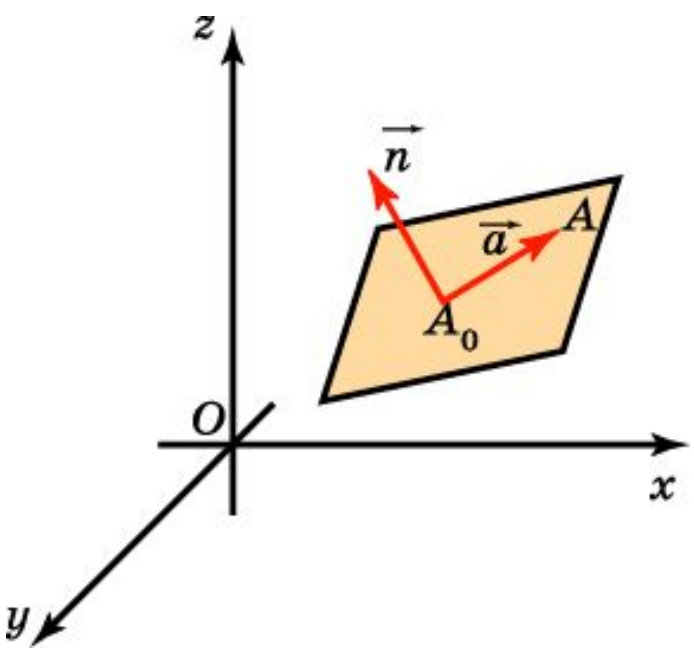
Уравнение плоскости в пространстве

Теорема. Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d - действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого вектором нормали.



Угол между двумя пересекающимися плоскостями, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ можно найти, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Упражнение 1

Дана плоскость: а) $5x-y-1=0$; б) $3x+18z-6=0$; в) $15x+y-8z+14=0$; г) $x-3y+15z=0$. Назовите координаты вектора нормали.

Ответ: а) (5, -1, 0); б) (3, 0, 18); в) (15, 1, -8); г) (1, -3, 15).

Упражнение 2

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2, 1)$, с вектором нормали, имеющим координаты: а) (0, -5, 2); б) (6, -1, 3); в) (-4, -2, -1); г) (-3, -8, 0).

Ответ: а) $-5y+2z+8=0$;

б) $6x-y+3z+5=0$;

в) $-4x-2y-z+1=0$;

г) $-3x-8y+13=0$.

Упражнение 3

В каком случае два уравнения $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ задают: а) одну плоскость; б) две параллельные плоскости?

Ответ: а) Если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$, $d_2=td_1$;

б) Если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$ и неравенство $d_2 \neq td_1$;

Упражнение 4

В каком случае две плоскости, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, перпендикулярны?

Ответ: Если выполняется равенство $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Упражнение 5

Найдите уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Ответ: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Упражнение 6

Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

Ответ: $x = 1,\ \ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{1}{3}.$

Упражнение 7

Точка $H(-2, 4, -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

Ответ: $2x-4y+z+21=0$.

Упражнение 8

Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку M (1,-2,4) и параллельна координатной плоскости Oxz; б) проходит через точку M (0,2,0) и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки A(3,0,0), B(0,3,0) и параллельна оси аппликат.

Ответ: а) $y=-2$; б) $y=2$; в) $x+y=3$.

Упражнение 9

Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;

б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;

в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;

г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

Ответ: а), в).

Упражнение 10

Как расположены относительно друг друга следующие плоскости: а) $5x-y+7z-8=0$ и $5x-2y+14z-16=0$; б) $x-y+z=0$ и $-6x+12y-24z=0$; в) $15x+9y-30z+12=0$ и $-10x-6y+20z-8=0$; г) $-2x-2y+4z+14=0$ и $3x+3y-6z+21=0$?

Ответ: а) Пересекаются; б) пересекаются;

в) совпадают; г) параллельны.

Упражнение 11

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,3,-1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.

Ответ: а) $3x+y-z-7=0$; б) $x-y+5z+7=0$.

Упражнение 12

Перпендикулярны ли плоскости: а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$; б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

Ответ: а) Да; б) нет.

Упражнение 13

Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями: а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$; б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Ответ: а) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; б) $\cos\varphi = \frac{16}{21}$.

Упражнение 14

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) A (1,0,0), B (0,1,0) и C (0,0,1); б) M(3,-1,2), N(4,1,-1) и K(2,0,1).

Ответ: а) $x+y+z-1=0$; б) $x+4y+3z-5=0$.

Упражнение 15

Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

Ответ: а) $ax+by-cz+d=0$, $ax-by+cz+d=0$, $-ax+by+cz+d=0$;

б) $ax-by-cz+d=0$, $-ax+by-cz+d=0$, $-ax-by+cz+d=0$; в) $-ax-by-cz+d=0$.

Упражнение 16

Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: а) $2x - 2y + z - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Ответ: а) 2; б) 2.

Упражнение 17

Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке с координатами: а) (0,3,0); б) (2,-2,1).

Ответ: а) $y=3$; б) $2x-2y+z-9=0$.