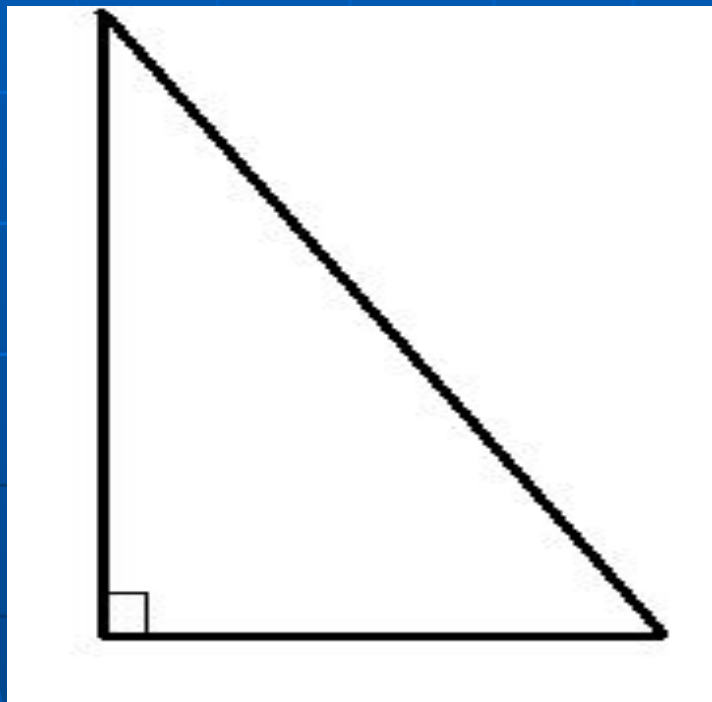
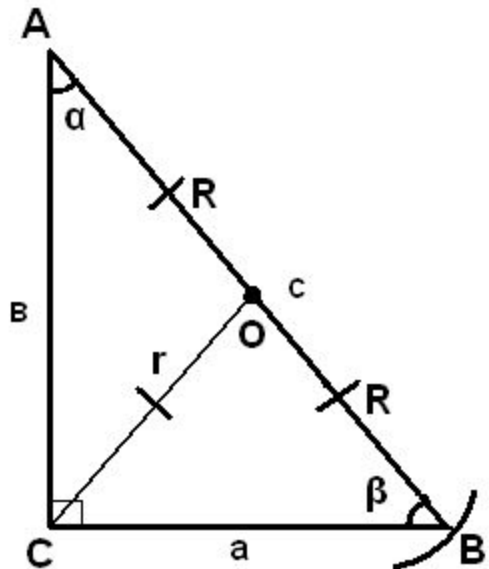


Решение прямоугольного треугольника





$$1) \angle A + \angle B = 90^\circ, \sin A = \cos B$$

$$2) c^2 = a^2 + b^2$$

$$3) a = c \cos \beta$$

$$b = c \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} B = b/a$$

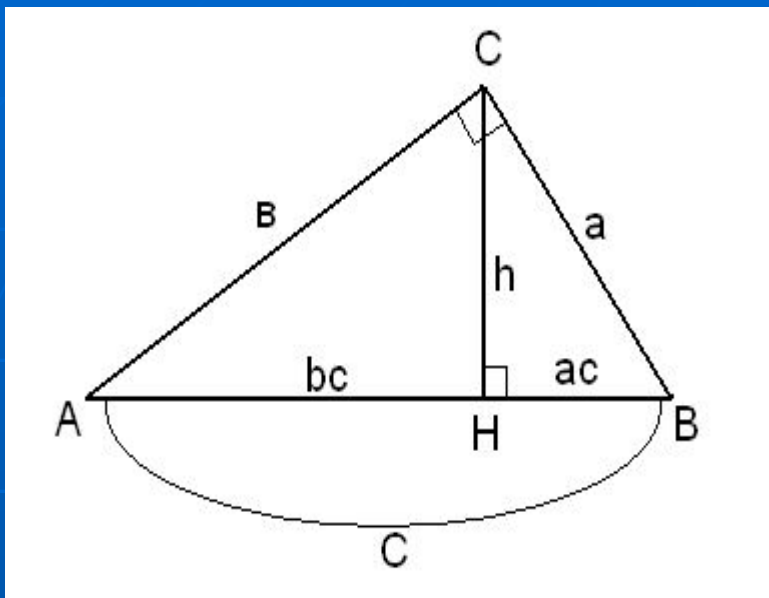
O – середина AB (O – центр описанной окружности)

