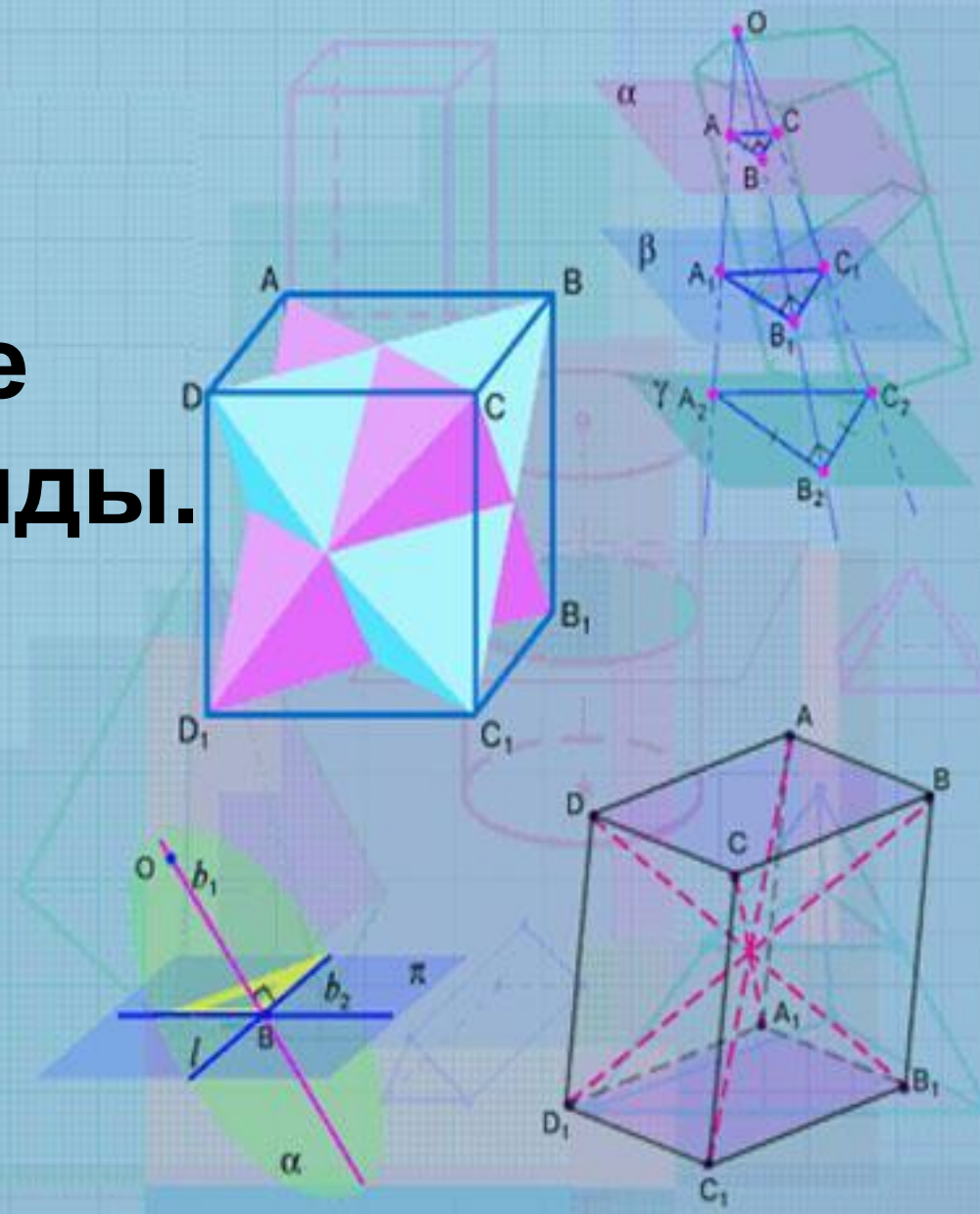


# Определение призмы, пирамиды.

*Геометрия, 10 класс.*



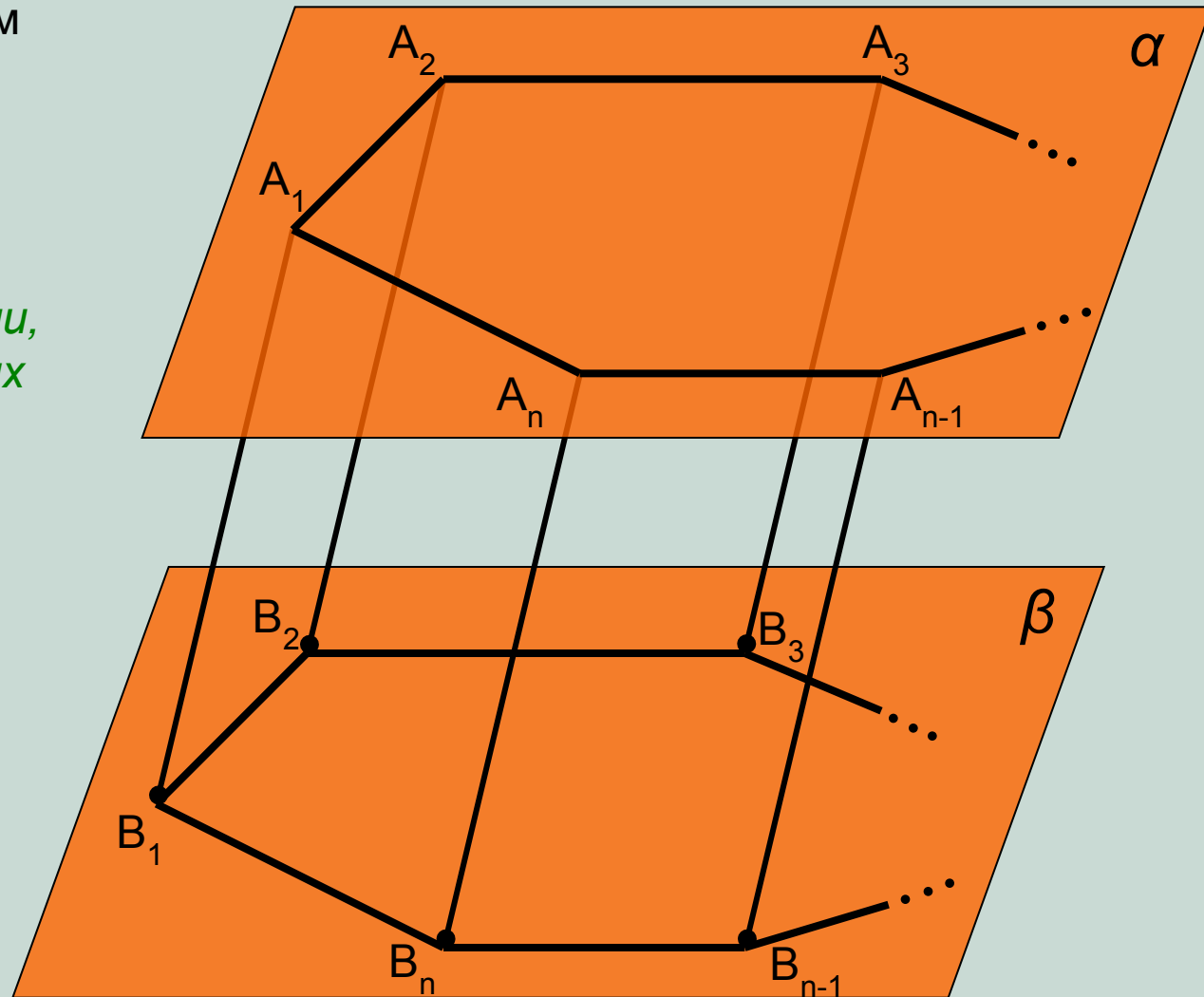
Пусть даны две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Построим в плоскости  $\alpha$  произвольный  $n$ -угольник  $A_1A_2\dots A_n$ .

