)



б)



в)

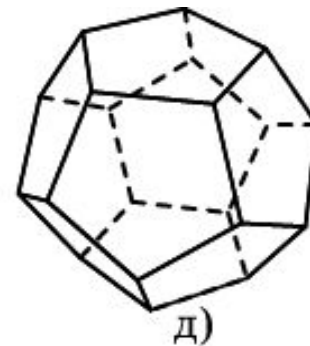
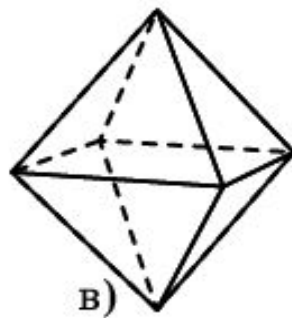
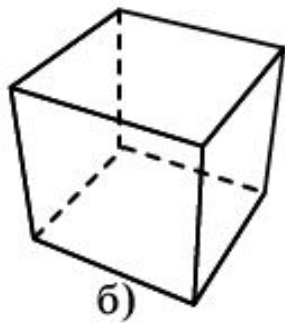
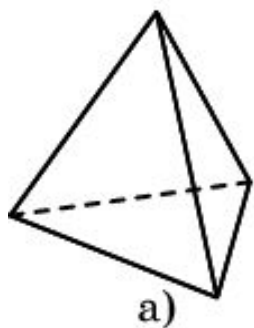


г)

Ответ: а) $V = 8$, $P = 12$, $\Gamma = 6$; б) $V = 6$, $P = 12$, $\Gamma = 8$;
в) $V = 20$, $P = 30$, $\Gamma = 12$; г) $V = 12$, $P = 30$, $\Gamma = 20$.

Упражнение 2

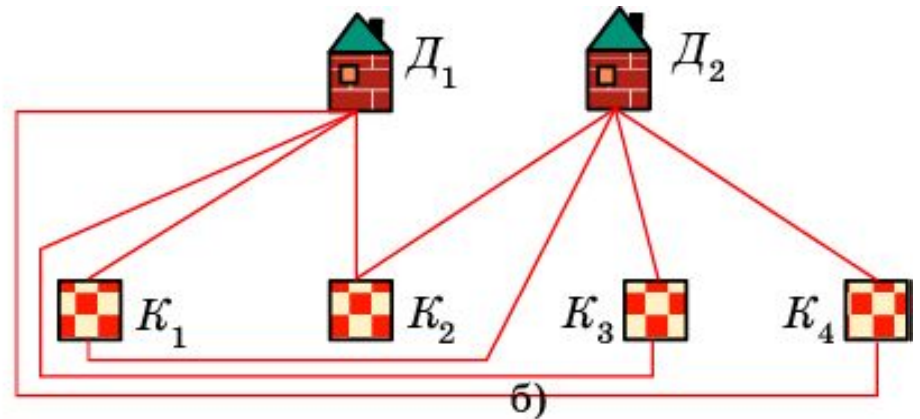
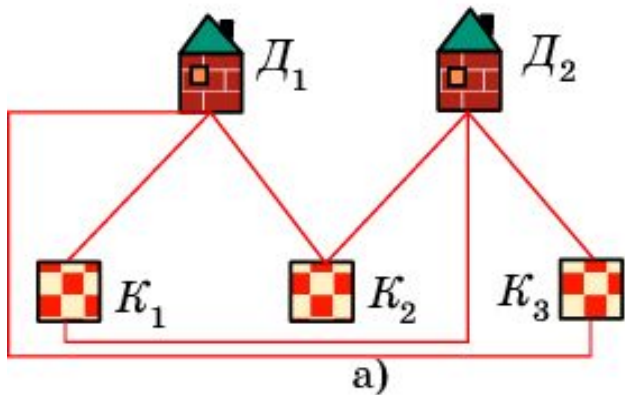
Посчитайте число вершин (V), ребер (P) и граней (Γ) для многогранников, изображенных на рисунке. Чему равно $V - P + \Gamma$?



Ответ: а) $V = 4$, $P = 6$, $\Gamma = 4$; б) $V = 8$, $P = 12$, $\Gamma = 6$; в) $V = 6$, $P = 12$, $\Gamma = 8$; г) $V = 20$, $P = 30$, $\Gamma = 12$; д) $V = 12$, $P = 30$, $\Gamma = 20$.

Упражнение 3

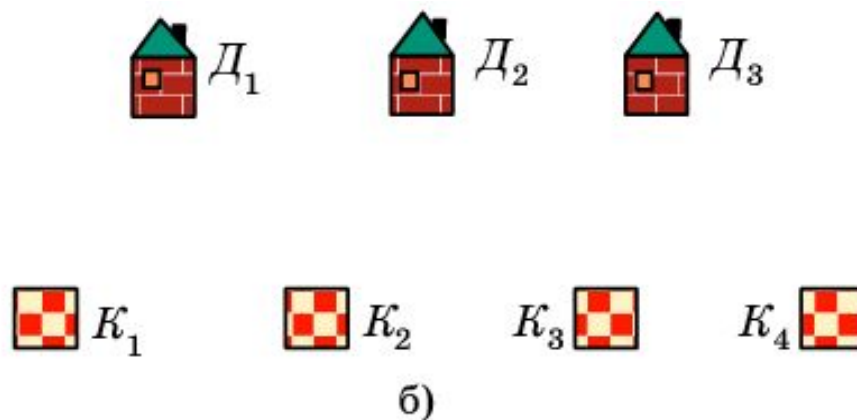
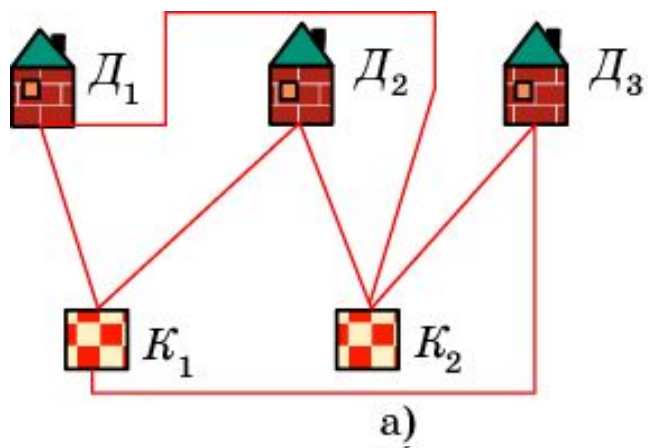
Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Ответ: а), б) Да.