R- радиус описанной окружности,
AB- диаметр описанной окружности.

$$R = 1/2 c$$

r- радиус вписанной окружности

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$



$$S_{\Delta} = 1/2ab$$

h – высота, проведённая к гипотенузе C .

$$h = \frac{2S_{\Delta}}{c}$$

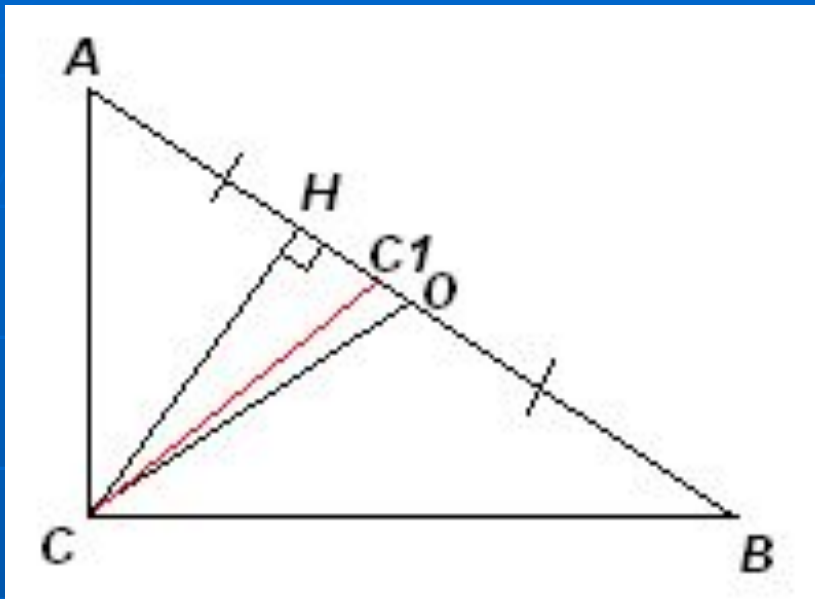
или

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$h^2 = ac \cdot bc$$

$$b^2 = c \cdot bc$$

$$a^2 = c \cdot ac$$



$\triangle ABC$:

CO – медиана

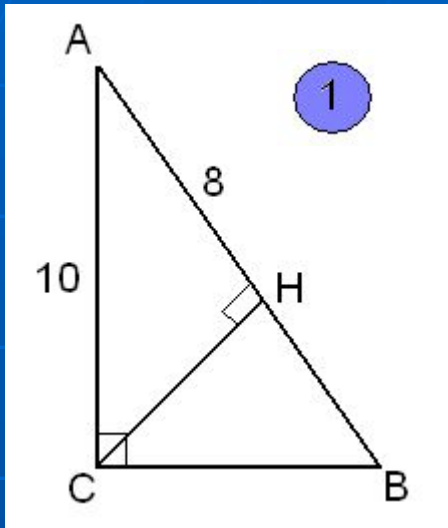
CH – высота

CC_1 – биссектриса $\sphericalangle C$

Тогда $\sphericalangle OCC_1 = \sphericalangle HCC_1$

Биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой пополам, проведёнными из той же вершины угла.

Примеры решения задач



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\sphericalangle C = 90^\circ$),
CH – высота

AC = 10, AH = 8

Найти:

$S_{\triangle ABC}$

Решение:

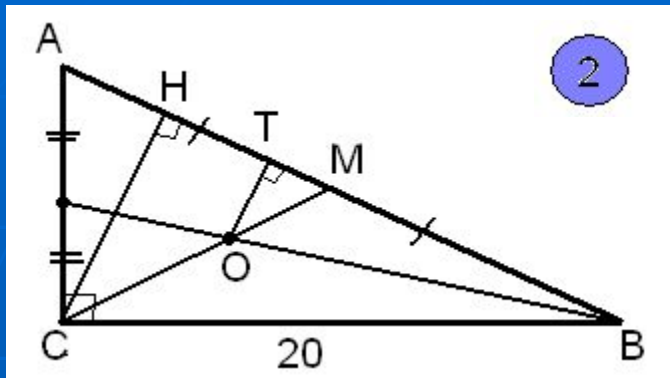
1) $\triangle ACH$: AH = 8; AC = 10; $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$