Через его вершины проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\beta$  в соответствующих точках  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Соединив последовательно полученные точки получим  $n$ -угольник  $B_1B_2\dots B_n$ .

*Многогранник,  
образованный двумя  
равными многоугольниками,  
лежащими в параллельных  
плоскостях и  $n$   
параллелограммами  
является  $n$ -угольной  
призмой.*

Обозначается призма  
перечислением всех точек,  
участвующих в ее  
построении, в нашем  
случае:  $A_1A_2\dots A_n B_1B_2\dots B_n$ .



Многоугольники  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$  называются **основаниями** призмы (или верхней и нижней гранями  $n$ -угольной призмы).

Параллелограммы  $A_1B_1B_nA_n$ ,  $A_1B_1B_2A_2$ ,  $\dots$ ,  $A_nB_nB_{n-1}A_{n-1}$  – **боковые грани** призмы.

Параллельные и равные между собой отрезки  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2, \dots, A_nB_n$  – **боковые ребра** призмы.

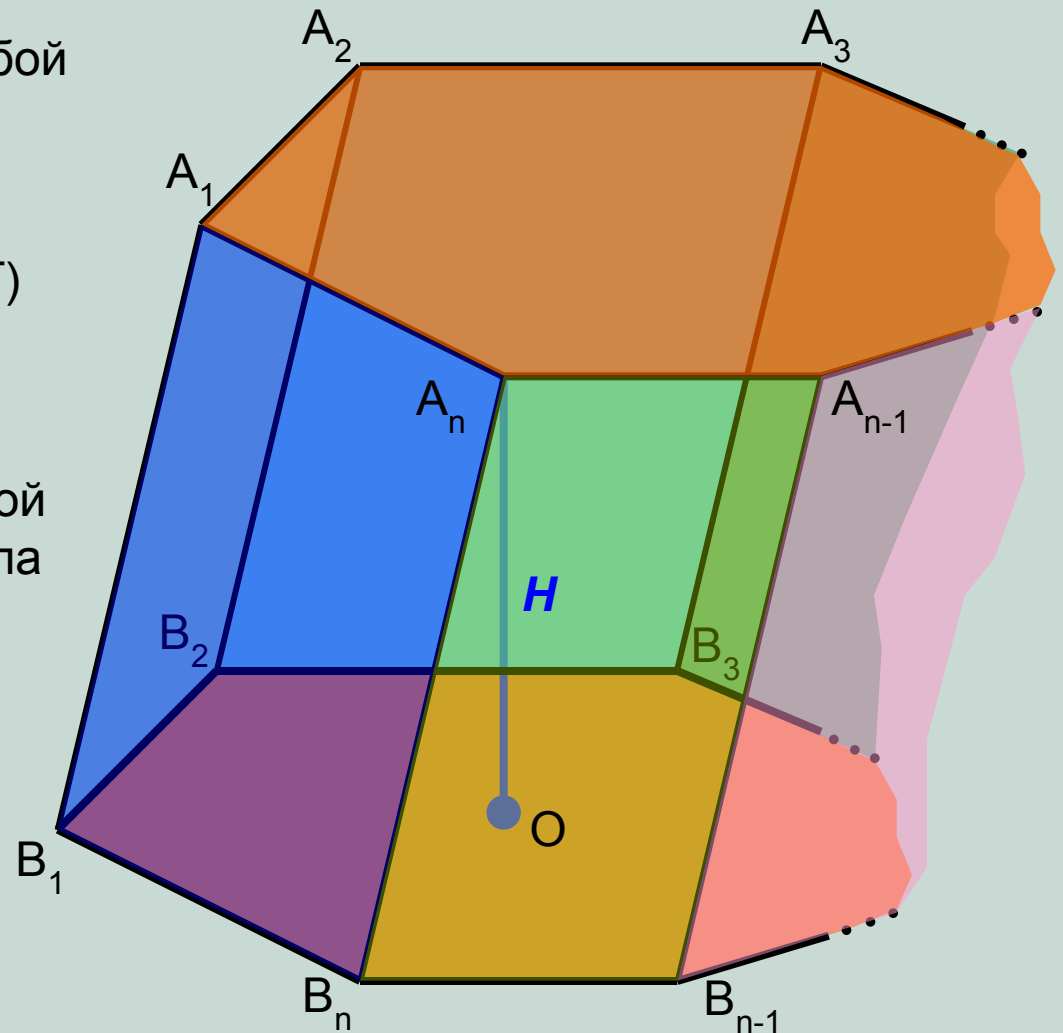
Можно установить, что для любой  $n$ -угольной призмы:

- 1) количество вершин –  $2n$ ; ( $V$ )
- 2) количество граней –  $(n+2)$ ; ( $\Gamma$ )
- 3) количество ребер –  $3n$ ; ( $P$ )

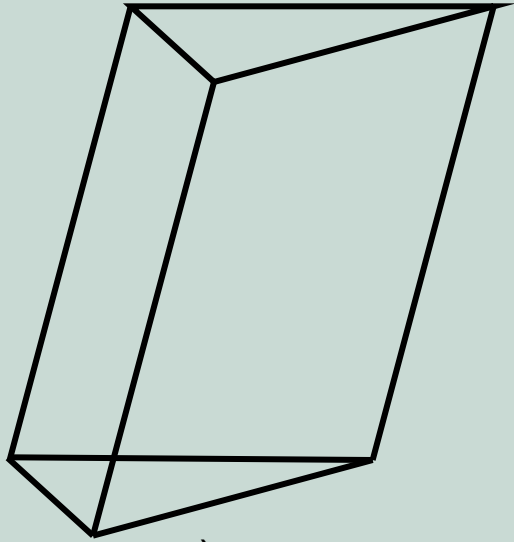
и поэтому, как для любого многогранника, для  $n$ -угольной призмы выполняется формула Эйлера:

$$V + \Gamma - P = 2.$$

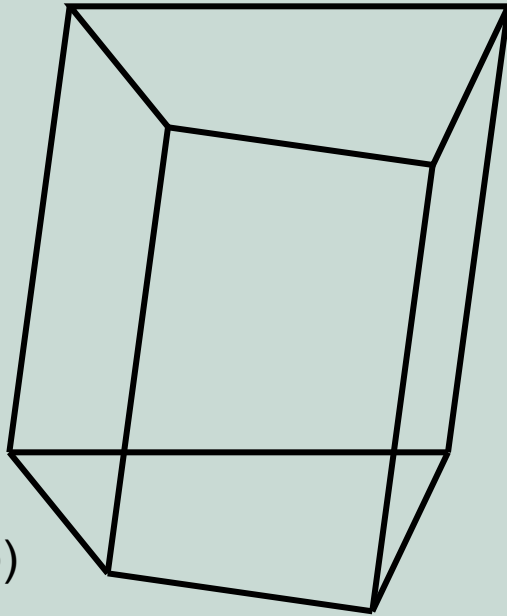
Отрезок  $A_nO \perp (B_1B_2B_3)$  – **высота** призмы.



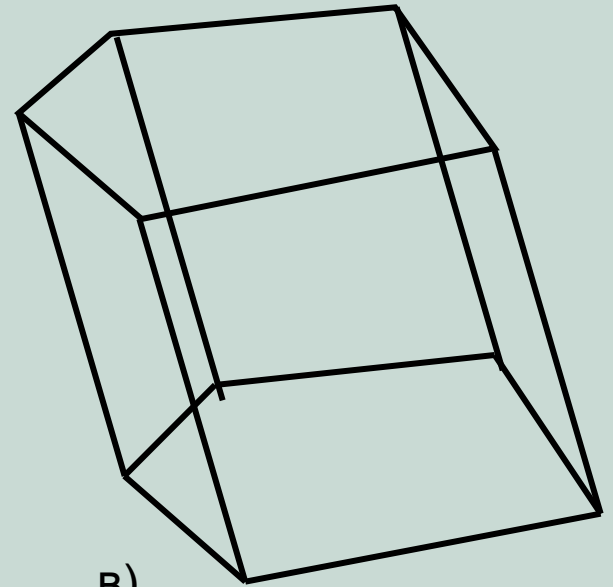
Название призмы определяется количеством сторон в основании фигуры. Например, на рисунке представлены треугольная (а), четырехугольная (б), пятиугольная (в), шестиугольная (г) и семиугольная (д) призмы:



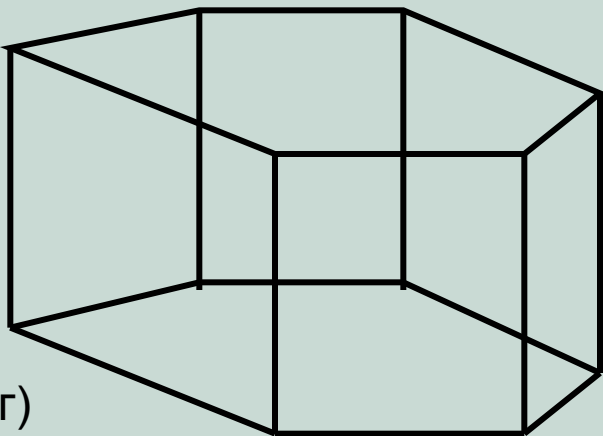
а)



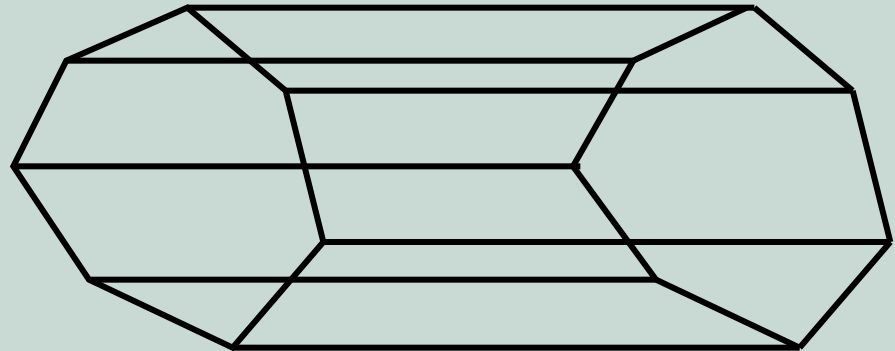
б)