Упражнение 4

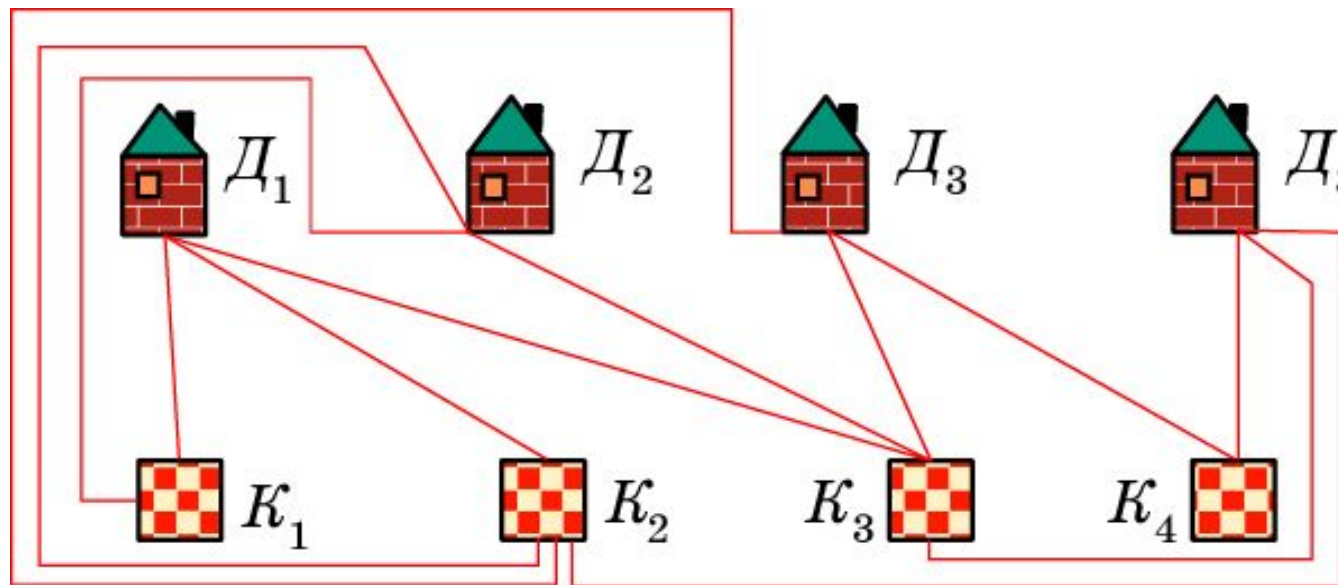
Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Ответ: а) Да; б) нет.

Упражнение 5

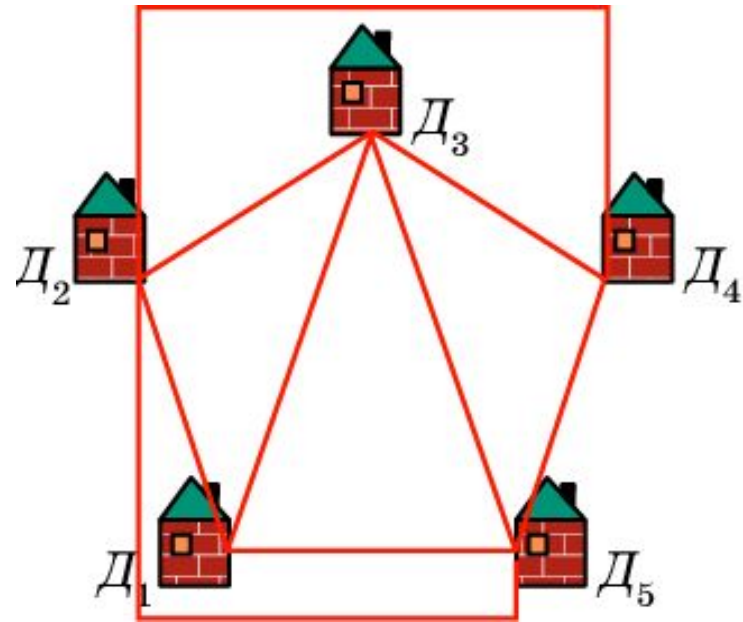
Четыре соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами?



Ответ: Да.

Упражнение 6

Докажите, что пять домиков нельзя соединить непересекающимися дорожками так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами?



Предположим, что это сделать можно. Тогда мы имеем связный простой граф, у которого $V = 5$, $P = 10$ и, следовательно, $\Gamma = 7$. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере тремя ребрами, то число ребер должно быть больше или равно $\frac{7 \cdot 3}{2} > 10$. Противоречие.