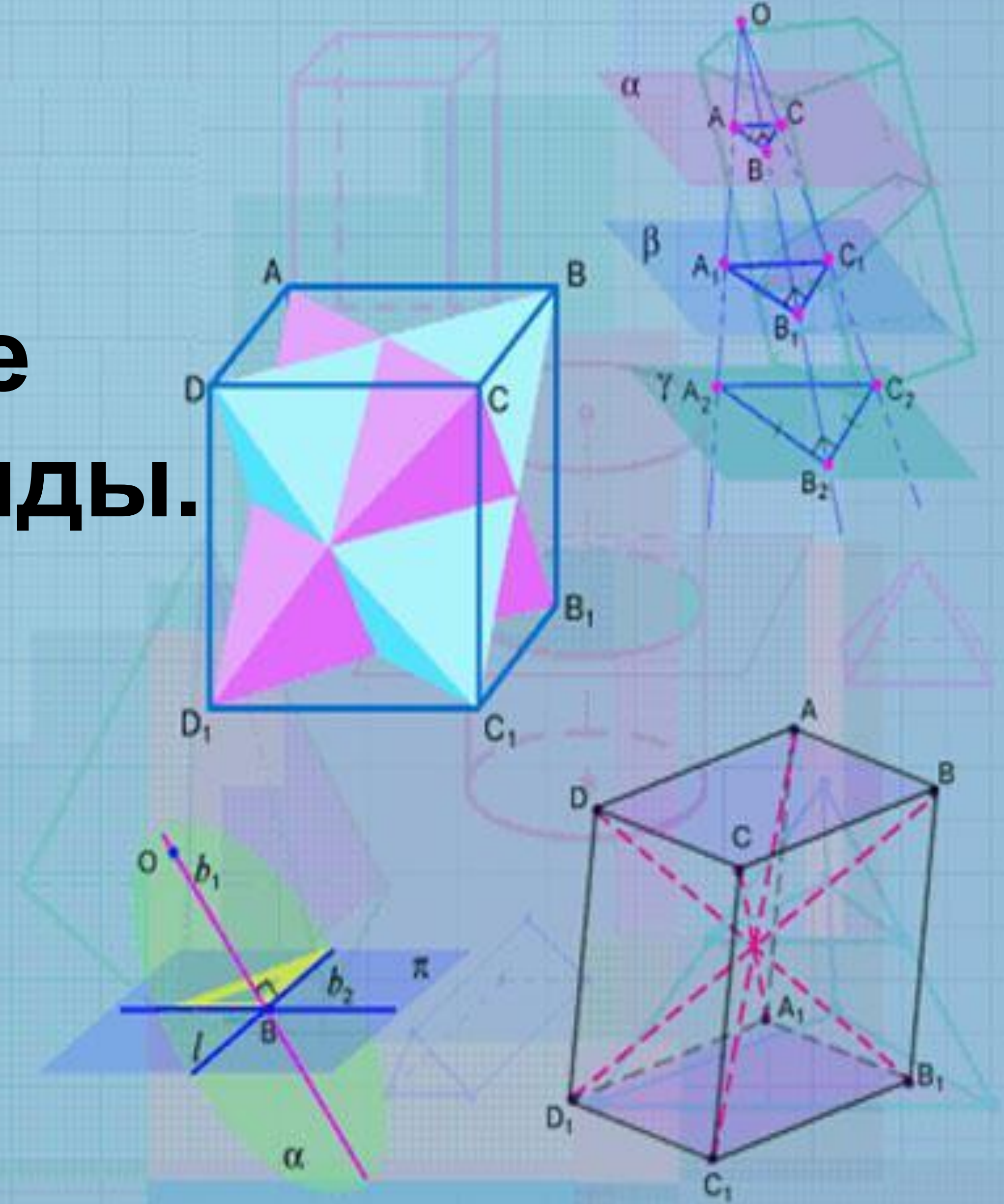
Определение призмы, пирамиды.

Геометрия, 10 класс.



Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

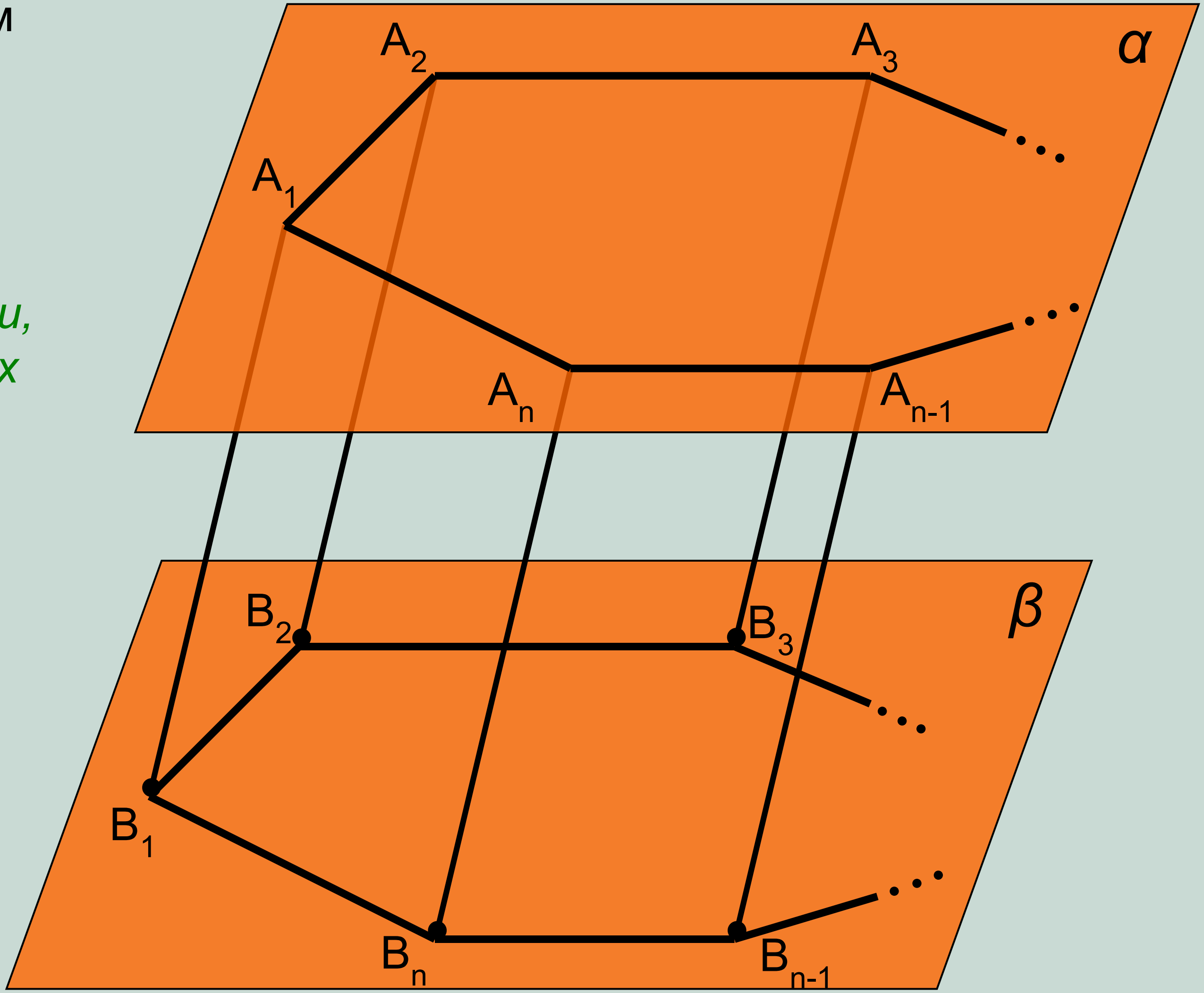
Пусть даны две параллельные плоскости α и β. Построим в плоскости α произвольный n-угольник $A_1A_2…A_n$.