в)



г)



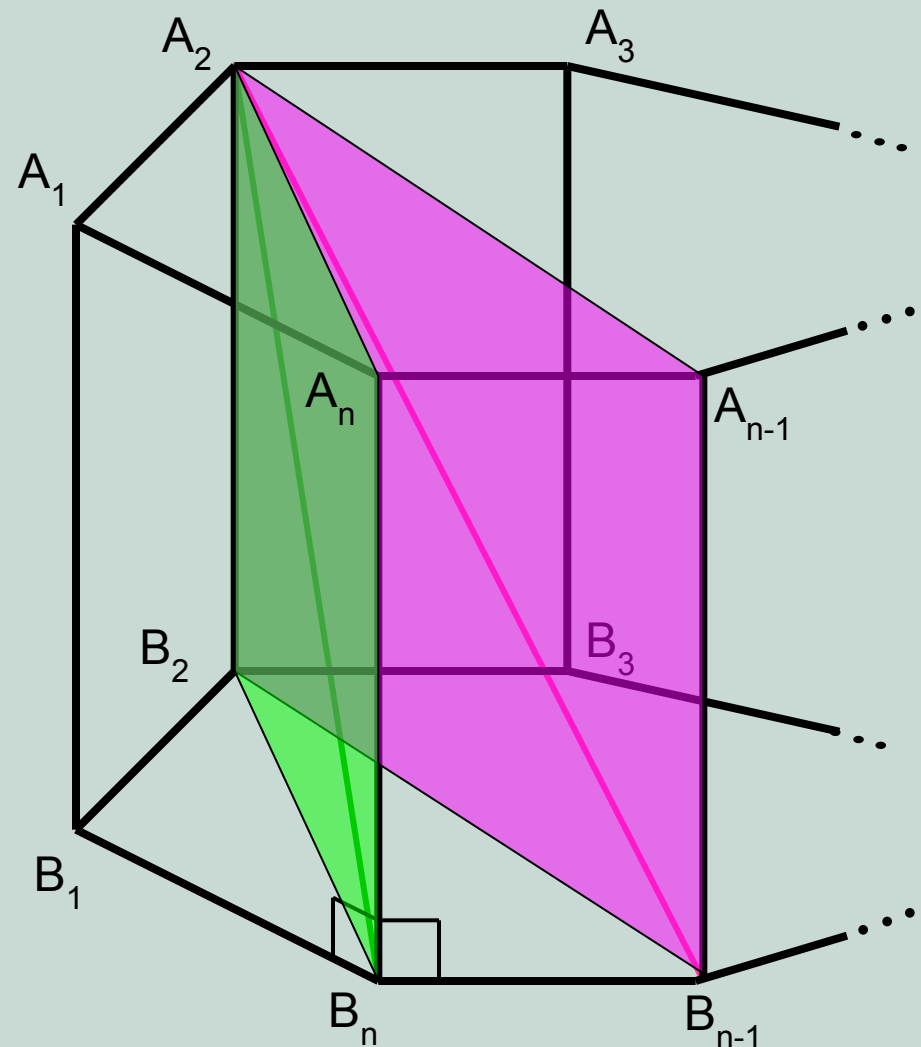
д)

Призма называется **прямой**, если боковое ребро перпендикулярно плоскости основания ( $A_n B_n \perp (A_1 A_2 A_3)$ ). Очевидно, что в этом случае боковые грани призмы – прямоугольники.

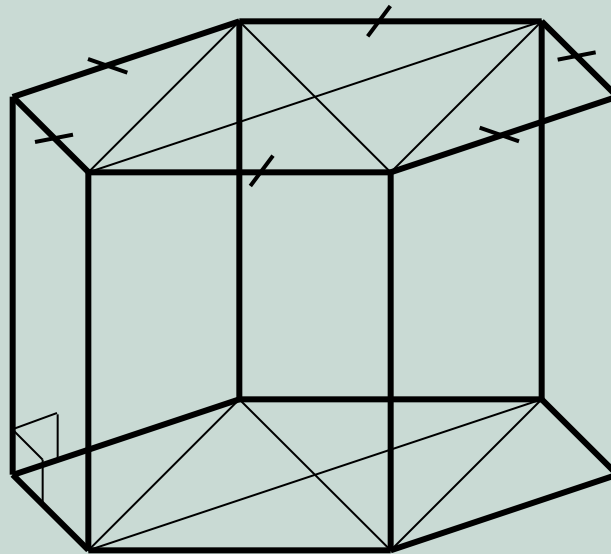
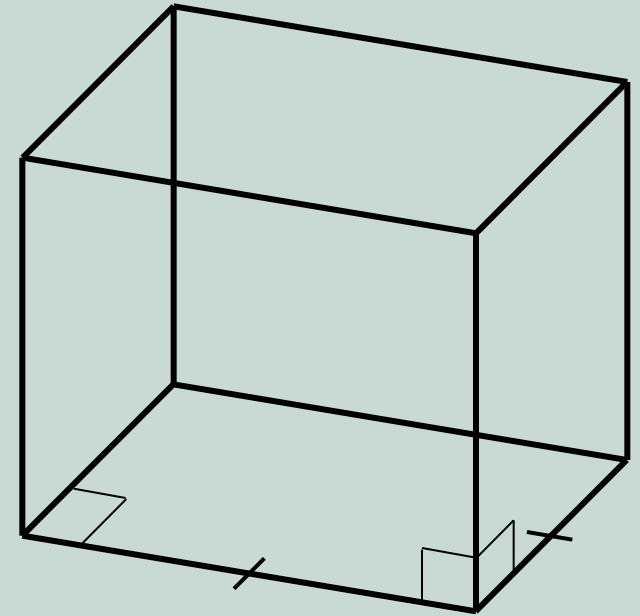
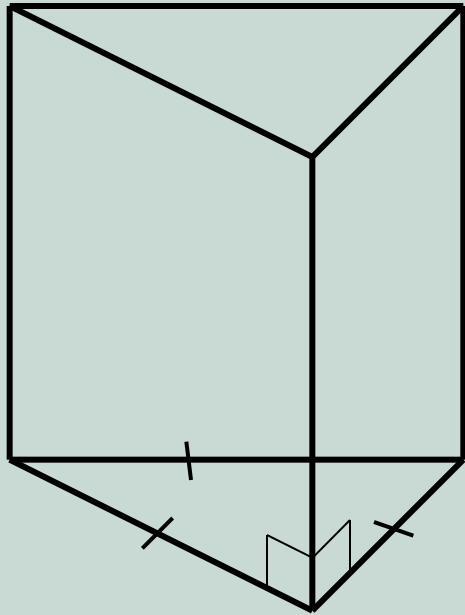
Отрезки, соединяющие точки верхнего и нижнего оснований, не лежащие в одной боковой грани, называются **диагоналями** призмы. **Задание:** сколько диагоналей в n-угольной призме?