2) $CH^2 = AH \cdot HB$, $HB = CH^2 / AH = 6^2 / 8 = 9/2 = 4.5$

3) $AB = AH + HB = 8 + 4.5 = 12.5$

4) $S_{\triangle} = 1/2 AB \cdot CH = 1/2 \cdot 6 \cdot 12.5 = 37.5$

Ответ. 37.5



Найти расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его гипотенузы.

Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$),

$AB = 25$, $BC = 20$

O – точка пересечения медиан.

Найти: OT

Решение:

Проведём CH – высоту, тогда $OT \parallel ON$, как перпендикуляры, проведённые к AB.

Значит $\triangle OTM \sim \triangle ONM$, следовательно $\frac{OT}{CH} = \frac{OM}{CM}$ CM – медиана, значит $OM / CM = 1/3$

Тогда $OT / CH = 1/3$, т.к. CH – высота, проведённая из вершины прямого угла, то

$$CH = AC \cdot BC / AB$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}$$

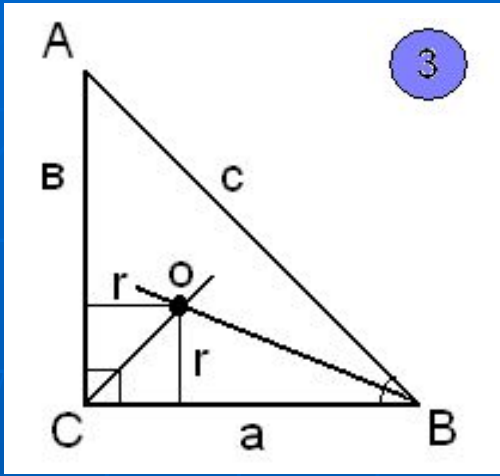
$$CH = 15 \cdot 20 / 25 = 12 \text{ (см)}$$

$$OT = CH / 3 = 12 / 3 = 4 \text{ (см)}$$

Ответ. 4 см

3

Периметр прямоугольного треугольника равен 72см, а радиус вписанной окружности равен 6см. Найти диаметр описанной окружности.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$),

$P = 72\text{см}$, $r = 6\text{см}$.

Найти: AB

Решение:

AB - диаметр описанной окружности. O - центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис углов).

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$r = 6, (a + b - c) / 2 = 6$$

$P = a + b + c$, $a + b = P - c = 72 - c$, тогда

$$(72 - c - c) / 2 = 6,$$

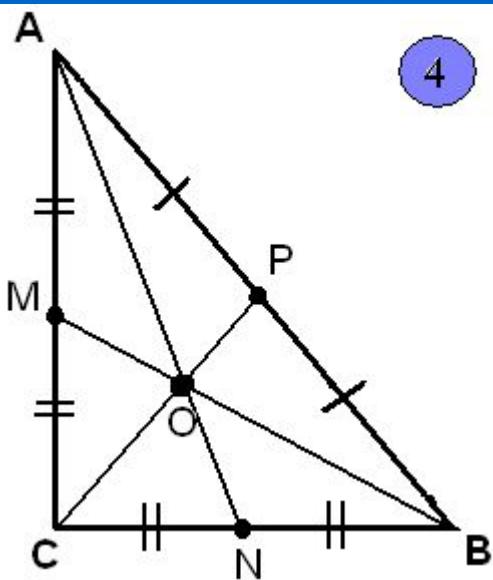
$$72 - 2c = 12,$$

$$2c = 60,$$

$$C = 30, AB = 30.$$

Ответ. 30 см

4



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный, BM , AN , CP – медианы.

$AN = 12$ см, $BM = 4\sqrt{11}$ см.