Через его вершины проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость β в соответствующих точках $B_1,B_2,…,B_n$.

Соединив последовательно полученные точки получим n-угольник $B_1B_2…B_n$.

Многогранник, образованный двумя равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях и n параллелограммами является n-угольной призмой.

Обозначается призма перечислением всех точек, участвующих в ее построении , в нашем случае: $A_1A_2…A_n B_1B_2…B_n$.



Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются *основаниями* призмы (или верхней и нижней гранями n-угольной призмы).

Параллелограммы $A_1B_1B_nA_n$, $A_1B_1B_2A_2$, …,$A_nB_nB_{n-1}A_{n-1}$ – *боковые грани* призмы.

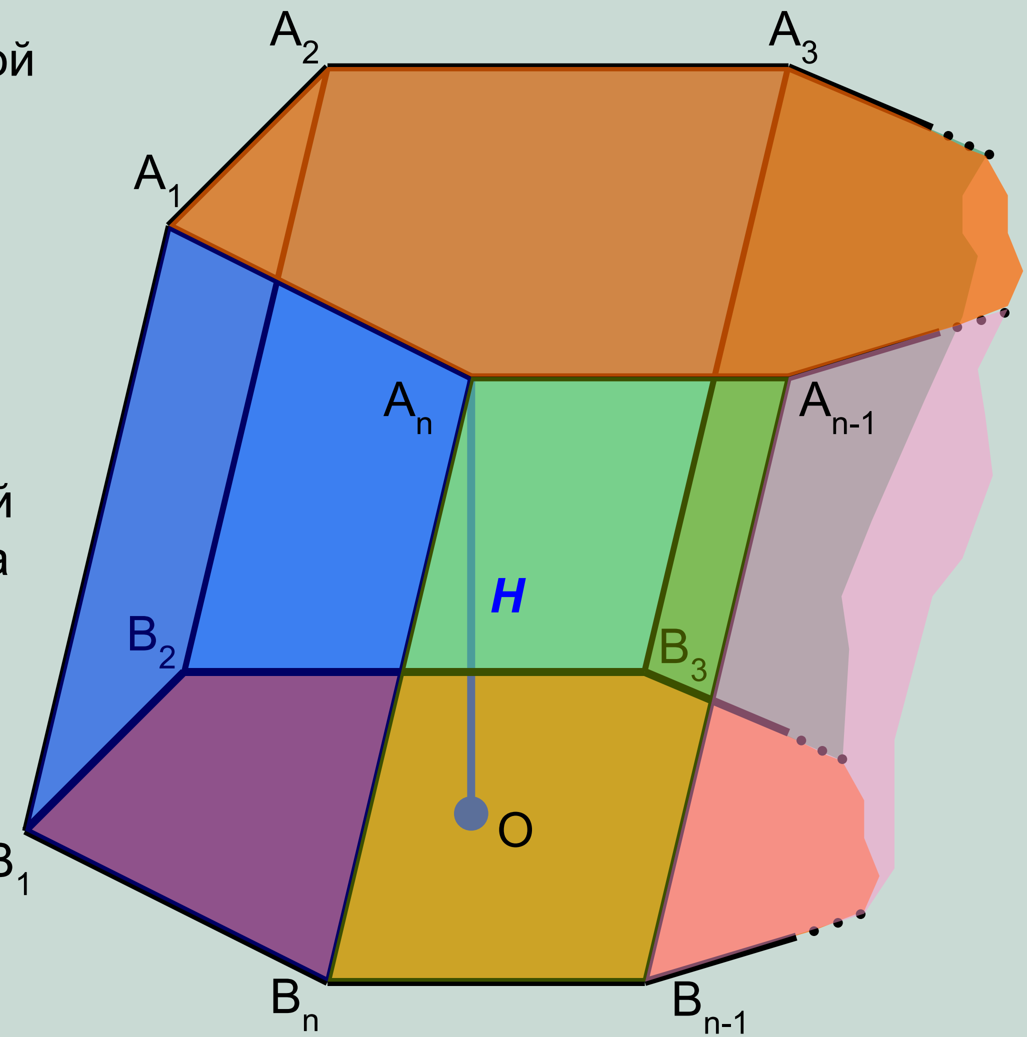
Параллельные и равные между собой отрезки A_1B_1, A_2B_2,…,A_nB_n – *боковые ребра* призмы.

Можно установить, что для любой n-угольной призмы:

1) количество вершин – 2n; (В)
2) количество граней – (n+2); (Г)
3) количество ребер – 3n; (Р)

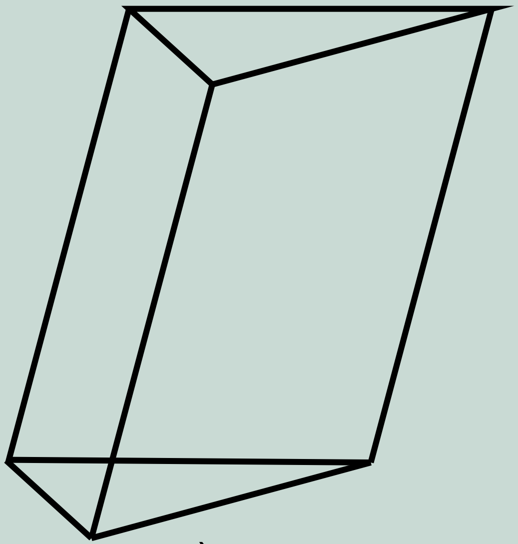
и поэтому, как для любого многогранника, для n-угольной призмы выполняется формула Эйлера:

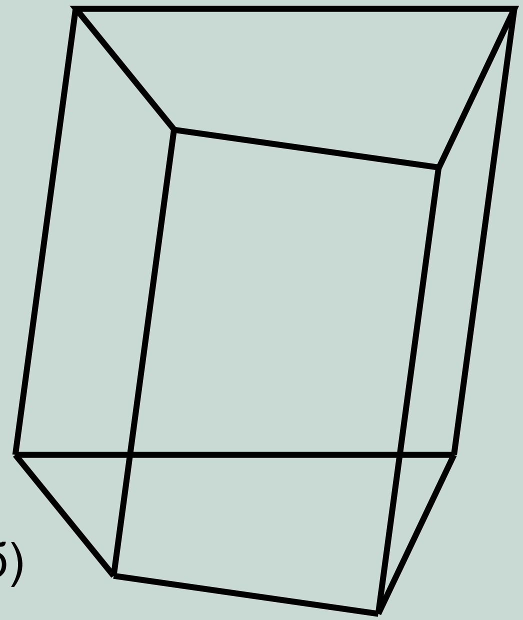
$$В+Г–Р=2.$$

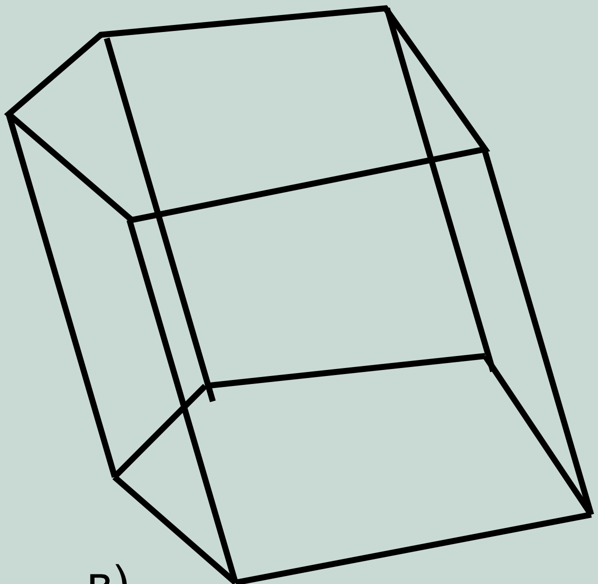


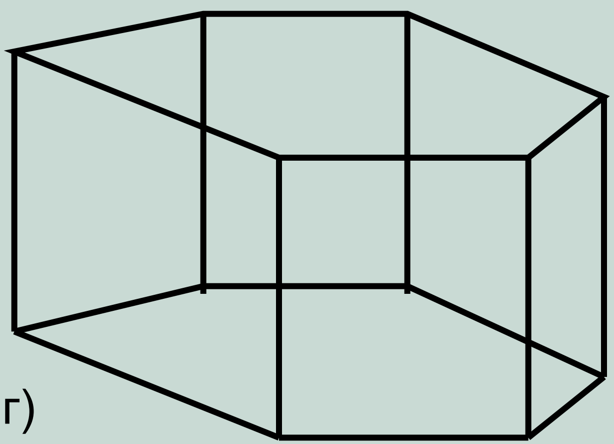
Отрезок $A_nO \perp (B_1B_2B_3)$ – высота призмы.

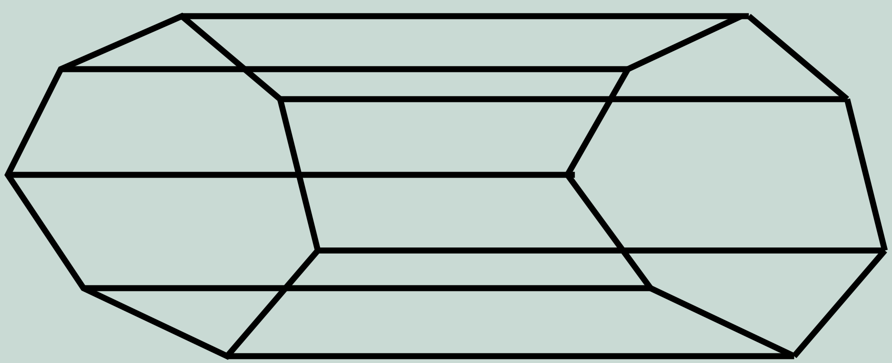
Название призмы определяется количеством сторон в основании фигуры. Например, на рисунке представлены треугольная (а), четырехугольная (б), пятиугольная (в), шестиугольная (г) и семиугольная (д) призмы:


а)


б)


в)


г)