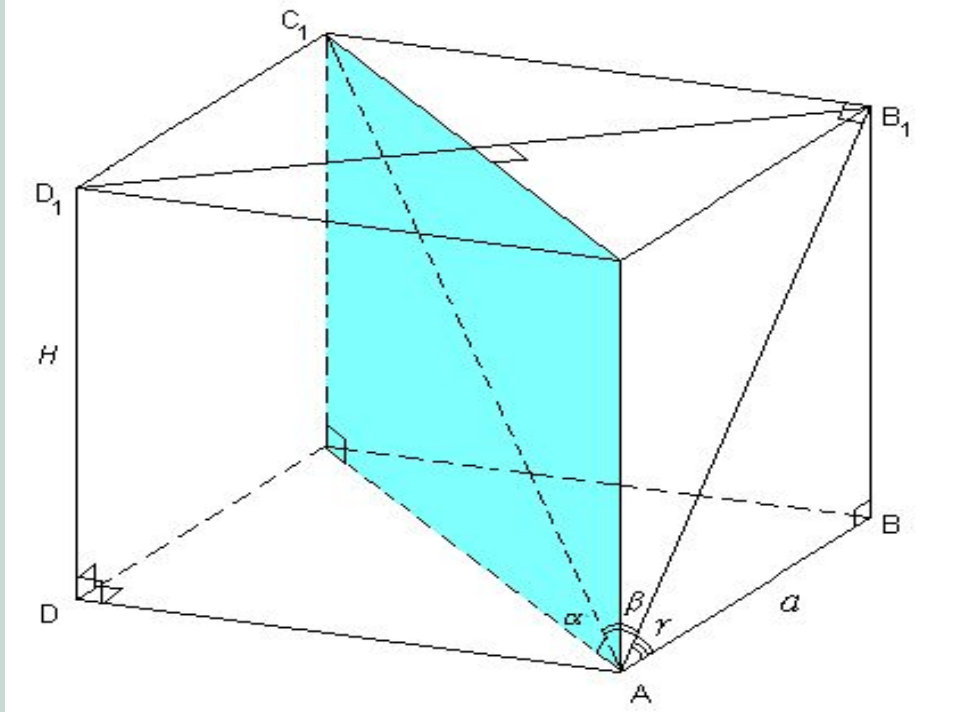
Ответ:  $n(n-3)$ .

Сечения призмы, образованные диагональю призмы и боковым ребром, называются **диагональными сечениями** призмы. В наклонной призме – это параллелограммы, в прямой призме – прямоугольники.



Призма называется *правильной*, если: 1) она прямая; и 2) её основания – правильные многоугольники. На рисунке представлены правильные а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная призмы.





### Правильная четырехугольная призма.

**Основание – правильный четырёхугольник (квадрат)**

Прямоугольник  $ACC_1A_1$  – диагональное сечение (прямоугольник)

$AA_1 = H$  - высота призмы,  $AB = a$  - сторона основания,

$AC_1$  – диагональ призмы,  $AB_1$  – диагональ боковой грани,  $AC$  – диагональ основания

$\alpha$  - угол между диагональю призмы и основанием

$\beta$  - угол между диагональю призмы и боковой гранью

$\gamma$  - угол между диагональю боковой грани и основанием

$$AC_1 = \sqrt{2a^2 + H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} = \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}$$

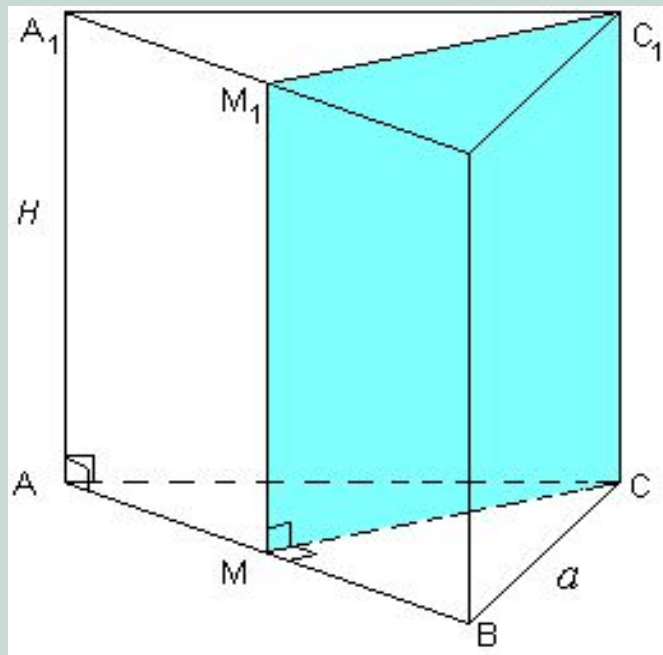
$$AC = a\sqrt{2} = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$AB_1 = \sqrt{a^2 + H^2} = \frac{a}{\cos \gamma}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2$$