Найти: CP

Решение:

P – середина AB . P – центр описанной окружности около $\triangle ABC$. Значит $AP = PB = PC$, следовательно $CP = \frac{1}{2} AB$.

$$\begin{cases} AN^2 = AC^2 + CN^2, \\ BM^2 = BC^2 + CM^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 144 = AC^2 + (1/2 BC)^2, \\ 176 = BC^2 + (1/2 AC)^2; \end{cases}$$

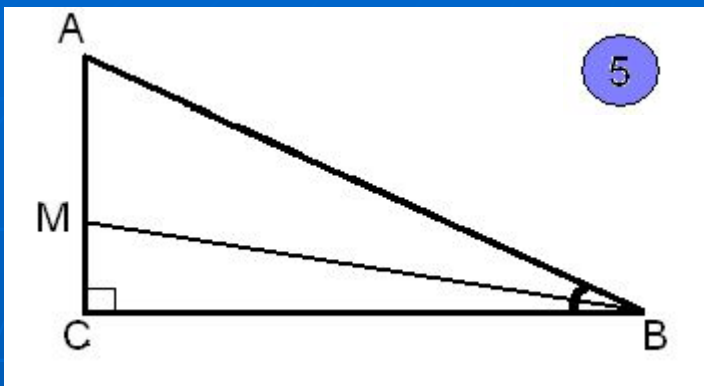
$$\begin{cases} AC^2 + 1/4(BC)^2 = 144, \\ BC^2 + 1/4(AC)^2 = 176; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5/4 AC^2 + 5/4 BC^2 &= 320, \\ 5/4 (AC^2 + BC^2) &= 320 / \cdot 4/5 \\ AC^2 + BC^2 &= 256. \end{aligned}$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ значит } AB^2 = 256, AB = 16.$$

$$\text{Тогда } CP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ (см)}$$

Ответ. 8 см



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$),
 BM – биссектриса $\angle B$. $\sin A = 0.8$, $S_{\triangle CBM} = 8$

Найти:

$$S_{\triangle ABC}$$

Решение:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$S_{\triangle CBM} = \frac{1}{2} MC \cdot BC, \quad \frac{1}{2} MC \cdot BC = 8, \quad \underline{MC \cdot BC = 16.} \quad (1)$$

$$\sin A = 0.8, \text{ значит } \cos B = 0.8$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos B}}{\sqrt{1 + \cos B}} = \frac{\sqrt{1 - 0.8}}{\sqrt{1 + 0.8}} = \frac{\sqrt{0.2}}{\sqrt{1.8}} = \frac{\sqrt{1/9}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{MC}{BC}, \quad \frac{MC}{BC} = \frac{1}{3}, \quad \underline{MC = \frac{1}{3} BC.} \quad (2)$$

Подставим в (1) равенство, получим: $BC \cdot \frac{1}{3} BC = 16, \quad \frac{1}{3} BC^2 = 16$

Значит $BC^2 = 48, \quad BC = 4\sqrt{3}$ (см)

$\triangle ABC$: $BC = 4\sqrt{3}, \quad \sin A = 0.8$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= BC/AC, \quad AC = BC : \operatorname{tg} A = BC : \sin A / \cos A = 4\sqrt{3} : 0.8 / \sqrt{1 - (0.8)^2} = \\ &= 4\sqrt{3} \cdot 0.6 / 0.8 = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 18 \text{ (cm)}^2$$

Ответ. 18 (cm)^2

Реши самостоятельно:

1) В прямоугольном треугольнике ABC высота CH, проведенная из вершины прямого угла, равна 3, AC= 5. Найти S_{ABC}

Ответ. 9.375.

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), проведена биссектриса BK. Найти $9\sqrt{5}S$, где S- площадь $\triangle CBK$. $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{5}$, а $\sin A = 2/7$.

Ответ. 63.

3) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$). Через центр O – вписанной в треугольник окружности проведён луч BO, пересекающий катет AC в точке M. Известно, что $AM = 8\sqrt{3}$, $\angle A = \angle MBC$. Найти гипотенузу.

Ответ. 24.

4) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15см, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16см. Найти диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ. 25см.

5) Гипотенуза АВ прямоугольного треугольника ABC равна $2\sqrt{22}$, а катет BC равен 6.

Найти длину медианы BK.

Ответ. 7.