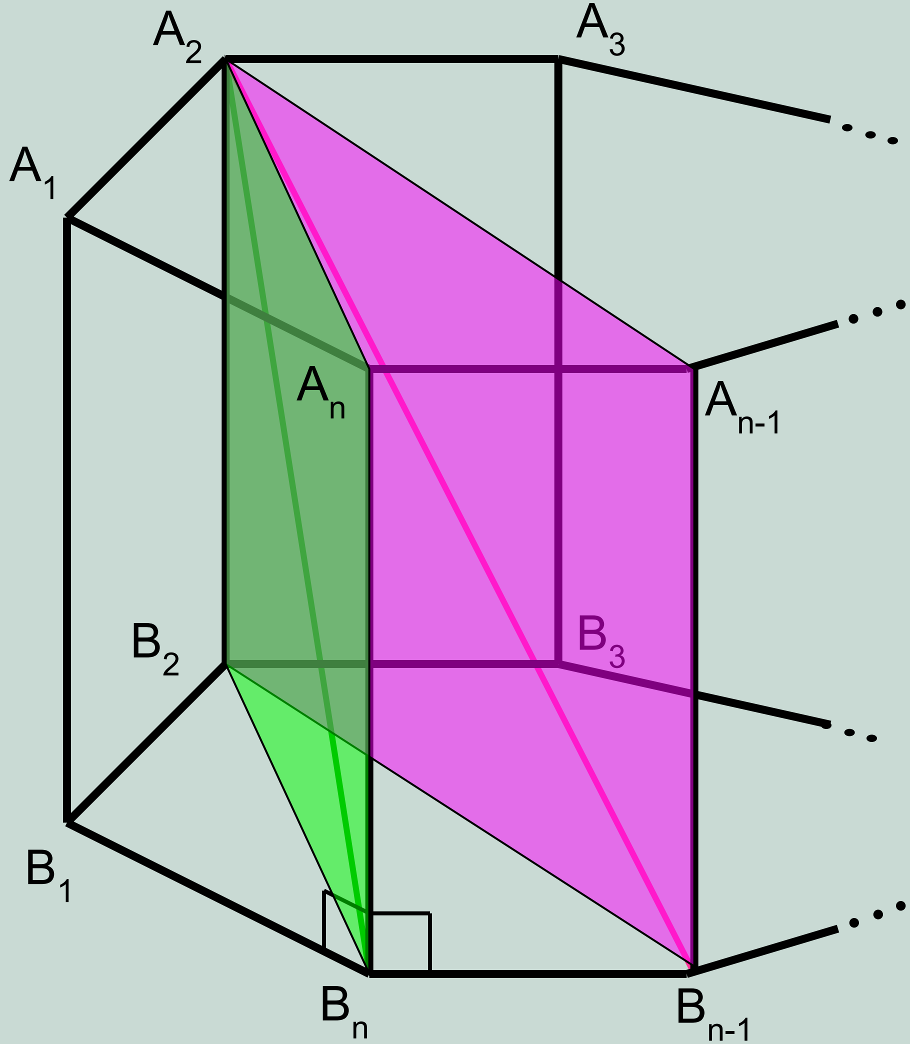

д)

Призма называется *прямой*, если боковое ребро перпендикулярно плоскости основания ($A_nB_n \perp (A_1A_2A_3)$). Очевидно, что в этом случае боковые грани призмы – прямоугольники.

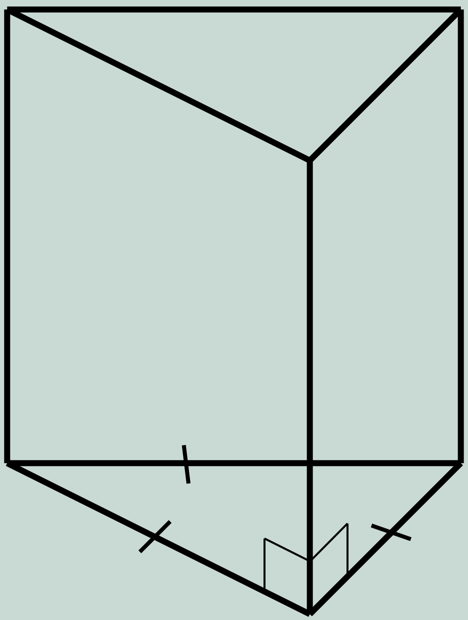
Отрезки, соединяющие точки верхнего и нижнего оснований, не лежащие в одной боковой грани, называются *диагоналями* призмы. *Задание*: сколько диагоналей в n-угольной призме?

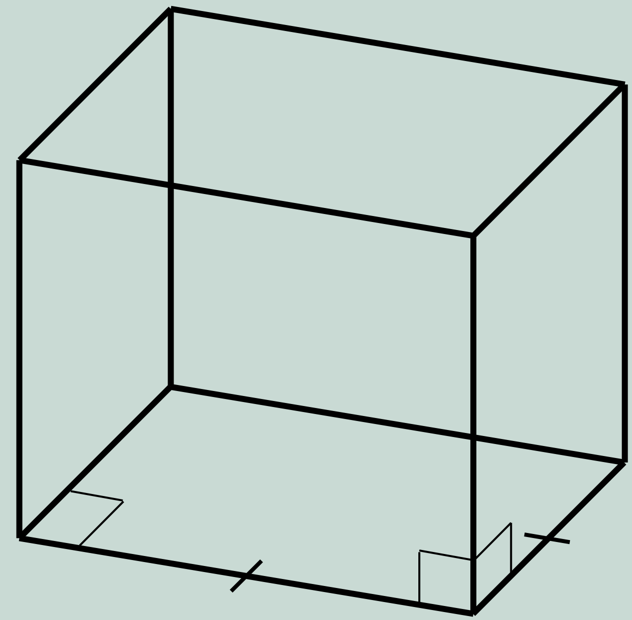
Ответ: n(n–3).

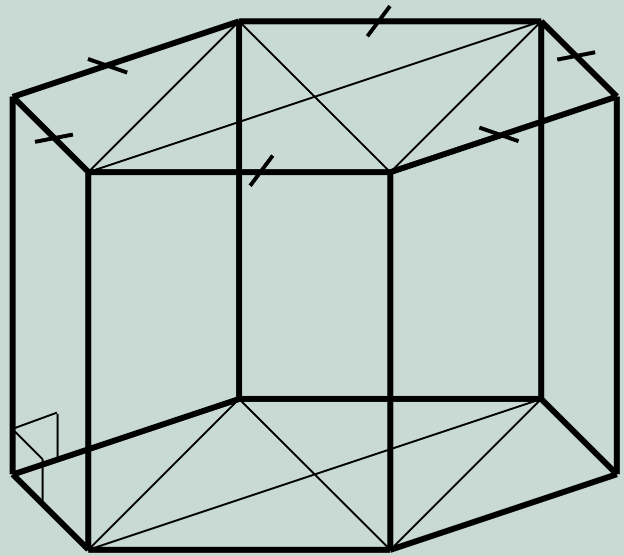
Сечения призмы, образованные диагональю призмы и боковым ребром, называются диагональными сечениями призмы. В наклонной призме – это параллелограммы, в прямой призме – прямоугольники.

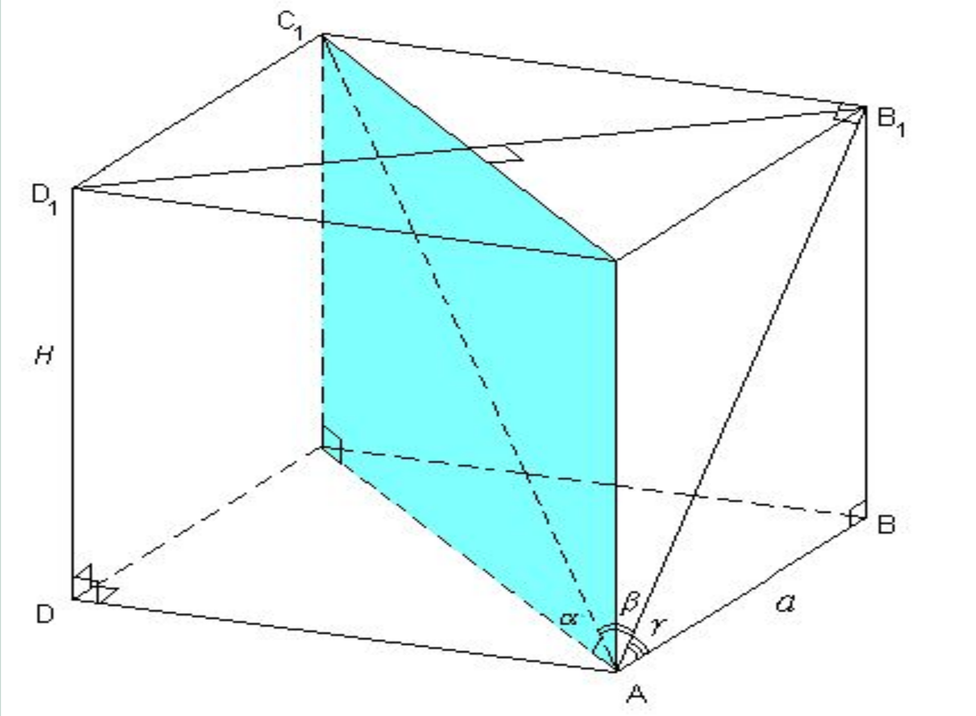


Призма называется *правильной*, если: 1) она прямая; и 2) её основания – правильные многоугольники. На рисунке представлены правильные а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная призмы.