$$S_{\text{бок}} = 4aH$$

$$S_{\text{полн}} = 4aH + 2a^2$$



### Правильная треугольная призма.

**Основание – правильный (равносторонний) треугольник**

**Прямоугольник  $MCC_1M_1$  – медианное сечение**

$AA_1 = H$  - высота призмы,  $AB = a$  - сторона основания,

$CM$  - высота основания  $\angle A = 60^\circ$   $\angle ACM = \angle BCM = 30^\circ$

$$S_{осн} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

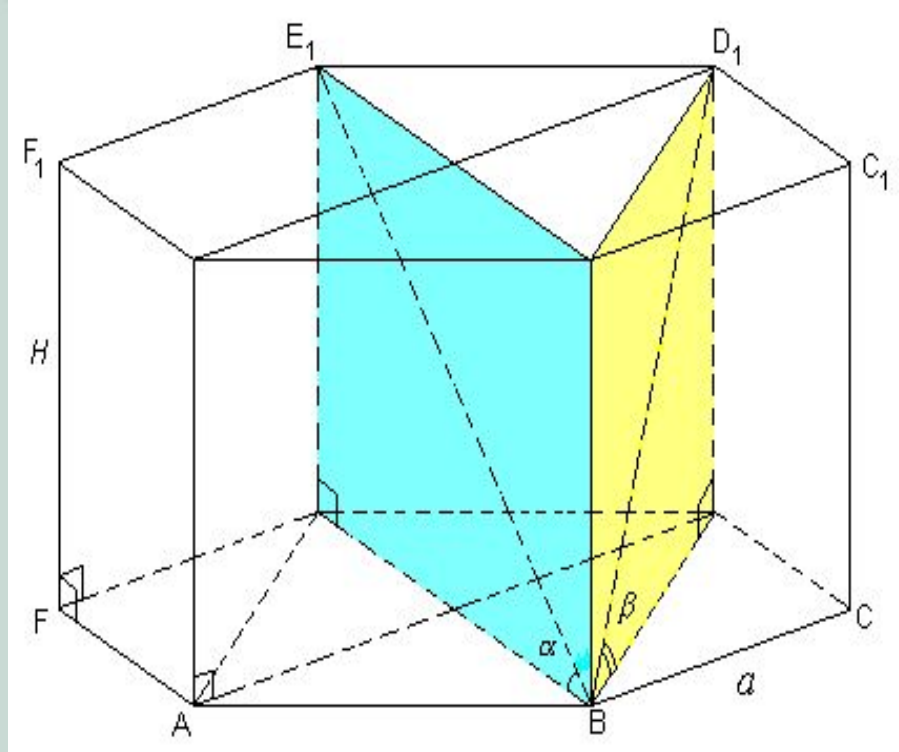
$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{бок} = 3aH$$

$$S_{полн} = 3aH + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = S_{осн} \cdot H$$





### Правильная шестиугольная призма.

**Основание – правильный шестиугольник**

Прямоугольники  $BEE_1V_1$  и  $BDD_1V_1$  – диагональные сечения

$AA_1 = H$  – высота призмы,  $AB = a$  – сторона основания,

$BE_1$  – бóльшая диагональ призмы,  $BD_1$  – мёньшая диагональ боковой грани

$BE$  – бóльшая диагональ основания,  $BD$  – мёньшая диагональ основания

$\alpha$  – угол между большей диагональю призмы и основанием

$\beta$  – угол между меньшей диагональю призмы и основанием

$$BE = 2a$$

$$BD = a\sqrt{3}$$

$$BE_1 = \sqrt{4a^2 + H^2} = \frac{2a}{\cos \alpha} = \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$BD_1 = \sqrt{3a^2 + H^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\cos \beta} = \frac{H}{\sin \beta}$$