Правильная четырехугольная призма.

Основание – правильный четырёхугольник (квадрат)

Прямоугольник ACC_1A_1 – диагональное сечение (прямоугольник)

$AA_1 = H$ - высота призмы, $AB = a$ - сторона основания,

AC_1 – диагональ призмы, AB_1 – диагональ боковой грани, AC – диагональ основания

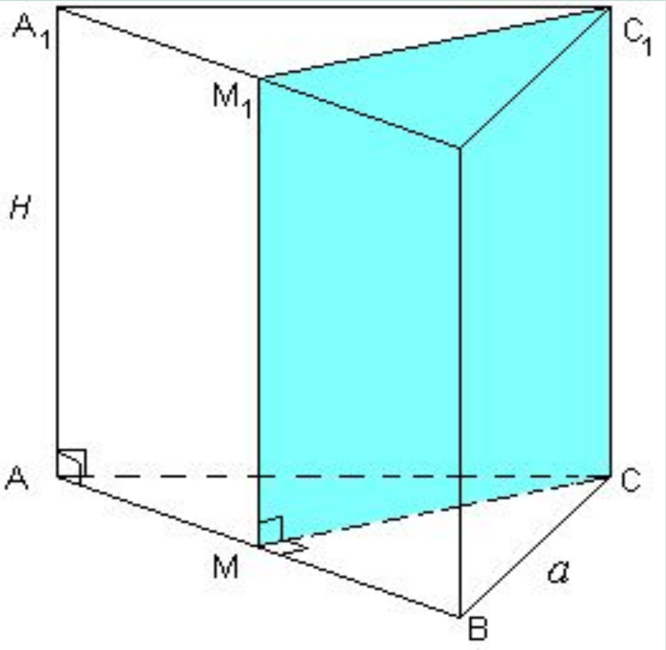
α - угол между диагональю призмы и основанием

β - угол между диагональю призмы и боковой гранью

γ - угол между диагональю боковой грани и основанием

$$AC_1 = \sqrt{2a^2 + H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} \qquad AC = a\sqrt{2} = \frac{H}{tg\alpha} \qquad AB_1 = \sqrt{a^2 + H^2} = \frac{a}{\cos\gamma}$$

$$S_{осн} = a^2 \qquad S_{бок} = 4aH \qquad S_{полн} = 4aH + 2a^2$$



Правильная треугольная призма.

Основание – правильный (равносторонний) треугольник

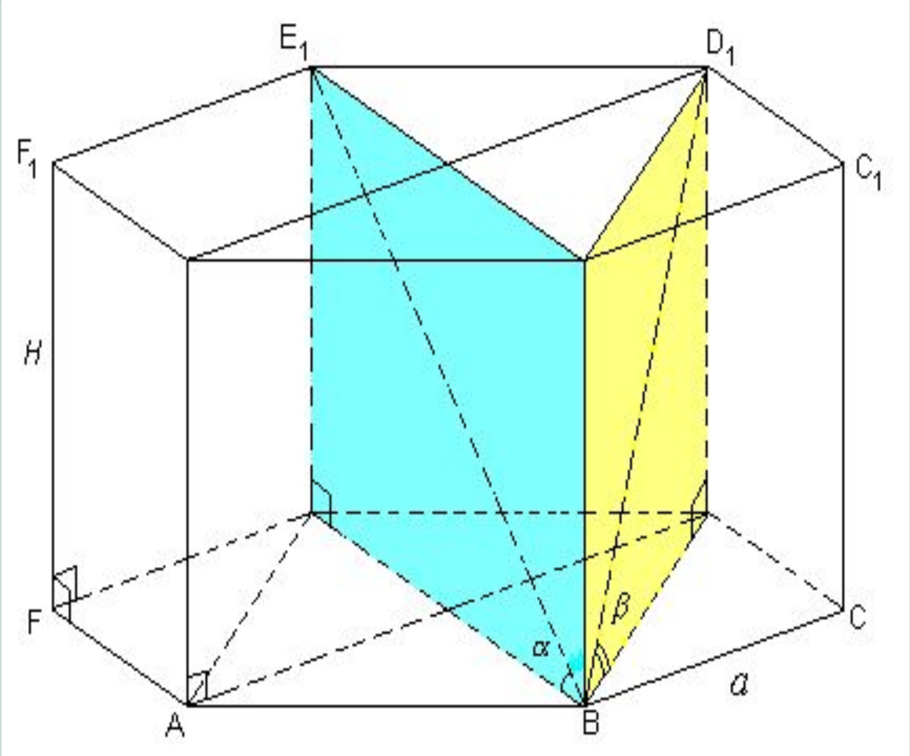
Прямоугольник MCC_1M_1 – медианное сечение

$AA_1 = H$ - высота призмы, $AB = a$ - сторона основания,

CM - высота основания $\angle A = 60^0$ $\angle ACM = \angle BCM = 30^0$

$$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{бок} = 3aH \qquad S_{полн} = 3aH + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad V = S_{осн} \cdot H$$



Правильная шестиугольная призма.

Основание – правильный шестиугольник

Прямоугольники BEE_1B_1 и BDD_1B_1 – диагональные сечения

$AA_1 = H$ - высота призмы, $AB = a$ - сторона основания,

BE_1 – бóльшая диагональ призмы, BD_1 – мéньшая диагональ боковой грани

BE – бóльшая диагональ основания, BD – мéньшая диагональ основания

α - угол между большей диагональю призмы и основанием

β - угол между меньшей диагональю призмы и основанием

$BE = 2a$ $\quad BD = a\sqrt{3}$ $\quad BE_1 = \sqrt{4a^2 + H^2} = \dfrac{2a}{\cos\alpha} = \dfrac{H}{\sin\alpha}$

$BD_1 = \sqrt{3a^2 + H^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\cos\beta} = \dfrac{H}{\sin\beta}$ $\quad S_{осн} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ $\quad S_{бок} = 6aH$ $\quad S_{полн} = 6aH + 3a^2\sqrt{3}$

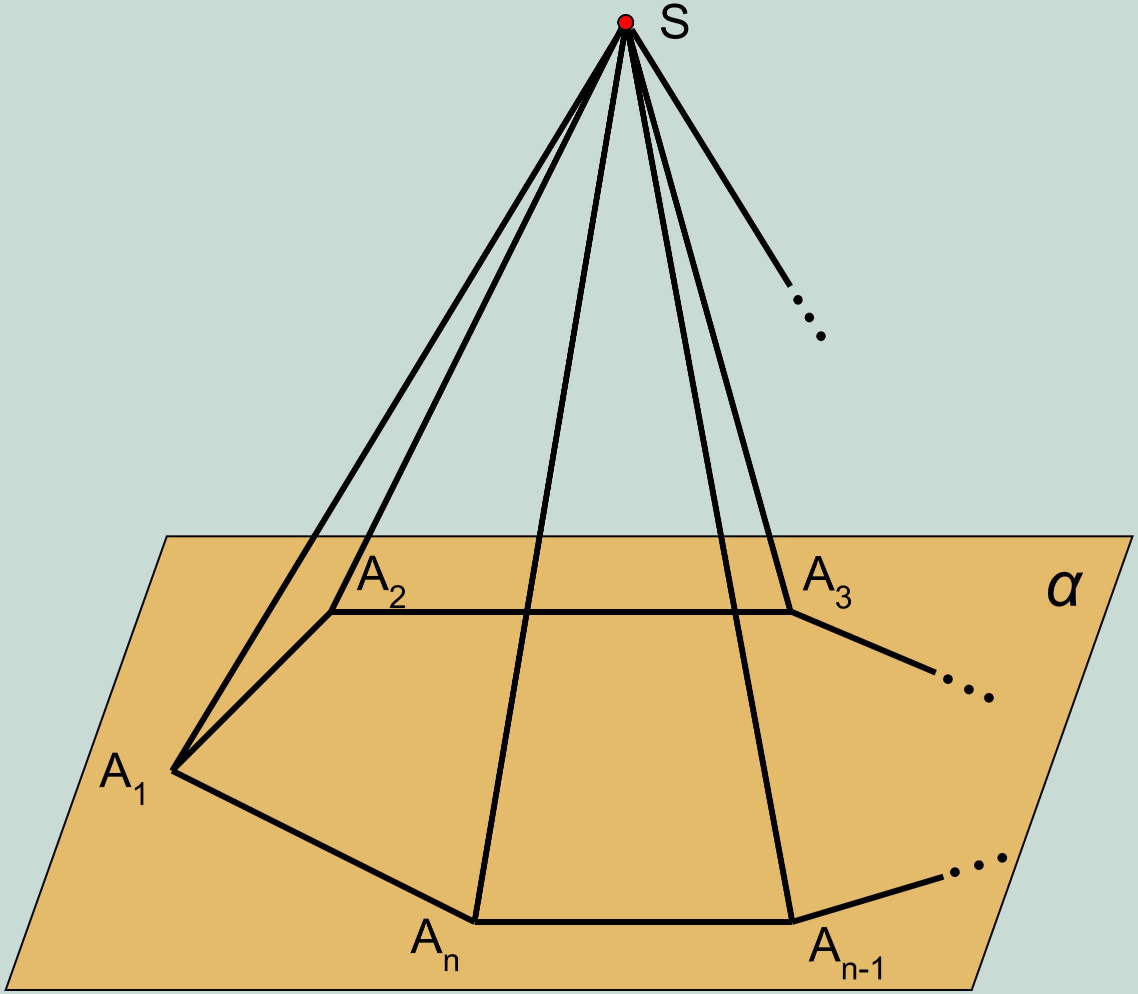
Построим в плоскости α произвольный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$.

Выберем произвольную точку S, не принадлежащую плоскости α.

Соединим точку S со всеми вершинами n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$.

Многогранник, образованный многоугольником и n треугольниками с общей вершиной вне плоскости многоугольника, является <u>n-угольной</u> <u>пирамидой</u>.

Обозначается пирамида перечислением всех точек, участвующих в ее построении , в нашем случае: $SA_1A_2 \ldots A_n$.
Точка *S* называется вершиной пирамиды.



Многоугольник $A_1A_2…A_n$ называется *основанием* пирамиды .

Треугольники $S\ A_1A_2$, $S\ A_2A_3$, …, $S\ A_{n-1}A_n$ – *боковые грани* пирамиды.

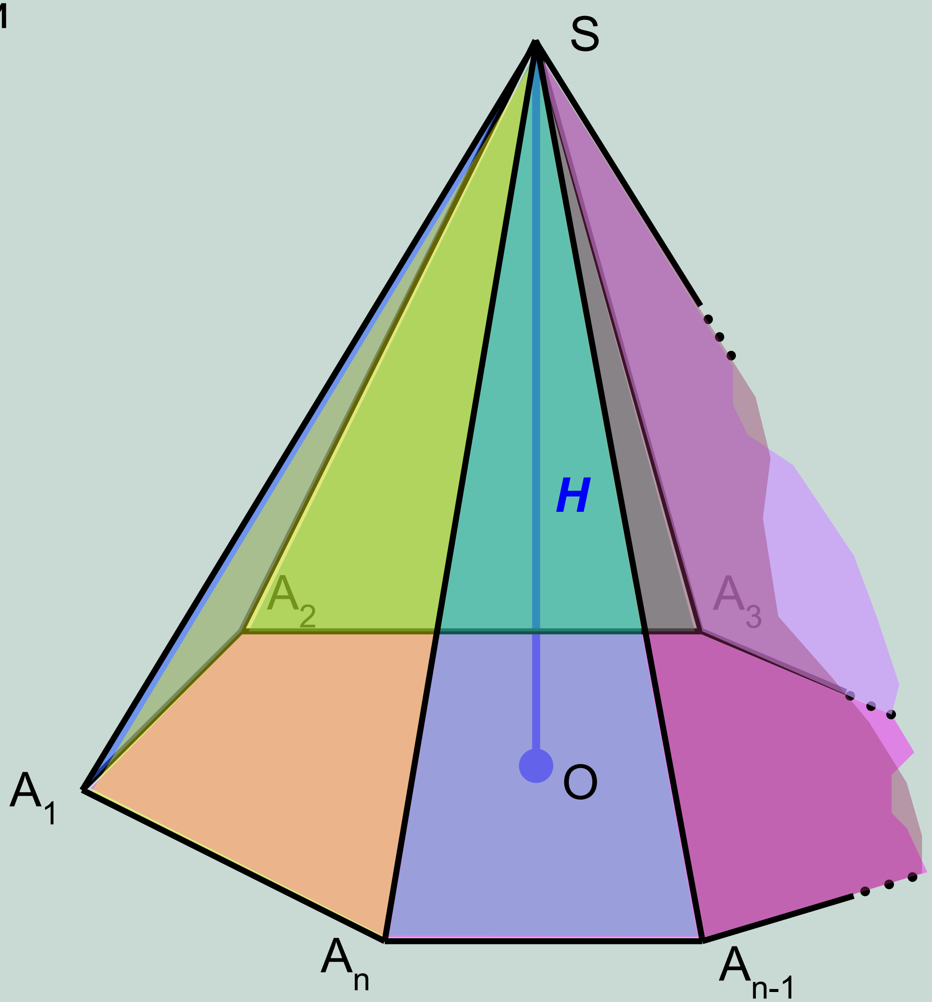
Отрезки SA_1, SA_2,…, SA_n – *боковые ребра* пирамиды.