$$S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

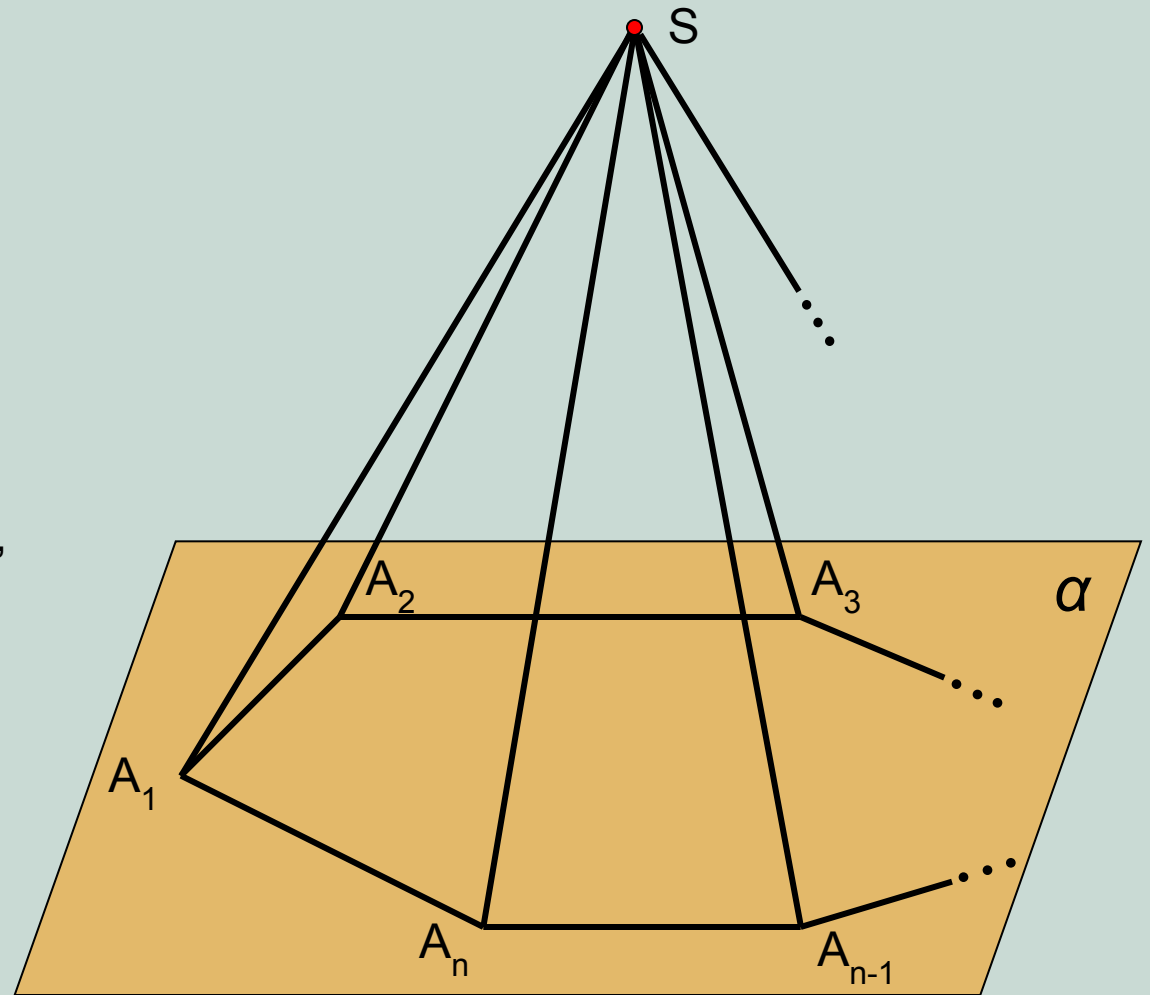
$$S_{бок} = 6aH$$

$$S_{полн} = 6aH + 3a^2\sqrt{3}$$

Построим в плоскости  $\alpha$  произвольный  $n$ -угольник  $A_1A_2\dots A_n$ .  
Выберем произвольную точку  $S$ , не принадлежащую плоскости  $\alpha$ .  
Соединим точку  $S$  со всеми вершинами  $n$ -угольника  $A_1A_2\dots A_n$ .

*Многогранник, образованный  
многоугольником и  $n$   
треугольниками с общей  
вершиной вне плоскости  
многоугольника, является  
 $n$ -угольной пирамидой.*

Обозначается пирамида  
перечислением всех точек,  
участвующих в ее построении,  
в нашем случае:  $SA_1A_2\dots A_n$ .  
Точка  $S$  называется вершиной  
пирамиды.



Многоугольник  $A_1A_2\dots A_n$  называется **основанием** пирамиды .

Треугольники  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$  – **боковые грани** пирамиды.

Отрезки  $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$  – **боковые ребра** пирамиды.

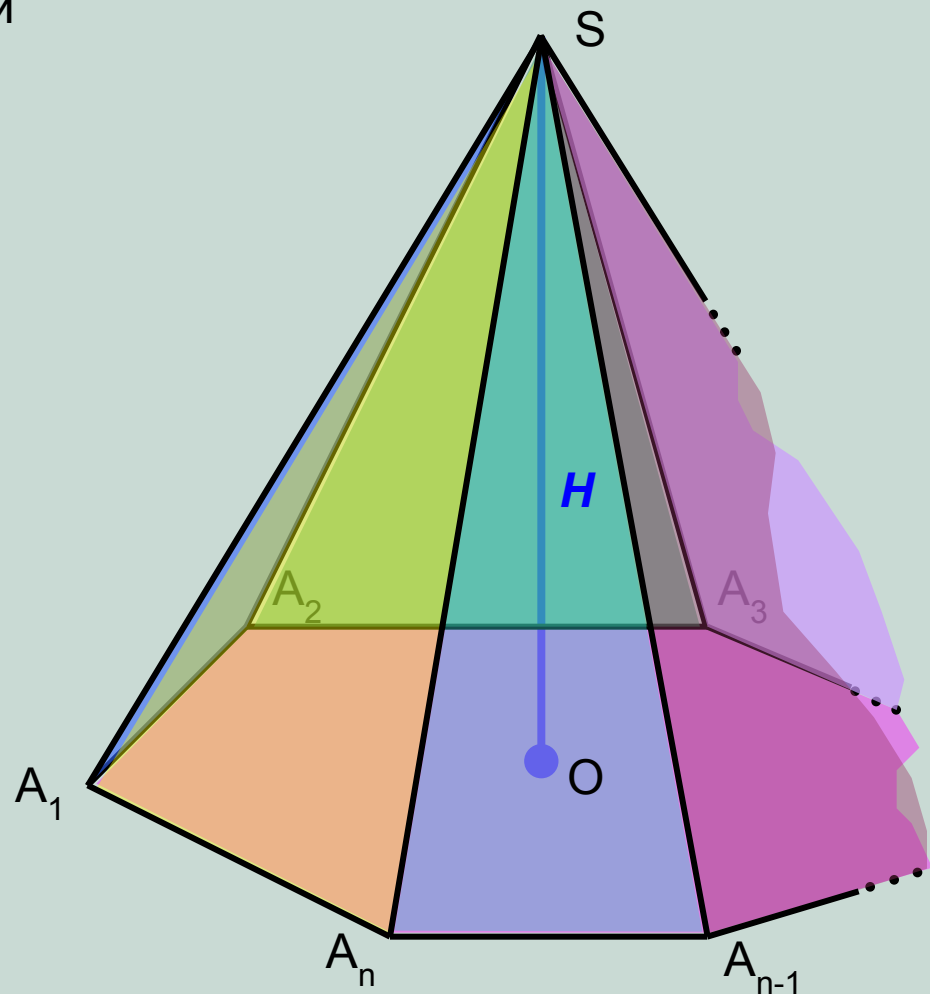
Можно установить, что для любой  $n$ -угольной пирамиды:

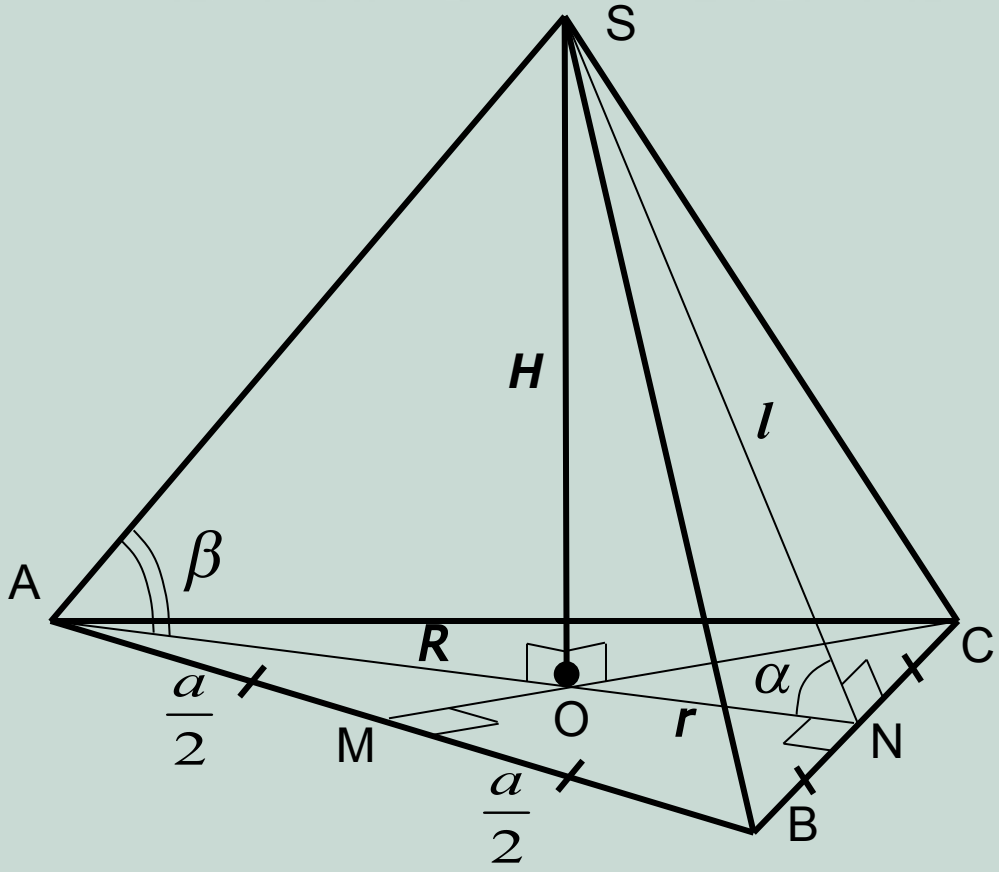
- 1) количество вершин –  $(n+1)$ ; (В)
- 2) количество граней –  $(n+1)$ ; (Г)
- 3) количество ребер –  $2n$ ; (Р)

и поэтому, как для любого многогранника, для  $n$ -угольной пирамиды выполняется формула Эйлера:

$$B + \Gamma - P = 2.$$

Отрезок  $SO \perp (A_1A_2A_3)$  – **высота** пирамиды.





**Правильная треугольная пирамида SABC**

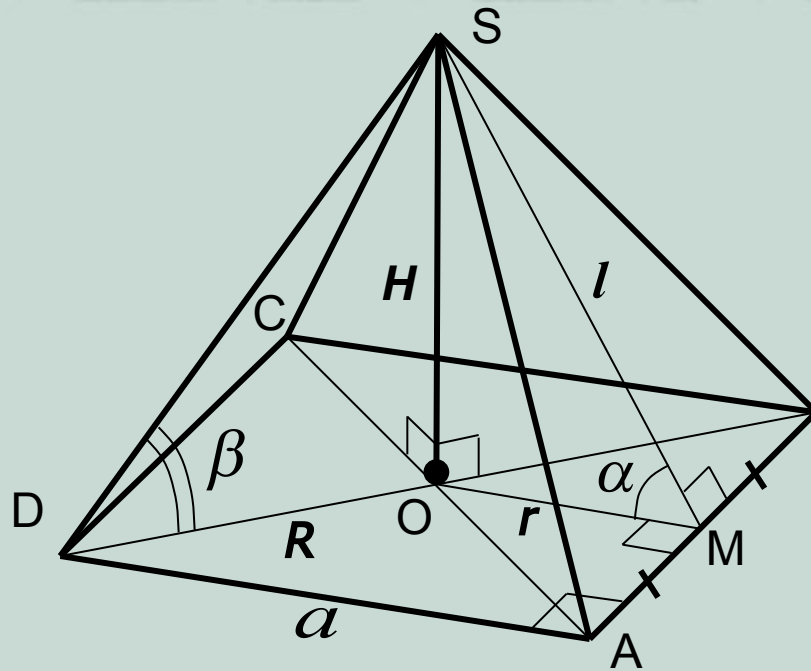
Основание – правильный (равносторонний) треугольник  $H = SO \perp (ABC)$  – высота пирамиды,  
 $O$  – центр треугольника,  $l = SN \perp BC$  – апофема (высота боковой грани)

$R = OA = OC$  – радиус описанной окружности,  $r = OM = ON$  – радиус вписанной окружности ( $AM = MB = \frac{a}{2}$ )

$\alpha$  - угол между боковой гранью и плоскостью основания,  $\beta$  - угол между боковым ребром и плоскостью основания

$$H^2 + r^2 = l^2 \quad AS = BS = CS = \sqrt{H^2 + R^2} \quad CM = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha} = l \cdot \cos\alpha$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad S_{\text{бок}} = 1,5al \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} \quad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$$



### Правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$

Основание – правильный четырёхугольник (квадрат),  $H = SO \perp (ABC)$  – высота пирамиды,

$O$  – центр квадрата,  $l = SM \perp AB$  – апофема (высота боковой грани)

$R = OA = OB = OC = OD$  – радиус описанной окружности,  $r = OM$  – радиус вписанной окружности ( $AM = MB$ )

$\alpha$  - угол между боковой гранью и плоскостью основания

$\beta$  - угол между боковым ребром и плоскостью основания

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$r = \frac{a}{2} = \sqrt{l^2 - H^2} = l \cdot \cos \alpha = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$AS = BS = CS = DS = \sqrt{H^2 + R^2}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2$$

$$S_{\text{бок}} = 2al$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 H$$