Можно установить, что для любой n-угольной пирамиды:

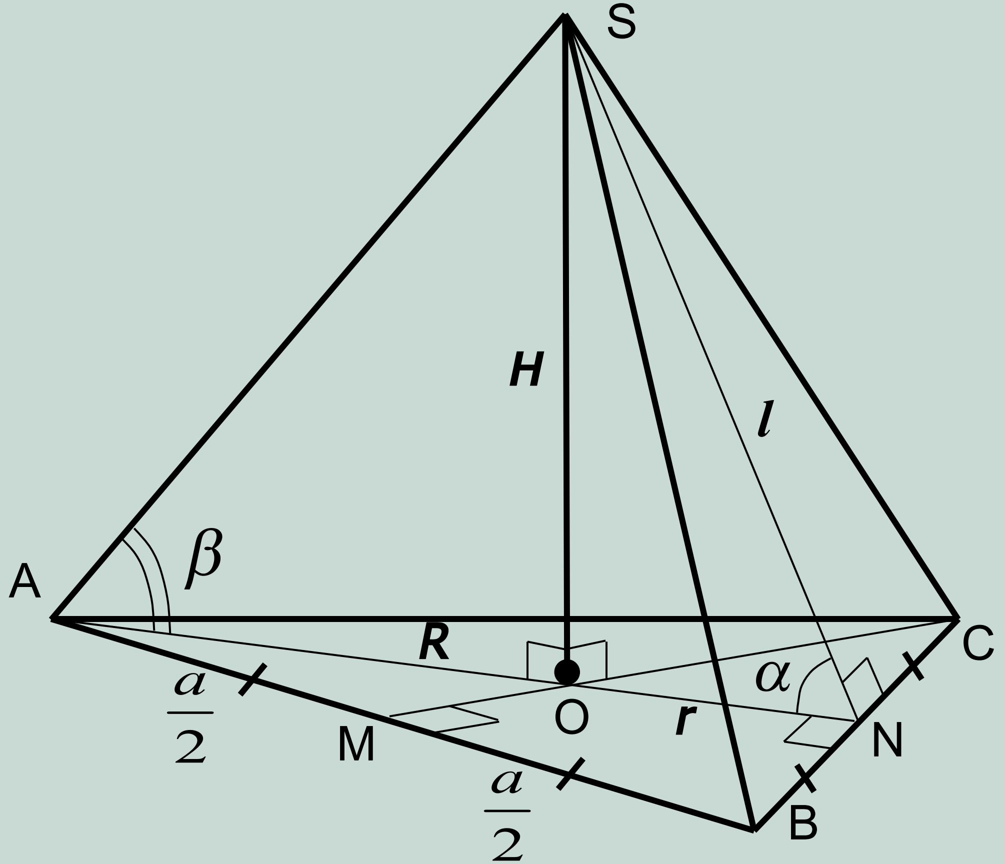
1) количество вершин – (n+1); (В)
2) количество граней – (n+1); (Г)
3) количество ребер – 2n; (Р)

и поэтому, как для любого многогранника, для n-угольной пирамиды выполняется формула Эйлера:

$$В+Г–Р=2.$$



Отрезок $SO \perp (A_1A_2A_3)$ – высота пирамиды.



Правильная треугольная пирамида **SABC**

Основание – правильный (равносторонний) треугольник H= SO⊥(ABC)– высота пирамиды,

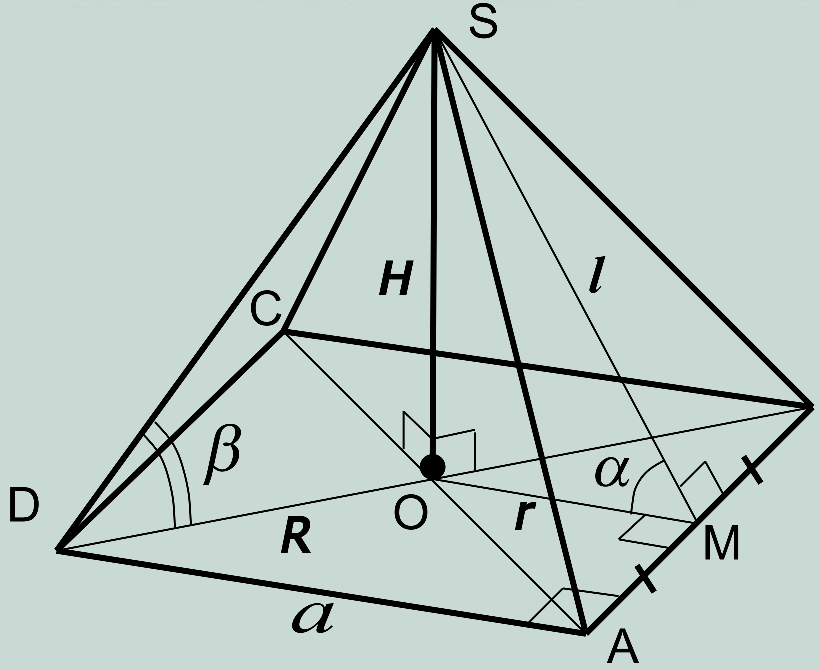
O – центр треугольника, l=SN⊥BC – апофема (высота боковой грани)

R=OA=OC – радиус описанной окружности, r=OM=ON – радиус вписанной окружности (AM=MB=$\frac{a}{2}$)

α - угол между боковой гранью и плоскостью основания, β - угол между боковым ребром и плоскостью основания

$H^2 + r^2 = l^2$ AS=BS=CS=$\sqrt{H^2 + R^2}$ CM=AN=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{H}{tg\beta}$ $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{H}{tg\alpha} = l \cdot cos\alpha$

$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $S_{бок} = 1{,}5al$ $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$



Правильная четырёхугольная пирамида *SABCD*

Основание – правильный четырёхугольник (квадрат), H= SO⊥(ABC) – высота пирамиды,

O – центр квадрата, l=SM⊥AB – апофема (высота боковой грани)

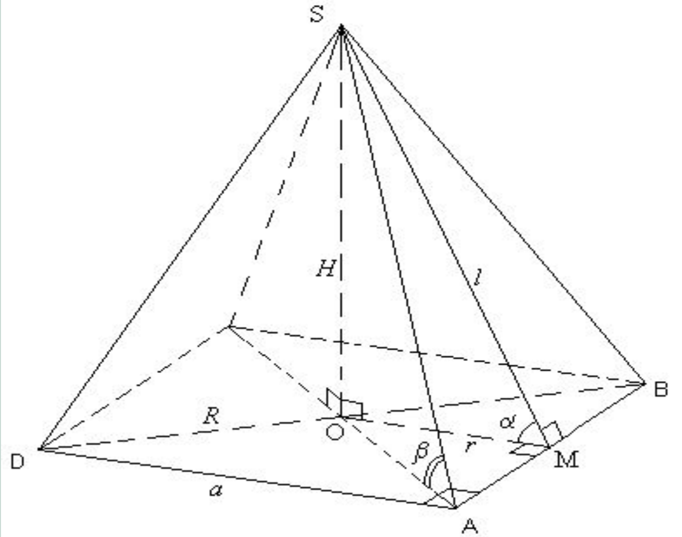
R=OA=OB=OC=OD – радиус описанной окружности, r=OM – радиус вписанной окружности (AM=MB)

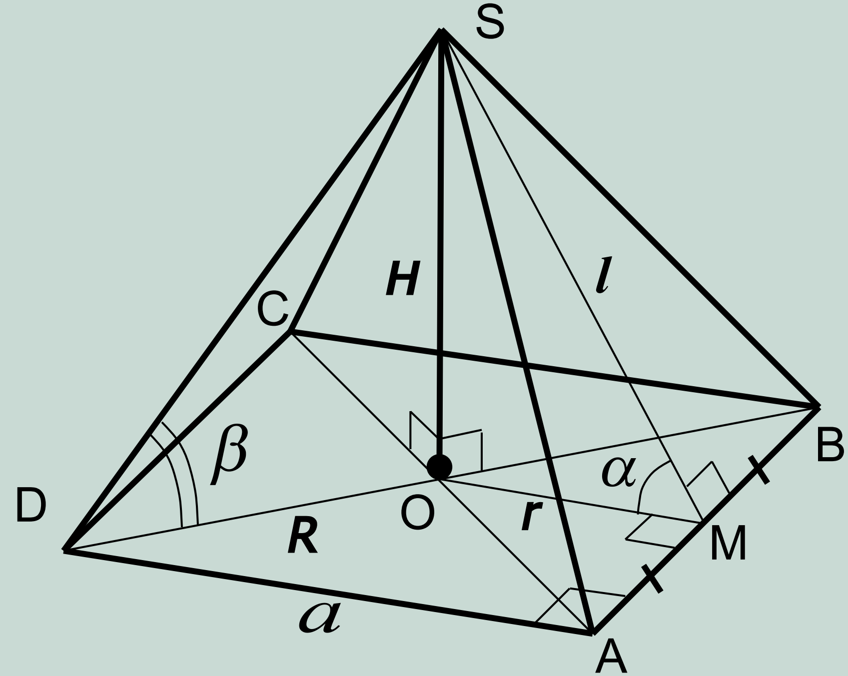
α - угол между боковой гранью и плоскостью основания

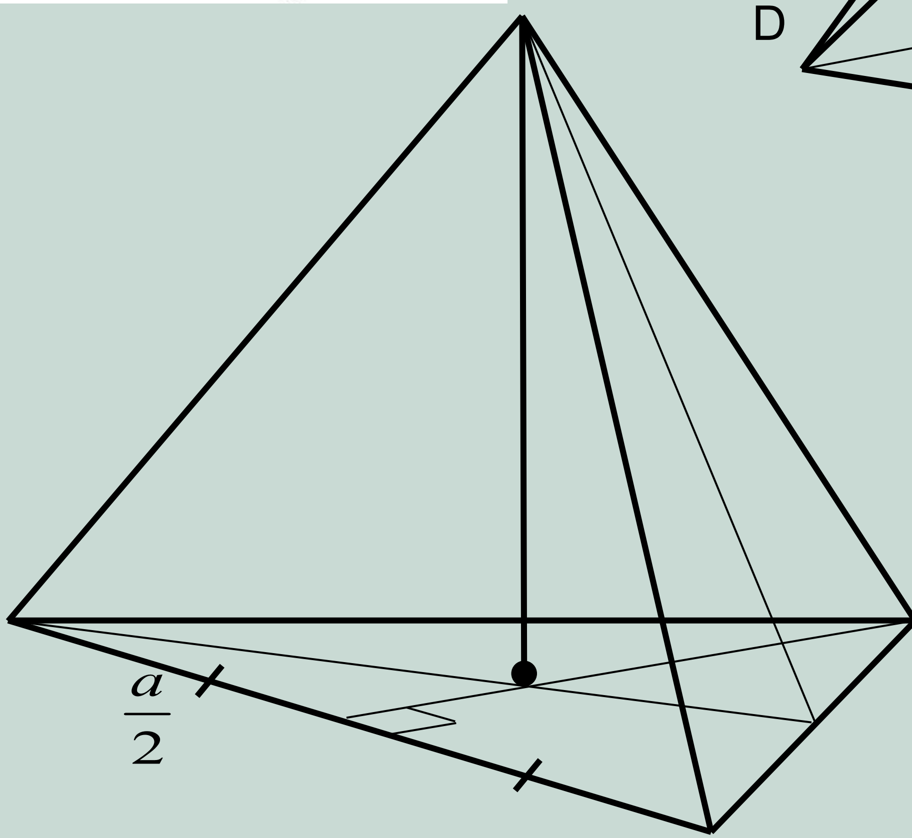
β - угол между боковым ребром и плоскостью основания

$R=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{H}{tg\beta}$ $\qquad r=\frac{a}{2}=\sqrt{l^2-H^2}=l\cdot\cos\alpha=\frac{H}{tg\alpha}$ $\qquad$ AS=BS=CS=DS=$\sqrt{H^2+R^2}$

$S_{осн}=a^2$ $\qquad S_{бок}=2al$ $\qquad S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$ $\qquad V=\frac{1}{3}a^2H$


S
H
l
B
R
O
α
D
β
r
M
a
A


S
H
l
C
B
β
D
O
α
r
R
M
a
A


a/2